

평면변형률상태에서의 von Mises 항복기준의 특성에 관한 이론적 연구

이승현¹, 김병일^{2*}

¹선문대학교 건축사회환경학부, ²명지대학교 토목환경공학과

Analytical Study on Characteristics of von Mises Yield Criterion under Plane Strain Condition

Seung-Hyun Lee¹, Byoung-Il Kim^{2*}

¹Division of Architecture, Architectural Engineering and Civil Engineering, Sunmoon University,

²Department of Civil and Environmental Engineering, Myongji University.

요약 2차원 응력조건에 대한 von Mises 항복기준의 특징을 살펴보기 위해 탄성변형률이 0이 되는 평면변형률 조건과 소성변형률증분이 0이 되는 평면변형률 조건을 고려해 보았다. 탄성변형률이 0인 평면변형률조건을 통해 얻은 항복함수와 평면응력조건에서의 항복함수는 기하학적으로 타원을 나타내는데 두 경우에 대한 기하학적 비교를 타원의 장, 단축의 길이 비와 이심률의 비로 나타낼 때 단축비는 같았으나 장축비 및 이심률의 비는 포아송비의 함수로 표현되었다. 탄성변형률이 0인 평면변형률조건을 통해 얻은 von Mises 항복기준에 대하여 탄성거동을 보이는 영역은 포아송비가 커짐에 따라 넓어짐을 알 수 있었다. 소성변형률증분이 0인 평면변형률조건을 통해 관련유동법칙을 써서 항복함수를 구하였는데 기하학적으로 볼 때 평면응력조건에서의 항복함수가 타원임과는 달리 직선을 나타내었으며 평면응력조건일 때보다 탄성거동영역이 컸다.

Abstract In order to investigate characteristics of the von Mises yield criterion under 2 dimensional stress condition, two cases of plane strain were studied. One of which was for zero elastic strain and the other was for zero plastic strain increment. Yield functions for the plane strain condition for zero elastic strain and for the plane stress condition were represented as ellipse and the two yield functions were compared by ratios of major axis, minor axis and eccentricity and it was seen that the ratio of minor axis was the same between the two cases and the ratios of major axis and eccentricity were functions of Poisson's ratio. Region of elastic behavior obtained from considering plane strain condition of zero elastic strain increases as the Poisson's ratio increases. Yield function for plane strain obtained from considering zero plastic increment and associate flow rule was displayed as straight line and the region of elastic behavior was greater than that for the case of plane stress.

Keywords : von Mises yield criterion, Plane strain, Zero elastic strain, Zero plastic strain increment

1. 서론

공학재료의 파괴는 크게 연성파괴와 취성파괴로 나눌 수 있다. 대부분의 금속은 연성을 띄게 되며 항복에 의해 파괴된다. 세라믹과 몇몇 중합체는 취성을 띄고 응력이

특정한 최대값을 초과하는 경우 파괴가 발생하게 된다. 이때 응력-변형률 거동은 파괴에 이르기까지 선형을 띄게 되며 갑작스런 파괴가 발생한다. 재료에 있어 원자결합을 끊어 원자를 분리하는데 필요한 응력을 재료의 이론강도(theoretical strength)라 부르며 이론강도는 재료

이 연구는 2015년도 명지대학교 교직원연구지원으로 연구되었음

*Corresponding Author : Byoung-Il Kim(Myongji Univ.)

Tel: +82-31-330-6415 email: bikim@mju.ac.kr

Received August 3, 2015

Revised August 17, 2015

Accepted September 11, 2015

Published September 30, 2015

의 탄성계수의 1/3에 해당함이 입증된 바 있다[1].

