

Tchebycheff Metric 기반 가중평균제곱오차 최소화법을 활용한 다중반응표면 최적화

정인준*

¹대구대학교 경영학과

A Weighted Mean Squared Error Approach Based on the Tchebycheff Metric in Multiresponse Optimization

In-Jun Jeong^{1*}

¹Department of Business Administration, Daegu University

요약 다중반응표면 최적화는 다수의 반응변수(품질특성치)를 최적화하는 입력변수의 조건을 찾는 것을 목적으로 한다. 다중반응표면 최적화를 위해 제안된 가중평균제곱오차(Weighted Mean Squared Error, WMSE) 최소화법은 평균제곱오차의 구성요소인 제곱편차와 분산에 서로 다른 가중치를 부여하는 방법이다. 지금까지 WMSE 최소화법과 관련하여, 개별 반응변수의 WMSE를 구성한 후 이들의 가중합을 최소화하는 가중합 기반 WMSE 최소화법이 제안되었다. 그러나 가중합 기반 방법은 목적함수 공간에서 볼록하지 않은 구간이 있고 이 구간에서 가장 선호되는 해가 존재할 경우 이 해를 찾아내지 못한다는 한계를 지니고 있다. 본 논문에서는 기존의 가중합 기반법의 한계점을 극복하기 위하여 Tchebycheff Metric 기반 WMSE 최소화법을 제안하고자 한다.

Abstract Multiresponse optimization (MRO) seeks to find the setting of input variables, which optimizes the multiple responses simultaneously. The approach of weighted mean squared error (WMSE) minimization for MRO imposes a different weight on the squared bias and variance, which are the two components of the mean squared error (MSE). To date, a weighted sum-based method has been proposed for WMSE minimization. On the other hand, this method has a limitation in that it cannot find the most preferred solution located in a nonconvex region in objective function space. This paper proposes a Tchebycheff metric-based method to overcome the limitations of the weighted sum-based method.

Key Words : Multiresponse Optimization, Weighted Mean Squared Error, Tchebycheff Metric, Weighted Sum

1. 서론

품질경영 활동 중 제품과 공정의 설계(품질설계) 과정에서는 다수의 반응변수(품질특성치)를 고려하여야 하는 경우가 대부분이다. 이와 같이 다수의 반응변수를 동시에 고려하여 최적의 입력변수 수준을 찾는 문제를 다중반응표면 문제라고 한다[1]. 다중반응표면 문제는 보통 세 가지 단계를 통하여 해결되는데, (i) 입력변수와 다수

의 반응변수에 대한 데이터 수집, (ii) 입력변수와 각각의 반응변수 간 모형(반응함수) 추정, 그리고 (iii) 추정된 다수의 반응함수의 동시 최적화가 바로 그것이다. 본 논문은 마지막의 최적화 단계에 초점을 맞추고 있다. 식(1)은 다중반응표면 최적화 문제를 보여주고 있다.

$$\begin{aligned} & \text{Optimize } [\hat{y}_1(\mathbf{x}), \hat{y}_2(\mathbf{x}), \dots, \hat{y}_k(\mathbf{x})] \\ & \text{s.t. } \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \quad (1)$$

이 논문은 2012학년도 대구대학교 학술연구비 지원에 의한 논문임.

*Corresponding Author : In-Jun Jeong (Daegu Univ.)

Tel: +82-53-850-6275 email: ijjeong@daegu.ac.kr

Received August 20, 2014 Revised October 13, 2014

Accepted January 8, 2015

식 (1)에서 $\hat{y}_i(\mathbf{x})$ 는 i 번째 반응함수의 추정식($i=1, \dots, k$), \mathbf{x} 는 입력변수 벡터, Ω 는 입력변수의 제약범위를 각각 나타낸다.

지금까지 다중반응표면 최적화를 위한 다양한 방법이 제안되었는데[2], 이들 중 손실함수법(Loss Function Approach)은 다구치(Taguchi)의 이차 손실함수(Quadratic Loss Function)에서 파생된 기법으로[3-5], 반응변수의 평균과 분산을 체계적으로 고려한다는 장점이 있다. 손실함수법은 다수의 반응변수를 처리하는 방식에 따라 다시 단변량(Univariate) 방식과 다변량(Multivariate) 방식으로 세분되는데[6], 본 논문에서는 직관적이고 이해하기 쉬워서 실무자들이 쉽게 활용할 수 있는 단변량 방식에 초점을 맞추고 있다.

단변량 방식은 개별 반응변수에 대하여 평균제곱오차(Mean Squared Error, MSE)를 구한 후, 이들을 종합적으로 고려하여 최소화하는 방법, 즉 MSE최소화법을 취하고 있다[6]. MSE는 제곱편차와 분산으로 구성되는데, 품질관리 목표나 평균-표준편차 간 스케일 보정을 위하여 두 구성요소에 서로 다른 가중치를 부여할 필요가 있다. 이에 따라 최근 MSE 대신 가중평균제곱오차(Weighted MSE, WMSE)를 사용하는 방안이 제안되었다[6].

