

## 불균일 단면을 갖는 단순지지 보의 모달해석 및 실험

김인우<sup>1</sup>, 유봉조<sup>2\*</sup>, 김영식<sup>2</sup>  
<sup>1</sup>국방과학연구소, <sup>2</sup>한밭대학교 기계공학과

### Modal Analysis and Experiment of a Simply-supported Beam with Non-uniform Cross Sections

In-Woo Kim<sup>1</sup>, Bong-Jo Ryu<sup>2\*</sup>, Youngshik Kim<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Agency for Defense Development

<sup>2</sup>Department of Mechanical Engineering, Hanbat National University

**요약** 기계, 건축, 토목공학 분야 등에는 불균일 단면을 갖는 보 형태의 구조물들이 널리 사용되고 있다. 본 논문은 양단이 단순 지지된 보 구조물들의 동특성과 진동에 대한 문제를 다루며, 국부좌표를 사용한 지배방정식이 유도된다. 갤러킨의 모드합 방법으로 해가 가정되고, 고유진동수를 구하는 행렬식을 푸는 데는 이분법을 적용하였다. 유한요소법이 단지 기하학적 경계조건만을 만족시키는 허용함수를 사용하는 반면, 본 논문에서는 갤러킨의 모드합 방법을 적용하여, 지배방정식과 경계조건을 모두 만족하는 고유함수를 사용하였다. 계의 동특성을 알기위해, 네 종류의 불균일 단면을 갖는 단순 지지 보에 대해 모달 해석과 시험이 수행되었으며, 해석 결과는 실험 결과와 근사한 일치성을 나타내었다.

**Abstract** Beam-type structures with non-uniform cross sections are widely used in mechanical, architectural, and civil engineering fields. This paper deals with dynamic characteristics and vibration problems. Governing equations are first derived by using local coordinates. Their solutions are then assumed by using Galerkin's mode summation method. Bisection method is also applied in solving the determinant of the matrix which can provide natural frequencies. Whereas finite element methods adopt admissible functions satisfying only geometric boundary condition, in this study we apply Galerkin's mode summation method which uses eigen-functions satisfying both governing equations and boundary conditions. Modal analysis and experimental tests are finally performed using simply-supported beams with four different non-uniform cross-sections. Our analytical results then show good agreement with experimental ones.

**Keywords** : Galerkin's mode summation method, Modal analysis and experiment, Mode shape, Natural frequency, Non-uniform cross section, Simply-supported beam

### 1. 서론

기계, 토목, 건축, 항공공학 등의 구조물에서 불균일 단면을 갖는 보 구조물이 전체 구조물을 이루는 부분 구조물로서 많이 이용되고 있다. 이는 때에 따라 균일단면을 갖는 보 구조물보다 더 좋은 강도나 하중분포를 가질 수도 있고, 특별한 건축이나 기능적인 요구를 만족시킬 수도 있기 때문이다. 따라서 다양한 특성을 갖는 보의 굽힘진동 문제는 공학의 제 분야에서 널리 사용되어 왔다.

불균일 단면 보의 지배적인 특성 미분방정식의 계수들이 변수적이기 때문에 균일 단면보의 진동문제에 비해 소수의 해석적 논문들이 주를 이루어 왔다[1-2]. Klein[3]은 불균일 단면 보의 횡진동 문제를 유한요소법과 Rayleigh-Ritz 방법으로 연구하였고, Gupta[4]는 축 방향을 따라 변단면을 지닌 테이퍼진 보의 진동문제를 형상요소를 포함하는 단순한 함수를 이용하여 해석하였다. Lee 등[5]도 테이퍼진 보의 고유진동수를 해석적으로 구하였으며, Lee 등[6]은 사하중을 받는 다양한 경계조건

\*Corresponding Author : Bong-Jo Ryu(Hanbat National University)