그러나 대부분의 재료는 이론강도의 수백분의 1 또는 수천분의 1에 해당하는 응력 하에서 파괴된다. 연성재료에 있어서의 항복은 원자의 분리에 의해 생기는 것이 아니라 원자 간의 미끄러짐에 의해 생긴다. 따라서 연성재료에 있어서는 최대 전단응력에 의해 재료의 항복이 발생한다. 취성재료에서의 파괴는 원자평면(atomic plane)의 분리에 의해 발생하게 된다. 그러나 이러한 큰 응력은 재료에 미리 존재하는 균열 때문에 생기는 응력집중에 의해 국부적으로 발생하게 된다. 즉 가해진 응력은 균열의 존재로 인해 수백 배에서 수천 배까지 커질 수 있으며 이러한 응력에 의해 원자가 분리되게 된다. 이러한 과정을 통해 재료가 불안정해지면 재료내 넓은 범위에 걸쳐 원자분리가 발생하여 재료의 취성파괴가 발생하게 된다. 비록 재료의 원자구조와 특성을 이용하여 재료의 강도를 설명하고 정량화하는 연구가 진행되고 있으나 이러한 접근법에 근거한 구조물설계는 여전히 비실용적이라 할 수 있다. 따라서 현재로서는 관찰과 오랜 기간 동안의 시험결과에 근거한 파괴이론에 의존할 수 밖에 없다. 파괴이론의 목적은 일축시험(uniaxial tests)으로부터 구한 강도값을 실제적 구조물에 작용하게 되는 다축응력상태(multi-axial states of stress)로 연장하는 것이라 할 수 있는데 그 이유는 현실적으로 재료에 작용하는 모든 응력상태를 조합한 상태에서의 강도를 구하기 어렵기 때문이다. 본 연구에서는 2차원 응력상태에 대한 von Mises 항복함수를 유도해보았는데 평면변형률 조건에 대한 항복함수를 유도하고 이를 널리 알려진 평면응력조건에 대한 항복함수와 비교해 보았다.

2. 이론적 배경

힘이 물체에 작용할 때 변형이 발생하며 이러한 외력에 의한 일은 물체에 포텐셜에너지로 저장되는데 이를 변형률에너지라 한다. 여기서 변형률에너지밀도(strain energy density) 개념을 이용하는데 변형률에너지밀도(U_0)란 단위체적당 변형률에너지를 의미하며 변형률에너지(U)는 Eq. 1과 같이 표현된다.

$$U = \iiint_V U_0(x,y,z) dV \quad (1)$$

일축응력상태의 경우 변형률에너지밀도는 응력-변형률곡선 아래 부분의 면적과 같으며 Eq. 2와 같이 표현된다[2].

$$U_0 = \frac{1}{2} \sigma \epsilon \quad (2)$$

3차원문제에서 변형률에너지밀도는 Eq. 3과 같이 표현된다.

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \quad (3)$$

Eq. 3의 변형률에너지밀도는 주응력축 좌표계로 나타내면 Eq. 4와 같게 된다.

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3) \quad (4)$$

선형탄성체 대한 응력-변형률 사이의 관계를 적용하면 Eq. 4는 Eq. 5와 같이 표현된다.

$$U_0 = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)] \quad (5)$$

변형률에너지밀도는 두 가지 성분으로 구성되어 있다고 볼 수 있는데 하나는 체적변화를 의미하는 체적팽창(dilation)이고 나머지 하나는 형상의 변화를 의미하는 전단변형(distortion)이다. 전자를 체적팽창변형률에너지밀도(dilatational strain energy density, U_h)라 부르고 후자를 전단변형률 에너지밀도(distortional strain energy density, U_d)라 부른다. 이러한 성분들을 계산하기 위해 주응력행렬을 체적팽창 응력행렬, σ_h 와 축차응력행렬(deviatoric stress matrix), σ_d 로 나누어 나타내면 Eq. 6과 같다.

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_h & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_h & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{1d} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{2d} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{3d} \end{pmatrix} \quad (6)$$

σ_h 는 체적변형응력(volumetric stress)이라고도 불리며 Eq. 7과 같이 정의된다.

$$\sigma_h = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad (7)$$

Eq. 7로부터 $3\sigma_h$ 는 응력불변량, $I_1[3]$ 임을 알 수 있으며 좌표계에 무관한 값이다. 체적팽창에너지밀도는 Eq. 7을 Eq. 5에 대입하여 Eq. 8과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} U_h &= \frac{1}{2E}[\sigma_h^2 + \sigma_h^2 + \sigma_h^2 \\ &\quad - 2\nu(\sigma_h\sigma_h + \sigma_h\sigma_h + \sigma_h\sigma_h)] \\ &= \frac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma_h^2 \end{aligned} \quad (8)$$