[6]에 의해 제안된 WMSE 최소화법은 개별 반응변수에 대하여 WMSE를 구성한 후, 이들의 가중합(Weighted Sum)을 최소화하는 것을 목표로 한다. 그러나 가중합 기반 WMSE 최소화법은 WMSE들이 구성하는 목적함수 공간(Objective Space)에서 볼록하지 않은(Nonconvex) 구간이 있고 이 구간에서 가장 선호되는 해가 존재할 경우, 이 해를 찾아내지 못한다는 한계를 지니고 있다. 본 논문에서는 가중합 기반 WMSE 최소화법의 이와 같은 한계점을 극복하기 위하여 Tchebycheff Metric 기반의 WMSE 최소화법을 제안하고자 한다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2장에서는 MSE 및 WMSE 최소화 접근법에 해당하는 기존 문헌을 고찰한다. 3장에서는 Tchebycheff Metric 기반 WMSE 최소화법을 제안한다. 4장에서는 제안된 방법을 활용하여 대표적인 다중반응표면 문제를 풀어보고 기존 가중합 기반 WMSE 최소화법과 비교한다. 마지막으로, 결론을 5장에서 제시한다.

2. 기존문헌 고찰

2.1. MSE 최소화법

MSE 최소화법은 우선 개별 반응변수에 대하여 MSE_i 를 구한다. 반응변수가 명목특성(Nominal-The-Best)을 띄는 경우, MSE_i 는 식 (2)와 같이 정의된다.

$$MSE_i = (\hat{\mu}_i(\mathbf{x}) - T_i)^2 + (\hat{\sigma}_i(\mathbf{x}))^2. \quad (2)$$

식 (2)에서 T_i 는 반응변수의 목표수준을, $\hat{\mu}_i(\mathbf{x})$ 와 $\hat{\sigma}_i(\mathbf{x})$ 는 반응변수의 평균과 표준편차 모형의 추정식을 각각 나타낸다. 이 식에서 $(\hat{\mu}_i(\mathbf{x}) - T_i)^2$ 은 제곱편차(Squared Bias), $(\hat{\sigma}_i(\mathbf{x}))^2$ 은 분산(Variance)을 의미한다. 즉, MSE는 제곱편차와 분산의 합으로 구성된다. 참고로, 명소특성(Smaller-The-Better) 및 명대특성(Larger-The-Better)을 띄는 반응변수의 MSE는 [6]과 [7]에 자세히 설명되어 있다.

다음으로 MSE_i 들을 종합적으로 고려하여 최소화한다(식 (3)).

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } [MSE_1, MSE_2, \dots, MSE_k] \\ & \text{s.t. } \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \quad (3)$$

식 (3)에서 MSE_i 들을 최소화하는 기준, 즉 목적함수(Objective Function)를 어떻게 두느냐에 대하여 다양한 연구가 진행되었다. [7]과 [8]은 목적함수로 MSE_i 들의 가중합(Weighted Sum)을 제안하고 있다. [9]는 MSE_i 들 중 가장 중요한 하나를 선택하여 목적함수로 두고, 나머지는 제약식에 두는 우선순위 기반법(Priority-Based Method)을 제안하고 있다. [10]은 가중합 방법의 약점—목적함수 공간에서 볼록하지 않은 구간에 최적해가 있으면 이를 찾지 못하는 점—을 보완하기 위하여 Tchebycheff Metric 기반의 목적함수를 제안하고 있다. [5]는 가중합 방법의 약점을 보완한 선호도사후제시법(Posterior Preference Articulation Method)을 제안하고 있다. 선호도사후제시법은 많은 수의 비지배해(Nondominated Solutions)를 먼저 도출하고, 그 중에서 하나를 고르는 접근법이다.

2.2 WMSE 최소화법

MSE 최소화법은 기본적으로 제곱편차와 분산이 동일한 가중치가 부여되는 것을 전제로 하고 있다. 그러나 품질관리의 목표(가령, 평균 또는 표준편차 중 하나를 상대적으로 더 강조하는 것을 목표로 설정 가능)에 따라, 또는 평균과 표준편차의 변동범위가 크게 차이가 나는 경우 MSE의 제곱편차와 분산에 서로 다른 가중치를 부여한 WMSE를 사용하여야 한다[6].

WMSE 최소화법은 MSE 최소화법과 마찬가지로 개별 반응변수에 대하여 $WMSE_i$ 를 구한 후, $WMSE_i$ 들을 종합적으로 고려하여 최소화한다. 식 (4)는 망목특성을 띄는 반응변수의 $WMSE_i$ 를, 식 (5)는 WMSE 최소화법의 기본 최적화 모형을 보여주고 있다.

$$WMSE_i = \lambda_i(\hat{\mu}_i(\mathbf{x}) - T_i)^2 + (1 - \lambda_i)(\hat{\sigma}_i(\mathbf{x}))^2. \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } [WMSE_1, WMSE_2, \dots, WMSE_k] \quad (5) \\ & \text{s.t. } \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned}$$

식 (4)에서 λ_i 는 가중치를 나타낸다($0 \leq \lambda_i \leq 1$). 만약 $\lambda_i=0.5$ 로 두고 스케일을 조정하면 식 (4)는 식 (2)의 MSE_i 가 된다.

지금까지 WMSE 최소화법과 관련된 대부분의 연구는 하나의 반응변수를 대상으로 이루어졌다. [11]은 MSE의 제곱편차와 분산에 가중치를 부여해야 한다는 필요성을 최초로 제시하고 있다. [12-15]는 WMSE의 가중치를 결정하는 방법을 연구하였는데, [12]는 데이터 기반법(Data-Driven Method)을, [13-14]는 선호도 기반법(Preference-Based Method)을, [15]는 대화식 결정법(Interactive Weighting Method)을 제안하고 있다.