Tel: +82-42-821-1159 email: bjryu701@hanabat.ac.kr

Received October 20, 2015

Revised November 20, 2015

Accepted December 4, 2015

Published December 31, 2015

의 보에 대한 고유진동수와 고유 모드들을 구하였는데, 수치적분은 개선된 Euler Method를 사용하였다. Kang 등[7]은 곡선보의 회전관성과 전단변형을 고려한 평면내 자유진동을 해석하는데 미분구적법을 이용하여 고유진동수를 계산하였으며, DQM의 결과를 엄밀해와 Rayleigh-Ritz, FEM 결과와 비교하였다. 이러한 연구는 계속되어 Lu 등[8]은 복합요소들로 구성된 다단인 보의 진동해석을 하였고, Kim 등[9]은 복합재료 H형 단면 보의 자유진동 해석을 하였으며, Lee 등[10]은 일정 표면적 변단면 보의 자유진동문제를 해석적으로 다루었다. 최근 Lee 등[11]은 길이를 따라 선형적으로 감소되는 폭을 가지는 테이퍼진 보의 굽힘진동에 관해 전달행렬법을 이용하여 연구하였다. 그러나 이제까지의 연구들은 다양한 불균일 단면보에 대한 진동 연구들이 이루어져왔지만, 해석적인 연구들이 주를 이루었다. 따라서, 본 논문에서는 불균일 단면을 갖는 단순 지지 보 모델에 대해 국부좌표를 이용하여 지배방정식을 유도하고, 지배방정식과 경계조건을 모두 만족시키는 고유함수를 이용하는 갤러킨의 모드합 방법에 의한 수치해석과 모달시험을 통해 본 논문의 수치해의 타당성을 검토하고자 한다.

## 2. 본론

### 2.1 지배방정식

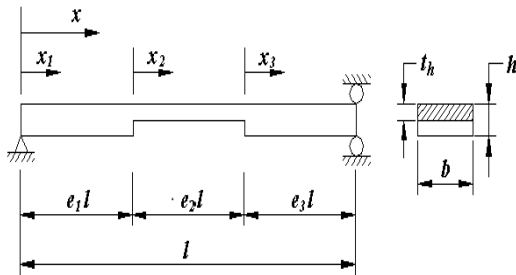


Fig. 1. A non-uniform simply-supported beam model.

불균일 단면보의 모드 해석을 위하여 Fig. 1과 같이 보의 중간에 홈이 파인 보 모델을 설정하였다. Fig. 1 모델에서  $l$ 은 보의 전체 길이,  $x$ 는 종방향 좌표,  $x_1, x_2, x_3$ 는 종방향 국부좌표(local coordinate),  $e_1l, e_2l, e_3l$ 은 각각 보의 좌단으로부터 첫 번째 불연속 단까지의 길이, 첫

번째 불연속 단으로부터 두 번째 불연속 단까지의 길이, 그리고 두 번째 불연속 단으로부터 보의 우측 단까지의 길이를 나타낸다. 또한,  $h$ 와  $b$ 는 각각 보의 횡단면의 두께와 폭을 나타내며,  $t_k$ 는 불연속 단의 두께를 표시한다.

Fig. 1 모델에 대한 지배방정식은 식 (1)과 같으며, 식 (1)에서  $E$ 는 영률(Young's modulus),  $I$ 는 단면의 2차 모멘트,  $m$ 은 보의 단위길이당 질량,  $y$ 는 횡방향 좌표를 나타내며, 하첨자  $k$ 는 단면이 변하는 보 요소의 순서를 표시한다[12]. 즉,  $EI_1 = EI$ ,  $EI_2 = \gamma^3 EI$ ,  $EI_3 = EI$ ,  $m_1 = m$ ,  $m_2 = \gamma m$ ,  $m_3 = m$ 이며,  $\gamma = t_h/h$ 로 나타낸다.

$$EI_k \frac{\partial^4 y_k(x_k, t)}{\partial x^4} + m_k \frac{\partial^2 y_k(x_k, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

식 (1)의 해는 모드 합 방법에 의해 식 (2)와 같이 가정할 수 있고, 조화 진동하는 경우  $q_n(t) = e^{i\omega_n t}$ 로 가정할 수 있다.

$$y_k(x_k, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_{n,k}(x_k) q_n(t) \quad (2)$$