Eq. 8을 주응력으로 표현하면 Eq. 9와 같다.

$$\begin{aligned} U_h &= \frac{3(1-2\nu)}{2E}\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1-2\nu}{6E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \\ &\quad + 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \end{aligned} \quad (9)$$

변형률에너지의 전단변형에 의한 부분은 Eq. 5에서 Eq. 9를 빼서 Eq. 10과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} U_d &= U_0 - U_h = \frac{1+\nu}{3E} \\ &\quad \times \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right] \\ &= \frac{1+\nu}{3E}\sigma_{vM}^2 \end{aligned} \quad (10)$$

Eq. 10에서 σ_{vM} 은 다축응력상태를 고려한 등가응력으로서 von Mises 응력이라 불리우며 Eq. 11과 같이 표현된다[4].

$$\sigma_{vM} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} \quad (11)$$

재료에 가해지는 하중이 증가하여 항복이 발생하게 되면 소성변형이 생기게 된다. 소성상태에서는 응력과

전체변형률 사이에 일관된 관계가 없으므로 소성변형률 증분($d\epsilon_p$)을 고려하는 것이 편리하다. 전체변형률 증분($d\epsilon$)은 Eq. 12와 같이 탄성변형률 증분($d\epsilon^e$)과 소성변형률 증분의 합으로 표현된다.

$$d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p \quad (12)$$

탄성변형률 증분은 후크의 법칙에 의해 응력과 관련지을 수 있다. 소성변형률 증분에 관해서는 소성포텐셜(g)로부터 Eq. 13과 같이 소성변형률 증분이 표현된다.

$$d\epsilon^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (13)$$

Eq. 13에서 $d\lambda$ 는 정(+)의 비례상수이다. 소성포텐셜이 항복함수(f)와 같게 되는 경우 Eq. 13을 관련흐름법칙(associate flow rule)이 적용되는 경우라 하고 소성포텐셜이 항복함수와 다른 경우를 비관련흐름법칙(non-associate flow rule)이 적용되는 경우라 한다[5].

3. 평면변형률 상태에서의 항복기준

von Mises 이론에 따르면 연성재료는 전단변형에너지밀도가 그 재료의 임계값에 도달했을 때 항복이 일어나게 된다. 이 이론은 일축응력상태에 대해서도 성립되어야 하므로 전단변형에너지밀도의 임계값은 일축인장시험을 통해 구할 수 있다. 일축인장시험에서 항복이 발생하는 순간의 응력상태를 주응력으로 나타내면 $\sigma_1 = \sigma_0$ (항복응력), $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ 가 되므로 항복시 전단변형에너지밀도는 Eq. 14와 같게 된다.

$$U_d = \frac{1+\nu}{3E}\sigma_0^2 \quad (14)$$

따라서 Eq. 14에 나타난 에너지밀도는 재료의 임계 전단변형률에너지밀도가 된다. von Mises 파괴기준에 따라 다축 하중재하에 의해 재료는 Eq. 15와 같이 전단변형률에너지밀도가 임계값과 같거나 클 때 항복이 발생하게 되며 항복함수(f)는 Eq. 16과 같다.

$$\sigma_{vM} \geq \sigma_0 \tag{15}$$

$$f = \sigma_{vM} - \sigma_0 = 0 \tag{16}$$

3차원 주응력공간을 고려할 때 $\epsilon_3^e = 0$ 인 평면변형률 조건에서 주응력, σ_3 는 Eq. 17과 같다.

$$\sigma_3 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2) \tag{17}$$

따라서 등가응력, σ_{vM} 은 Eq. 18과 같이 표현된다. Eq. 18에서 ν 는 포아송비이다.

$$\sigma_{vM} = [(1 - \nu + \nu^2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - [1 + 2\nu(1 - \nu)]\sigma_1\sigma_2]^{0.5} \tag{18}$$