최근에 들어서 다수의 반응변수를 대상으로 한 WMSE 최소화법 연구가 수행되었다. [6]은 다중반응표면 최적화에 WMSE 최소화법을 적용할 것을 최초로 제안하고 있다. 이들은 식 (5)에서 $WMSE_i$ 들을 최소화하는 기준, 즉 목적함수로 $WMSE_i$ 들의 가중합(Weighted Sum)을 제안하고 있다. 그러나 가중합 기반 WMSE 최소화법은 $WMSE_i$ 들이 구성하는 목적함수 공간에서 볼록하지 않은 구간을 탐색하지 못한다는 한계를 지니고 있다.

3. 제안된 방법: Tchebycheff Metric 기반 WMSE 최소화법

본 장에서는 WMSE 최소화를 위한 목적함수, 즉 식 (5)에서 $WMSE_i$ 들을 최소화하는 기준으로 Tchebycheff Metric을 채택하는 것을 제안한다. 식 (6)은 본 논문에서 제안하는 Tchebycheff Metric 기반의 WMSE 최소화법의 수식을 보여주고 있다.

$$\begin{aligned} & \text{Min } \alpha \\ & \text{s.t. } \alpha \geq w_i(WMSE_i - WMSE_i^0), i = 1, \dots, k, \\ & \sum_{i=1}^k w_i = 1, \\ & \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \quad (6)$$

식 (6)에서 $WMSE_i^0$ 는 $WMSE_i$ 의 이상치를, w_i 는 $WMSE_i$ 와 $WMSE_i^0$ 간의 거리에 대한 가중치를 의미하고, α 는 $w_i(WMSE_i - WMSE_i^0)$ ($i = 1, \dots, k$) 중 최대치를 나타낸다. 즉, 식 (6)은 k 개의 $WMSE_i$ 중 이상치 $WMSE_i^0$ 로부터 떨어진 가중거리가 가장 큰 것을 최소화하는 것을 목표로 하고 있다. 따라서 식 (6)은 다음과 같이 표현할 수도 있다.

$$\begin{aligned} & \text{Min } \text{Max}[w_1(WMSE_1 - WMSE_1^0), \dots, \\ & w_i(WMSE_i - WMSE_i^0), \dots, \\ & w_k(WMSE_k - WMSE_k^0)] \\ & \text{s.t. } \sum_{i=1}^k w_i = 1, \\ & \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \quad (7)$$

식 (6)에서 $WMSE_i^0$ 는 $WMSE_i$ 를 개별적으로 최소화하여 구할 수도 있고 (식 (8)), $WMSE_i$ 의 실현가능성(feasibility)을 고려하지 않는다면 0의 값을 가지는 것이 이상적이기 때문에 0으로 둘 수도 있다.

$$WMSE_i^0 = \text{Min}_{\mathbf{x} \in \Omega} [WMSE_i], i = 1, \dots, k. \quad (8)$$

제안된 방법에서와 같이 Tchebycheff Metric으로 목적함수를 구성할 경우, 볼록하지 않은 목적함수 공간을 놓치지 않고 해를 찾아낼 수 있다[16]. 즉, 제안된

Tchebycheff Metric 기반 WMSE 최소화법은 기존의 가중합 기반 WMSE 최소화법[6]의 한계점을 극복할 수 있다.

한편, 식 (6)은 α 를 최소화하는 과정에서 k 개의 $w_i(WMSE_i - WMSE_i^0)$ 중 결과적으로 하나만 관련되기 때문에 나머지 $(k-1)$ 개는 최적이지 아닌 상태, 즉 약한 비지배해(Weakly Nondominated Solution)를 도출할 가능성이 있다. 이는 식 (7)도 마찬가지이다. 만약 $(k-1)$ 개의 $w_i(WMSE_i - WMSE_i^0)$ 도 최적의 값을 가지게 하려면 식 (6)-(7)의 목적함수를 $WMSE_i$ 들의 합에 매우 작은 값을 곱한 항을 추가한 식 (9)-(10)과 같이 수정하면 된다[16].

$$\alpha + \epsilon \sum_{i=1}^k WMSE_i \quad (9)$$

$$\begin{aligned} &Max[w_1(WMSE_1 - WMSE_1^0), \dots, \\ &w_i(WMSE_i - WMSE_i^0), \dots, \\ &w_k(WMSE_k - WMSE_k^0)] + \epsilon \sum_{i=1}^k WMSE_i \end{aligned} \quad (10)$$

식 (9)-(10)에서 ϵ 는 매우 작은 양의 값을 나타낸다. 식 (9)-(10)와 같이 수정된 목적함수를 Augmented Tchebycheff Metric이라고 부른다. 참고로, 약한 비지배적해가 도출되지 않도록 하기 위해 Lexicographic Tchebycheff Metric을 적용해도 된다[16].

4. 예제: 하중변환기 탄성요소 설계 문제

본 장에서는 제안된 Tchebycheff Metric 기반 WMSE 최소화법을 활용하여 "하중변환기의 탄성요소 설계 (Design of the Elastic Element of a Force Transducer)" 문제[17]를 예로써 풀어보고자 한다. 특히, 본 장의 후반부에서는 이 예제를 통하여 제안된 방법과 [6]의 가중합 기반 WMSE 최소화법(이하, 가중합 기반법)을 비교한다.

