2-자유도 공간 트러스 모델의 대칭조건과 안정성에 관한 연구

손수덕*, 하준홍**
*한국기술교육대학교 건축공학과
**한국기술교육대학교 교양학부
e-mail:sdshon@koreatech.ac.kr

A Study on the Symmetric Condition and Stability of 2-DOF Space Truss Model

Sudeok Shon*, Junhong Ha**
*Department of Architectural Engineering, Korea University of Technology and Education
**School of Liberal Arts, Korea University of Technology and Education

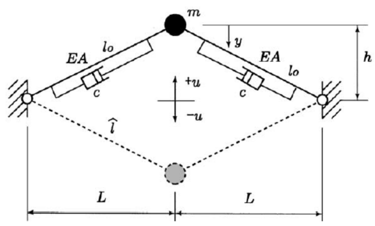
요 약
본 연구는 형상과 하중 그리고 평형상태에 대해 대칭조건으로 가정된 공간 트러스의 안정성에 대해서 다루고 있다. 대상 모델은 대칭조건의 가정에 만족하는 2자유절점 공간트러스이다. 이 모델에서 나타내는 시스템은 두 개의 더핑 방정식으로 모델링되는 비선형 미분방정식이다. 이 모델의 대칭적 조건에 대한 동적 거동과 특성을 조사하기 위해서 시간과 공간에 대한 시스템의 일반화를 시도하였다. 외력이 없는 또는 대칭적 외력에 대한 시스템 평형점의 상태를 엄밀하게 계산하였다. 또한 야코비안 행렬의 특성방정식의 근을 통해서 이러한 점들의 안정성을 분류하였다. 이상의 해석적 연구결과를 통해서 대칭상태에 대한 안정성의 분류를 시도하여 그 결과를 도출하였다.

1. 서론

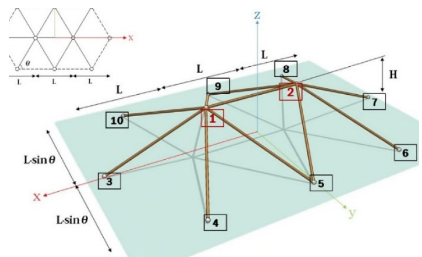
공간트러스는 장경간 지붕 구조물에 자주 활용되는 시스템으로 힘의 내부 흐름이 인장과 압축으로 정의되는 장점이 있다. 부재 조합을 통한 공간트러스는 일체화된 셀이나 아치구조물과 같이 외력에 잘 저항 할 수 있으며, 부피에 비해 가벼운 까닭에 여러 공학 분야의 설계자들이 관심을 가지고 적용한다. 그러나 구조 불안정 문제는 반드시 해결해야 한다. 비선형 특성을 가진 불안정 현상에 대한 외력의 안전한 범위에 대한 연구결과는 구조물의 한계를 예측할 수 있기 때문에 구조물의 한계설정에 매우 유익하다. 그러나 불안정성은 본질적으로 시스템의 다양한 비선형성에 기인하므로 비선형 해석방법의 해석결과는 구조물의 설계 시 정밀도를 필요로 한다.

단순부재 연구로는 [그림 1]과 같고, 단자유도와 2자유도 모델이 대표적이다. 2자유도는 여러 종류의 모델이 있다. 단자유도 모델의 상태방정식은 더핑 방정식으로 설명되며 자유진동의 안정성과 스냅현상이 발생하는 위상공간 및 특이한 분기 등이 연구되어지고 있다. 2자유도 모델에서는 직접좌굴과 간접좌굴에 대한 민감한 거동특성이 주로 연구되어 왔지만, 단 자유도와는 달리 차수가 높아질수록 선형화된 시스템의 행렬식과 고유치는 매우 복잡하게 나타나기 때문에 안정성에 대한 분석은 쉽지 않다.

특히 차수가 4차 이상인 특성방정식은 일반화된 근으로 시스템의 안정성을 설명하는 것이 어려우며, 주로 평형경로상의 특이점에 대해서 많은 해석을 통해 분석적으로 구한다.



(a) Example of Ario(2004)

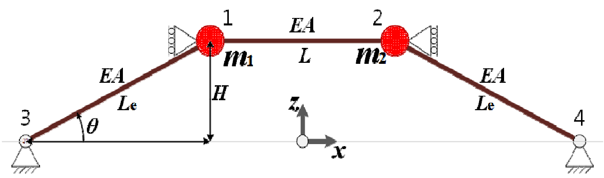


(b) Example of Shon et al.(2015)
[그림 1] Examples of 1- and 2-DOF Space Truss

따라서 본 논문에서는 2-DOF 모델의 안정성을 분석하고, 대칭조건에 대한 안정임계점을 구한다. 지배방정식의 무차원화와, 평형상태에 대한 대칭성을 알아보도록 한다.