Eq. 18로부터 항복조건은 Eq. 19와 같이 표현된다. Eq. 19에서 σ_0 는 일축항복응력을 의미한다.

$$\begin{aligned} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \frac{1 + 2\nu(1 - \nu)}{1 - \nu + \nu^2} \sigma_1\sigma_2 \\ = \frac{\sigma_0^2}{1 - \nu + \nu^2} \end{aligned} \tag{19}$$

Eq. 19는 수평축과 45° 의 각도를 이루는 타원을 의미하는데 장축(a), 단축(b) 그리고 이심률(e)은 각각 Eq. 20, 21 그리고 22와 같다.

$$a = 2\sqrt{2} \frac{\sigma_0}{1 - 2\nu} \tag{20}$$

$$b = \sqrt{\frac{8}{3}} \sigma_0 \tag{21}$$

$$e = \sqrt{\frac{2}{3}} [1 + 2\nu(1 - \nu)] \tag{22}$$

한편 평면응력상태에서의 항복함수를 나타내는 타원의 장축, 단축 그리고 이심률은 각각 Eq. 23, 24 그리고 25와 같다.

$$a = 2\sqrt{2} \sigma_0 \tag{23}$$

$$b = \sqrt{\frac{8}{3}} \sigma_0 \tag{24}$$

$$e = \sqrt{\frac{2}{3}} \tag{25}$$

Eq. 20~25로부터 평면응력상태에 대한 평면변형률 상태에서의 장축비(r_a)와 단축비(r_b) 그리고 이심률의 비(r_e)는 각각 Eq. 26과 27 그리고 28과 같다.

$$r_a = \frac{1}{1 - 2\nu} \tag{26}$$

$$r_b = 1 \tag{27}$$

$$r_e = 1 + 2\nu(1 - \nu) \tag{28}$$

Eq. 26~28를 통해 알 수 있듯이 평면응력과 평면변형률상태에서의 항복함수에 대한 단축의 길이는 같지만 장축비와 이심률의 비는 포아송비의 함수임을 알 수 있다. 포아송비에 따른 장축비와 이심률의 비는 Fig. 1과 같다.

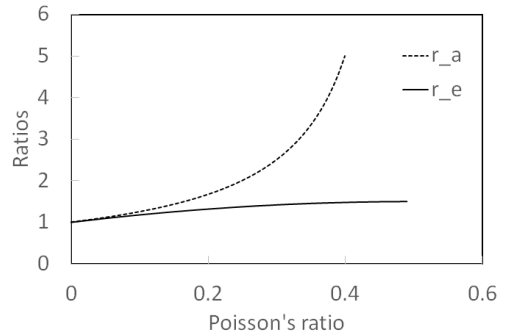


Fig. 1. Ratios of major axes and eccentricity

Fig. 1을 통해 알 수 있듯이 장축비는 포아송비가 커짐에 따라 급격하게 증가함을 알 수 있으며 이심률의 비는 포아송비에 따라 완만하게 증가하다 수렴함을 알 수 있다. 이상의 결과를 통해 von Mises 항복기준에 대하여 탄성거동을 보이는 영역은 포아송비가 커짐에 따라 넓어짐을 알 수 있다. 평면변형률상태를 정의함에 있어 소성 변형률증분($d\epsilon_3^p$)이 0이 되는 경우를 고려할 수도 있다. 소성변형률이 관련유동법칙을 따르는 경우에 있어 평면 변형률상태에서는 Eq. 16을 참고하여 $d\epsilon_3^p$ 를 Eq. 29와 같이 나타낼 수 있다.

$$d\epsilon_3^p = d\lambda \frac{df}{d\sigma_3} = 0 \quad (29)$$

Eq. 16을 참고하여 Eq. 29를 적용하면 평면변형률조건에서 Eq. 30과 같은 주응력관계를 얻을 수 있다.

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad (30)$$

Eq. 30을 다시 Eq. 16에 대입하면 Eq. 31과 같은 항복강도식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_2 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_0 \\ &\simeq \sigma_2 \pm 1.15\sigma_0 \end{aligned} \quad (31)$$

널리 알려진 평면응력조건에 대한 항복면과 평면변형률조건에 대한 항복강도를 나타내는 Eq. 31을 그림으로 나타내면 Fig. 2와 같다.