4.1 예제 설명

이 문제는 하중변환기의 부정확성(반응변수)을 최소화하기 위하여 최적의 탄성요소(입력변수) 수준을 찾는 것을 목표로 하고 있다. 반응변수는 비선형성

(Non-Linearity, y_1)과 이력현상(hysteresis, y_2) 등 2개로, y_1 은 목표수준(T_1)이 1인 망목특성을, y_2 는 망소특성을 띤다. 입력변수는 로렌즈 각도(Lozenge Angle, x_1), 내부 지름(Bore Diameter, x_2), 수직부분의 절반길이(Half-Length of the Vertical Segment, x_3) 등 3개이다. 실험은 중심복합설계로 계획되어 총 25회의 실험이 실시되었다. 실험으로부터 확보된 데이터를 활용하여 최종적으로 y_1, y_2 의 평균, 표준편차 모형은 식 (11)-(14)와 같이 도출되었다. 본 문제에 대한 자세한 설명과 평균, 표준편차 모형이 도출되는 과정은 [6-7], [17]을 참조하면 된다.

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_1(\mathbf{x}) = &1.38 - 0.361x_1 - 0.155x_2 \\ &+ 0.0771x_3 - 0.148x_1x_2 + 0.0218x_1x_3 \\ &+ 0.0130x_2x_3 + 0.0481x_1^2, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_2(\mathbf{x}) = &1.64 + 0.592x_1 + 0.438x_2 \\ &- 0.095x_3 + 0.301x_1x_2 - 0.143x_1x_3 \\ &+ 0.201x_1^2 - 0.0844x_1x_2x_3, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_1^2(\mathbf{x}) = &(-0.0588 + 0.01x_1)^2\sigma_{z_1}^2 \\ &+ (-0.0116)^2\sigma_{z_2}^2 + s_1^2, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\hat{\sigma}_1^2(\mathbf{x}) = (0.0794)^2\sigma_{z_1}^2 + s_2^2. \quad (14)$$

4.2 제안된 방법을 활용한 문제 풀이

제안된 방법을 적용하기 위해서는 우선 y_1, y_2 각각에 대한 $WMSE_1$ 과 $WMSE_2$ 를 구성하여야 한다. 이는 λ_1, λ_2 를 결정하여야 함을 의미한다. 앞서 2.2절에서 언급한 바와 같이 WMSE의 가중치를 결정하기 위하여 [12]의 데이터 기반법, [13-14]의 선호도 기반법, [15]의 대화식 결정법 등을 활용할 수 있다.

본 논문에서는 [6]이 데이터 기반법을 통해 도출한 $\lambda_1 = 0.69, \lambda_2 = 0.07$ 을 그대로 활용하고자 한다. 이는 4.3절에서 제안된 방법과 [6]의 가중합 기반법을 동일한 조건 하에서 비교하기 위해서이다. 가중치 λ_1, λ_2 를 도출하는 과정은 [6]을 참조하면 된다.

다음으로 도출된 $\lambda_1 = 0.69, \lambda_2 = 0.07$ 을 활용하여 $WMSE_1$ 과 $WMSE_2$ 를 식 (15)-(16)과 같이 구성한 후, Tchebycheff Metric 기반 최적화 모형을 식 (17)과 같이 구축하여 푼다. 본 논문에서는 식 (17)을 구축할 때

$WMSE_1$ 과 $WMSE_2$ 의 이상치인 $WMSE_1^0$ 와 $WMSE_2^0$ 는 각각 0으로 두었고, 약한 비지배배의 도출가능성을 배제하기 위하여 목적함수를 식 (9)와 같이 수정하였다.

$$\begin{aligned} WMSE_1 &= \lambda_1(\hat{\mu}_1(\mathbf{x}) - T_1)^2 + (1 - \lambda_1)(\hat{\sigma}_1(\mathbf{x}))^2 \\ &= 0.69(\hat{\mu}_1(\mathbf{x}) - 1)^2 + 0.31(\hat{\sigma}_1(\mathbf{x}))^2. \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} WMSE_2 &= \lambda_2(\hat{\mu}_2(\mathbf{x}))^2 + (1 - \lambda_2)(\hat{\sigma}_2(\mathbf{x}))^2 \\ &= 0.07(\hat{\mu}_2(\mathbf{x}))^2 + 0.93(\hat{\sigma}_2(\mathbf{x}))^2. \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \text{Min } & \alpha + \epsilon(WMSE_1 + WMSE_2) \\ \text{s.t. } & \alpha \geq w_1 WMSE_1, \\ & \alpha \geq w_2 WMSE_2, \\ & w_1 + w_2 = 1, \\ & \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \quad (17)$$

식 (17)에서 w_1 과 w_2 는 y_1 , y_2 의 품질 및 비용에 관한 다양한 요소를 고려하여 결정되어야 하나, 본 논문에서는 문제에 대한 추가적인 정보가 없기 때문에 $w_1=0.25$, $w_2=0.75$ 로 가정하였다. 이러한 가정 하에서 식 (17)을 풀

결과, $\mathbf{x}^*=(0.2817, -1.6820, -0.0572)$ 로 도출되었고, 그에 따라 $(\hat{\mu}_1^*, \hat{\sigma}_1^*)=(1.6094, 0.0599)$, $(\hat{\mu}_2^*, \hat{\sigma}_2^*)=(0.9488, 0.1565)$, $WMSE_1^*=0.2574$, $WMSE_2^*=0.0858$ 로 나타났다.