2. 2-DOF 모델의 상태방정식과 안정성

본 연구의 대상인 2-DOF 모델은 [그림 2]와 같고, 4개의 절점과 3개의 부재로 이루어져 있으며, (x,y)평면에서 y 축에 대칭형상을 가진다.



[그림 2] 2-DOF Space Truss Model

공간 트러스에 적용되는 요소를 모델링하여 다음과 같은 무차원화 1계 비선형미분방정식을 유도할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
& dotu_1 = u_2 \\
& dotu_2 = -\{\gamma^* u_2 + \kappa^* (2\pi)^2 f(u_1, v_1)\} + \Lambda^* \\
& dotv_1 = v_2 \\
& dotu_2 = -\{\gamma^* v_2 + \kappa^* (2\pi)^2 g(u_1, v_1)\} + \Lambda^*
\end{aligned} \tag{1}
$$

위의 모델에 대한 대칭성을 고려한 평형점을 분류하면 다음과 같다.

[표 1] Equilibrium points of the system

Case	Equations	Equilibrium point
1	$u_1 = v_1$ $u_1 = -v_1$	$(0,0)$
2	$u_1 = -v_1$ $u_1^2 - u_1 v_1 + v_1^2 = 1$	$(\pm 1, \pm 1)$
3	$u_1 = v_1$ $u_1^2/r_1 - r_2\, u_1 v_1 + v_1^2/r_1 = 1$	$(\pm 1/\sqrt{(8\alpha^3+1)},$ $\mp 1/\sqrt{(8\alpha^3+1)})$
4	$u_1^2 - u_1 v_1 + v_1^2 = 1$ $u_1^2/r_1 - r_2\, u_1 v_1 + v_1^2/r_1 = 1$	-

분류된 평형점은 야코비안 행렬을 통해서 안정성을 분류할 수 있으며, 고유치 해석을 통해 판단할 수 있다. 야코비안 행렬은 다음과 같다.

$$
J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & -\gamma & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ c & 0 & d & -\gamma \end{bmatrix} \tag{2}
$$

여기서,

$$a = -4\kappa\pi^2 \frac{\partial f}{\partial u_1},\ b = -4\kappa\pi^2 \frac{\partial f}{\partial v_1},\ c = -4\kappa\pi^2 \frac{\partial g}{\partial u_1},\ d = -4\kappa\pi^2 \frac{\partial g}{\partial v_1}$$

시스템의 안정성은 교유치의 실수부 $\mathrm{Re}(\lambda)$의 부호에 따라 나뉘며, $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$은 점근적 안정, $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$는 안정 그리고 $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$는 불안정이다.

3. 결론

대상모델에 대한 고유치 해석을 통해서 도출한 결론은 자유진동에서 5개의 평형점이 존재하며, 위상공간의 (0,0)을 제외하면 모두 점근적 안정이다. 외력의 대칭조건에서 외력레벨은 3가지 평형점이 존재한다. 여기서 하나 이상의 평형점이 점근적 안정이 된다. 불안정구간은 야코비안 행렬의 고유치 해석에 따라 분류되며, 각각의 불안정 구간을 정의 할 수 있고, 특수한 경우인 대칭성에 대해서는 일반적인 정의는 아니지만 평형점 근방에서의 불안정, 안정 그리고 점근적 안정에 대한 구간을 판단할 수 있다.

감사의 글

이 논문은 2019년도 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(NRF-2019R1F1A1058327)

참고문헌

[1] Ario, I., “Homoclinic bifurcation and chaos attractor in elastic two-bar truss”, International Journal of Non-Linear Mechanics, vol.39, pp.605-617, 2004.

[2] Ha, J., Gutman, S., Shon, S. and Lee, S., “Stability of shallow arches under constant load”, International Journal of Non-Linear Mechanics Vol.58, pp.120-127, 2014

[3] Pokhrel, B., Shon, S., Ha, J. and Lee, S., “Dynamic Stability and Semi-Analytical Taylor Solution of Arch With Symmetric Mode”, Journal of Korean Association for Spatial Structures, Vol.18, No.3, pp.83-91, 2018

[4] Shon, S., Ha, J., Lee, S. and Kim, J., “Application of Multistage Homotopy Perturbation Method to the Nonlinear Space Truss Model”, International Journal of Steel Structures Vol.15, No.2, pp.335-346, 2015

[5] Shon, S., Lee, S., Ha, J. and Cho, C., “Semi-analytic solution and stability of a space truss using a high-order Taylor series method”, Materials, Vol.8, pp.2400-2414, 2015

[6] Ha, J., Shon, S., Lee, S. and Hwang, K., “Equilibrium Point and Stability of Double-Free-Nodes Space Truss Under Symmetric Condition”, Journal of Korean Association for Spatial Structures, Vol.19, No.4, pp.69-76, 2019