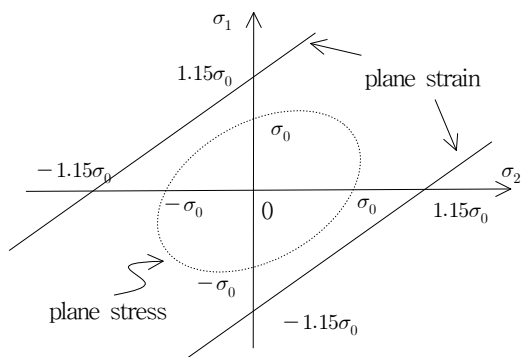


Fig. 2. Failure envelopes of plane stress and plane strain

Fig. 2를 통해 알 수 있듯이 평면응력조건에서의 von Mises 항복함수는 기하학적으로 타원을 나타내지만 평면변형률조건에서 직선을 나타낼 수 있으며 탄성거동을 보이는 영역 또한 큼을 알 수 있다.

4. 결론

2차원 응력조건에 대한 von Mises 항복기준의 특징을 살펴보기 위해 탄성변형률이 0이 되는 평면변형률 조

건과 소성변형률증분이 0이 되는 평면변형률 조건을 고려해 보았는데 본 연구를 통해 얻은 결론은 다음과 같다.

- (1) 탄성변형률이 0인 평면변형률조건을 통해 얻은 항복함수는 평면응력조건에 의한 항복함수와는 달리 포아송비의 함수로 표현되었다.
- (2) 탄성변형률이 0인 평면변형률조건을 통해 얻은 항복함수와 평면응력조건에서의 항복함수는 기하학적으로 타원을 나타내는데 두 경우에 대한 기하학적 비교를 타원의 장, 단축의 길이비와 이심률의 비로 나타낼 때 단축비는 같았으나 장축비 및 이심률의 비는 포아송비의 함수로 표현되었다.
- (3) 탄성변형률이 0인 평면변형률조건을 통해 얻은 von Mises 항복기준에 대하여 탄성거동을 보이는 영역은 포아송비가 커짐에 따라 넓어짐을 알 수 있었다.
- (4) 소성변형률증분이 0인 평면변형률조건을 통해 관련유동법칙을 써서 항복함수를 구하였는데 기하학적으로 볼 때 평면응력조건에서의 항복함수가 타원임과는 달리 직선을 나타내었으며 탄성거동 영역이 평면응력조건일 때 보다 컸다.

References

- [1] T. L. Anderson, Fracture Mechanics - Fundamentals and Applications, Third Edition, CRC Press, Boca Raton, FL, 2006.
- [2] A. C. Ugural and S. K. Fenster, Advanced strength and applied elasticity, Elsevier Science Publishing Co., Inc., pp.52-57, 1987.
- [3] C. S. Desai and H. J. Siriwardane, Constitutive laws for engineering materials, Prentice-Hall, Inc., pp.36-38, 1984.
- [4] R. von Mises, Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand. Göttin. Nachr. Math. Phys., vol. 1, pp.582-592, 1913.
- [5] J. Lubliner, Plasticity Theory, Courier Dover Publications, 2008.

이 승 현(Seung-Hyun Lee)

[정회원]



- 1988년 8월 : 서울대학교 토목공학과 (공학사)
- 1991년 2월 : 서울대학교 토목공학과 (공학석사)
- 1997년 2월 : 서울대학교 토목공학과 (공학박사)
- 2000년 3월 ~ 현재 : 선문대학교 건축사회환경학부 교수

<관심분야>
토질역학, 기초공학

김 병 일(Byoung-Il Kim)

[종신회원]



- 1989년 2월 : 서울대학교 토목공학과 (공학석사)
- 1994년 2월 : 서울대학교 토목공학과 (공학박사)
- 1995년 3월 ~ 현재 : 명지대학교 토목환경공학과 교수

<관심분야>
토질역학, 기초공학