4.3 가중합 기반 WMSE 최소화법과의 비교

앞서 제안된 방법으로부터 도출된 해를 가중합 기반 방법으로도 찾아낼 수 있는지 분석해 보았다. 이를 위하여 식 (15)-(17)의 $WMSE_1$ 과 $WMSE_2$ 를 가지고 가중합 기반 최적화 모형을 식 (18)과 같이 구축하여 풀어보았다.

$$\begin{aligned} \text{Min } & w_1 WMSE_1 + w_2 WMSE_2 \\ \text{s.t. } & w_1 + w_2 = 1, \\ & \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \quad (18)$$

식 (18)에서 w_1 과 w_2 는 식 (17)과는 다른 형태의 최적화 모형이기 때문에 식 (17)에서 사용된 $w_1=0.25$, $w_2=0.75$ 를 동일하게 사용할 수는 없다. 따라서 사전에 모의 실험을 거쳐 유사한 결과를 도출할 것으로 예상되는 가

[Table 1] Results of the Weighted Sum-Based WMSE Minimization for $w_1 \in [0.1, 0.3]$ in the Illustrative Example

(w_1, w_2)	$\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$	$(\hat{\mu}_1^*, \hat{\sigma}_1^*)$	$(\hat{\mu}_2^*, \hat{\sigma}_2^*)$	$WMSE_1^*$	$WMSE_2^*$
(0.10, 0.90)	(-0.0032, -1.6820, 1.6820)	(1.7339, 0.0626)	(0.7432, 0.1549)	0.3728	0.0610
(0.11, 0.89)	(0.0110, -1.6820, 1.6820)	(1.7328, 0.0625)	(0.7444, 0.1549)	0.3717	0.0611
(0.12, 0.88)	(0.0249, -1.6820, 1.6820)	(1.7318, 0.0624)	(0.7457, 0.1549)	0.3707	0.0613
(0.13, 0.87)	(0.0386, -1.6820, 1.6820)	(1.7308, 0.0622)	(0.7470, 0.1549)	0.3697	0.0614
(0.14, 0.86)	(0.0521, -1.6820, 1.6820)	(1.7298, 0.0621)	(0.7484, 0.1550)	0.3687	0.0615
(0.15, 0.85)	(0.0661, -1.6820, 1.6533)	(1.7272, 0.0620)	(0.7527, 0.1550)	0.3661	0.0620
(0.16, 0.84)	(0.0857, -1.6820, 1.2585)	(1.7033, 0.0618)	(0.7924, 0.1551)	0.3425	0.0663
(0.17, 0.83)	(0.1050, -1.6820, 0.8883)	(1.6806, 0.0616)	(0.8300, 0.1551)	0.3208	0.0706
(0.18, 0.82)	(0.1259, -1.6820, 0.0600)	(1.6308, 0.0614)	(0.9116, 0.1552)	0.2758	0.0806
(0.19, 0.81)	(0.1412, -1.6820, 0.0433)	(1.6284, 0.0613)	(0.9153, 0.1553)	0.2736	0.0811
(0.20, 0.80)	(0.1565, -1.6820, 0.0262)	(1.6259, 0.0611)	(0.9191, 0.1554)	0.2715	0.0816
(0.21, 0.79)	(0.1717, -1.6820, 0.0087)	(1.6234, 0.0610)	(0.9231, 0.1555)	0.2693	0.0821
(0.22, 0.78)	(0.1890, -1.6820, -0.7675)	(1.5757, 0.0608)	(0.9997, 0.1556)	0.2298	0.0925
(0.23, 0.77)	(0.2033, -1.6820, -1.0564)	(1.5569, 0.0607)	(1.0296, 0.1558)	0.2151	0.0968
(0.24, 0.76)	(0.2167, -1.6820, -1.3253)	(1.5392, 0.0606)	(1.0575, 0.1559)	0.2018	0.1009
(0.25, 0.75)	(0.2299, -1.6820, -1.5903)	(1.5217, 0.0604)	(1.0851, 0.1560)	0.1889	0.1051
(0.26, 0.74)	(0.2443, -1.6820, -1.6820)	(1.5143, 0.0603)	(1.0964, 0.1561)	0.1837	0.1068
(0.27, 0.73)	(0.2594, -1.6820, -1.6820)	(1.5125, 0.0602)	(1.0993, 0.1563)	0.1823	0.1073
(0.28, 0.72)	(0.2737, -1.6820, -1.6820)	(1.5107, 0.0600)	(1.1021, 0.1564)	0.1811	0.1078
(0.29, 0.71)	(0.2885, -1.6820, -1.6820)	(1.5089, 0.0599)	(1.1050, 0.1566)	0.1798	0.1083
(0.30, 0.70)	(0.3031, -1.6820, -1.6820)	(1.5071, 0.0597)	(1.1081, 0.1568)	0.1786	0.1088

중치 조합 21개 — w_1 기준으로 0.1에서 0.3까지 0.01씩 변화시킨 21개의 가중치 조합 — 에 대하여 식 (18)을 풀어보았다. 21개의 가중치 조합으로부터 얻어진 최적화 결과를 Table 1에 주어져 있다.

Table 1의 최적화 결과를 살펴보면, 앞서 4.2절에서 제안된 방법으로부터 도출된 최종해에 가장 근접한 해는 $w_1=0.21, w_2=0.79$ 일 때의 $\mathbf{x}^*=(0.1717, -1.6820, 0.0087)$, $(\hat{\mu}_1^*, \hat{\sigma}_1^*)=(1.6234, 0.0610)$, $(\hat{\mu}_2^*, \hat{\sigma}_2^*)=(0.9231, 0.1555)$, $WMSE_1^*=0.2693$, $WMSE_2^*=0.0821$ 와, $w_1=0.22, w_2=0.78$ 일 때의 $\mathbf{x}^*=(0.1890, -1.6820, -0.7675)$, $(\hat{\mu}_1^*, \hat{\sigma}_1^*)=(1.5757, 0.0608)$, $(\hat{\mu}_2^*, \hat{\sigma}_2^*)=(0.9997, 0.1556)$, $WMSE_1^*=0.2298$, $WMSE_2^*=0.0925$ 가 있다. 그러나 이들 2개의 해가 제안된 방법의 결과와 상당한 차이(특히, $WMSE_1^*$ 와 $WMSE_2^*$ 의 측면에서)가 있음을 알 수 있다.

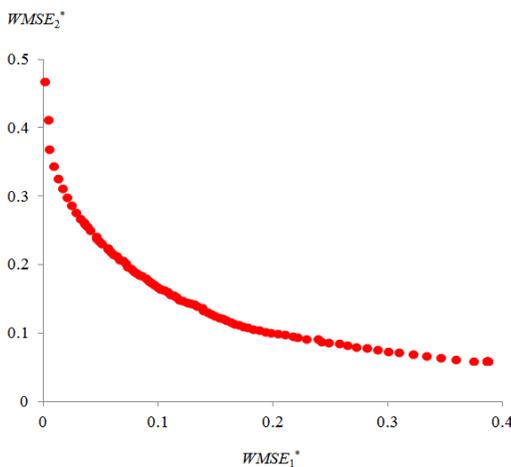
문제 상황을 보다 직관적으로 살펴보기 위하여 다양한 w_1, w_2 조합에 대하여 제안된 방법과 가중합 기반법 으로부터 각각 도출할 수 있는 해의 분포를 그림으로 표현해 보았다. 구체적으로, w_1 기준으로 0에서 1까지 0.01씩 변화시킨 101개의 가중치 조합에 대하여 식 (16)의 제안된 방법과 식 (18)의 가중합 기반법으로 풀어보았다. Fig. 1과 Fig. 2는 제안된 방법과 가중합 기반법 각각으로

부터 도출된 101개의 해를 2차원의 $(WMSE_1^*, WMSE_2^*)$ 목적함수 공간에 표시한 결과를 보여주고 있다.

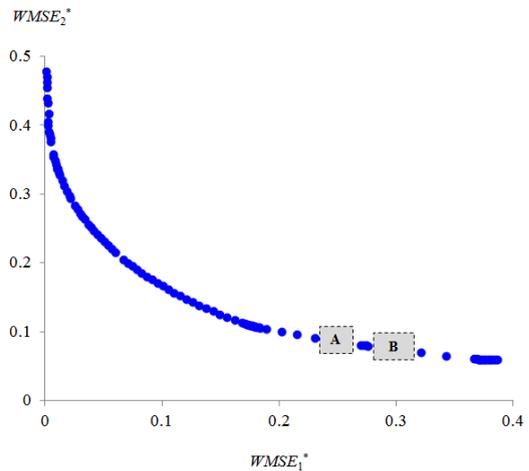
Fig. 1에서는 $(WMSE_1^*, WMSE_2^*)$ 목적함수 공간에서 존재가능한 최적해를 모두 찾아내는 반면, Fig. 2에서는 일부 구간에서 존재가능한 최적해를 찾지 못하고 있다. 즉, Fig. 2에서 A, B 영역은 불록하지 않은 구간을 나타내고 있는데, 가중합 기반법은 A, B 영역에 존재하는 최적해를 발견하지 못하지만, 제안된 방법은 이를 발견한다. 이는 A 또는 B 영역에 진정한(True) 최적해가 있다면 제안된 방법은 찾아낼 수 있으나, 가중합 기반법은 찾아낼 수 없음을 의미한다. 참고로 앞서 4.2절에서 $w_1=0.25, w_2=0.75$ 로부터 도출된 결과 $WMSE_1^*=0.2574$, $WMSE_2^*=0.0858$ 는 A 영역에 위치하고 있다.

5. 토의: 타 방법과의 비교

본 장에서는 제안된 Tchebycheff Metric 기반 WMSE 최소화법을 기존의 타 방법과 비교하고자 한다. 다중반응표면 최적화를 위한 WMSE 최소화법은 최근에 관심의 대상으로 부각되어, 관련 연구가 많지 않다. 앞서 2.2절에서 언급한 바와 같이 가중합 기반 WMSE 최소화법 [6]만이 직접적으로 관련된 연구이다. WMSE 최소화법 관련 연구는 아니지만 2.1절에서 언급한 기존의 MSE 최



[Fig. 1] Results of the Tchebycheff Metric-Based WMSE Minimization for $w_1 \in [0, 1]$ in the Illustrative Example



[Fig. 2] Results of the Weighted Sum-Based WMSE Minimization for $w_1 \in [0, 1]$ in the Illustrative Example

[Table 2] Comparisons of the Proposed Method and Other Methods

Criteria	Proposed Method (Tchebycheff Metric- Based Method)	Priority-Based Method	Weighted Sum Method	Posterior Preference Articulation Method
Is it possible to find a nonconvex solution?	Possible	Possible	Impossible	Possible
Does it consider a decision maker's preference information?	Well	Scarcely	Well	Absolutely Well
Does it impose a cognitive burden to a decision maker?	A Little	Scarcely	A Little	Pretty Much
Does it have a computational load?	Scarcely	Scarcely	Scarcely	Pretty Much

소화법 관련 연구, 즉 우선순위 기반법[9]과 선호도사후 제시법[5]도 일정한 수정을 통하여 WMSE 최소화법에 적용가능하므로, 제안된 방법과 비교하고자 한다. 즉, 본 장에서는 제안된 방법과 우선순위 기반법, 가중합 기반법, 선호도사후제시법을 비교한다. 비교 기준으로는 (i) 불록하지 않은 구간에서의 해 발견 여부, (ii) 의사결정자의 선호도 정보의 충실한 고려, (iii) 의사결정자의 인지적 부담 수준, (iv) 계산 부담 등의 4가지를 고려한다.

먼저 첫 번째 기준인 ‘불록하지 않은 구간에서의 해 발견 여부’ 측면에서 비교해 보면, 제안된 방법, 우선순위 기반법, 선호도사후제시법은 불록하지 않은 구간에서 해를 발견할 수 있으나, 가중합 기반법은 발견할 수 없다. 왜냐하면 앞선 세 방법은 목적함수 공간에서 목적함수가 불록하지 않은 구간 속까지 탐색할 수 있으나, 가중합 기반법은 그 구간을 탐색하지 못하고 넘어가기 때문이다.

다음으로 ‘의사결정자의 선호도 정보의 충실한 고려’ 측면에서, 선호도사후제시법이 의사결정자의 선호도 정보를 가장 충실하게 고려할 수 있고, 다음으로 제안된 방법과 가중합 기반법이 잘 고려할 수 있다. 반면, 우선순위 기반법은 의사결정자의 선호도 정보를 충실히 고려하지 못한다. 선호도사후제시법은 많은 수의 비지배적해를 먼저 도출한 후, 의사결정자가 이들 해를 탐색·비교하여 자신이 가장 선호하는 해를 선택할 수 있기 때문에 의사결정자의 선호도 정보를 가장 충실히 고려할 수 있다. 제안된 방법과 가중합 기반법은 $WMSE_i$ 를 종합할 때 부여하는 가중치(w_i)를 활용하여 의사결정자의 선호도 정보를 고려할 수 있다. 그러나 우선순위 기반법은 하나의 목적함수를 제외한 나머지 목적함수는 제약식에 두기 때문에 의사결정자의 선호도 정보를 고려하기 어렵다.

세 번째 기준인 ‘의사결정자의 인지적 부담 수준’은 두 번째 기준의 역순으로 평가할 수 있다. 의사결정자의 선

호도 정보를 충실히 고려하기 위해서는 그 만큼 의사결정자의 참여 및 정보제공 수준도 높아야 되기 때문이다. 따라서 우선순위 기반법이 의사결정자의 인지적 부담 수준이 가장 낮다. 제안된 방법과 가중합 기반법은 가중치 결정에 따른 인지적 부담이 있는 편이다. 선호도사후제시법은 수많은 비지배적해 중에서 하나의 해를 선택해야 하는 인지적 부담이 매우 크다.

마지막으로 ‘계산 부담’ 측면에서는 제안된 방법, 우선순위 기반법, 가중합 기반법은 1회의 계산만 필요하여 계산 부담이 낮지만, 선호도사후제시법은 많은 수의 비지배적해를 찾아내야 하므로, 그 만큼 많은 계산이 필요하다. 즉 계산 부담이 매우 크다. 이상 4가지 방법에 대한 비교 결과는 Table 2에 정리되어 있다.

6. 결론

본 논문에서는 다중반응표면 최적화를 위하여 Tchebycheff Metric 기반 WMSE 최소화법을 제안하였다. WMSE 최소화법은 다중반응표면 최적화에 있어서 제곱편차와 분산에 동일한 가중치를 부여하는 MSE 최소화법의 관행을 탈피하여, 제곱편차와 분산에 서로 다른 가중치를 부여하는 것을 허용한다. 지금까지 WMSE 최소화법과 관련하여 개별 반응변수의 WMSE를 구성한 후, 이들의 가중합을 최소화하는 가중합 기반 WMSE 최소화법이 제안되었다. 그러나 가중합 기반법은 불록하지 않은 목적함수 공간에서 가장 선호되는 해를 찾아내지 못할 수 있다는 한계를 지니고 있다. 제안된 방법은 이러한 가중합 기반 WMSE 최소화법의 한계점을 효과적으로 극복할 수 있다.

향후 연구주제로 식 (6)의 Tchebycheff Metric 모형에

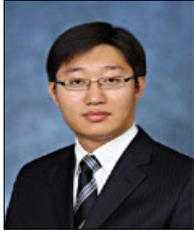
서 개별 반응변수(즉, $WMSE_i$)에 대한 가중치(w_i)를 어떻게 결정할 것인가를 들 수 있다. 가중치는 의사결정자가 자신의 선호도(Preference)에 따라 결정하는데, 다수의 반응변수를 적절히 절충(Compromise)하는 역할을 하게 된다. 일반적으로, 의사결정자가 진정한 최적해가 될 수 있는 다양한 후보 해들을 보지 않고 가중치를 사전에 결정하는 것은 매우 어렵다. 이러한 측면에서 선호도사후제시법을 WMSE 최소화를 위해 적용해 보는 것을 검토할 필요가 있다. 선호도사후제시법은 후보가 될 수 있는 많은 수의 비지배해를 먼저 도출한 후, 의사결정자가 그 중에서 하나를 고르는 방식이다. 이 방식의 장점은 의사결정자가 다양한 해를 미리 접해봄으로써 자신의 선호도에 보다 정밀하게 부합하는 가장 만족스러운 절충해를 선택할 수 있다는 것이다. 여기서 가장 만족스러운 절충해를 선택하는 과정이 바로 가중치를 결정하는 것을 의미한다.

References

- [1] Khuri, A. I., "Multiresponse Surface Methodology", In Handbook of Statistics: Design and Analysis of Experiment (Vol. 13) (eds. A. Ghosh and C. R. Rao), pp. 377-406, 1996.
- [2] Jeong, I. "Multiresponse Optimization: A Literature Review and Research Opportunities", Journal of the Korean Society for Quality Management, Vol. 39, No. 3, pp. 377-390, 2011.
- [3] Taguchi, G. and Wu, Y., "Off-line Quality Control", Central Japan Quality Control Association (available from American Supplier Institute, Dearborn, MI), 1979.
- [4] Ross, P. J., Taguchi Techniques for Quality Engineering, McGraw-Hill Book Company, San Francisco, CA, 1988.
- [5] Köksoy, O., "Multiresponse Robust Design: Mean Square Error (MSE) Criterion", Applied Mathematics and Computation, Vol. 175, No. 2, pp. 1716-1729, 2006. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2005.09.016>
- [6] Jeong, I. and Cho, H., "A Weighted Mean Squared Error Approach to Multiple Response Surface Optimization", Journal of The Korea Academia-Industrial Cooperation Society, Vol. 14, No. 2, pp. 625-633, 2013. DOI: <http://dx.doi.org/10.5762/KAIS.2013.14.2.625>
- [7] Köksoy, O. and Yalcinoz, T., "Mean Square Error Criteria to Multiresponse Process Optimization by a New Genetic Algorithm", Applied Mathematics and Computation, Vol. 175, No. 2, pp. 1657-1674, 2006. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2005.09.011>
- [8] Rheem, S. and Lee, W. "Multiresponse Optimization in Response Surface Analysis: A Method by Minimization of Weighted Sum of Estimates of Expected Squared Relative Errors", Journal of the Korean Society for Quality Management, Vol. 33, No. 1, pp. 73-82, 2004.
- [9] Köksoy, O., "A Nonlinear Programming Solution to Robust Multi-Response Quality Problem", Applied Mathematics and Computation, Vol. 196, No. 2, pp. 603-612, 2008. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2007.06.023>
- [10] Shin, S., Samanlıoğlu, F., Cho, B. B., and Wiecek, M. M., "Computing Trade-Offs in Robust Design: Perspectives of the Mean Squared Error", Computers and Industrial Engineering, Vol. 60, No. 2, pp. 248-255, 2011. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cie.2010.11.006>
- [11] Lin, D. and Tu, W., "Dual Response Surface Optimization", Journal of Quality Technology, Vol. 27, No. 1, pp. 34-39, 1995.
- [12] Ding, R., Lin, D. K. J., and Wei, D., "Dual Response Surface Optimization: A Weighted MSE Approach", Quality Engineering, Vol. 16, No. 3, pp. 377-385, 2004. DOI: <http://dx.doi.org/10.1081/QEN-120027940>
- [13] Jeong, I., Kim, K., and Chang, S. Y., "Optimal Weighting of Bias and Variance in Dual Response Surface Optimization", Journal of Quality Technology, Vol. 37, No. 3, pp. 236-247, 2005.
- [14] Jeong, I., Kim, K., and Lin, D., "Bayesian Analysis for Weighted Mean Squared Error in Dual Response Surface Optimization," Quality and Reliability Engineering International, Vol. 26, No. 5, pp. 417-430, 2010. DOI: <http://dx.doi.org/10.1002/qre.1058>
- [15] Lee, D. and Kim, K., "Interactive Weighting of Bias and Variance in Dual Response Surface Optimization", Expert Systems with Applications, Vol. 39, No. 5, pp. 5900-5906, 2012. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.eswa.2011.11.114>
- [16] Steuer, R. E., Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application, John Wiley & Sons, New York, NY, 1986.
- [17] Romano, D., Varetto, M., and Vicario, G., "Multiresponse Robust Design: A General Framework Based on Combined Array", Journal of Quality Technology, Vol. 36, No. 1, pp. 27-37, 2004.

정 인 준(In-Jun Jeong)

[정회원]



- 2006년 2월 : 포항공과대학교 산업 경영공학과 (공학박사)
- 2006년 2월 ~ 2010년 4월 : 한국 전자통신연구원 선임연구원
- 2010년 5월 ~ 2012년 2월 : 정보 통신정책연구원 부연구위원
- 2012년 3월 ~ 현재 : 대구대학교 경영학과 조교수

<관심분야>

품질경영/공학, 생산운영관리, 통신전과정체