식 (2)에서  $\phi_{n,k}(x_k)$ 는 고유함수(eigen-function),  $q_n(t)$ 는 일반화된 좌표(generalized coordinate)를 표시한다. 이제  $\xi = x/l$ 의 무차원 변수를 도입하고, 식 (2)를 식 (1)에 대입하면 식 (3)의 과정을 거쳐 최종적으로 식 (4)를 얻게 된다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{EI_k}{m_k l^4} \phi_{n,k}^{(4)}(\xi_k) - \omega_n^2 \phi_{n,k}(\xi_k) \right] e^{i\omega_n t} = 0 \quad (3)$$

$$\phi_{n,k}^{(4)}(\xi_k) - \frac{m_k l^4}{EI_k} \omega_n^2 \phi_{n,k}(\xi_k) = 0 \quad (4)$$

식 (3)과 (4)에서 (')은  $\xi$ 에 대한 미분을 의미한다. 균일 단면보의 고유치 식  $\beta_n^4 = (m l^4 / EI) \omega_n^2$ 과 비교하면 불연속 단면 보의 고유치 관계식은 다음과 같다.

$$\beta_{n,1}^4 = \beta_{n,3}^4 = \frac{m l^4}{EI} \omega_n^2 = \beta_n^4, \beta_{n,2}^4 = \frac{m l^4}{\gamma^2 EI} \omega_n^2 = \left( \frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} \right)^4 \quad (5)$$

따라서 고유함수  $\phi_{n,i}(\xi_i)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\phi_{n,1}(\xi_1) = C_{n,1,1} \sin \beta_n \xi_1 + C_{n,1,2} \cos \beta_n \xi_1 + C_{n,1,3} \sinh \beta_n \xi_1 + C_{n,1,4} \cosh \beta_n \xi_1, \quad 0 \leq \xi_1 \leq e_1 \quad (6)$$

$$\phi_{n,2}(\xi_2) = C_{n,2,1} \sin \frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} \xi_2 + C_{n,2,2} \cos \frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} \xi_2 + C_{n,2,3} \sinh \frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} \xi_2 + C_{n,2,4} \cosh \frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} \xi_2, \quad 0 \leq \xi_2 \leq e_2 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \phi_{n,3}(\xi_3) &= C_{n,3,1}\sin\beta_n\xi_3 + C_{n,3,2}\cos\beta_n\xi_3 \\ &+ C_{n,3,3}\sinh\beta_n\xi_3 + C_{n,3,4}\cosh\beta_n\xi_3, \quad 0 \leq \xi_3 \leq e_3 \end{aligned} \quad (8)$$

## 2.2 경계조건 및 적합조건

Fig. 1의 양단 단순지지 보 모델에 대한 경계조건 4개와 불연속 단면의 점  $\xi=e_1$ 과  $\xi=e_2$ 에서 변위 및 기울기의 연속성, 전단력과 굽힘 모멘트의 적합조건으로부터 식 (9)에서 식 (13)까지의 총 12개의 조건식을 얻게 된다.

$$\phi_{n,1}(0) = 0, \phi''_{n,1}(0) = 0, \phi_{n,3}(e_3) = 0, \phi''_{n,3}(e_3) = 0 \quad (9)$$

$$\phi_{n,1}(e_1) - \phi_{n,2}(0) = 0, \phi'_{n,1}(e_1) - \phi'_{n,2}(0) = 0 \quad (10)$$

$$\phi''_{n,1}(e_1) - \gamma^3\phi''_{n,2}(0) = 0, \phi'''_{n,1}(e_1) - \gamma^3\phi'''_{n,2}(0) = 0 \quad (11)$$

$$\phi_{n,2}(e_2) - \phi_{n,3}(0) = 0, \phi'_{n,2}(e_2) - \phi'_{n,3}(0) = 0 \quad (12)$$

$$\gamma^3\phi''_{n,2}(e_2) - \phi''_{n,3}(0) = 0, \gamma^3\phi'''_{n,2}(e_2) - \phi'''_{n,3}(0) = 0 \quad (13)$$

불연속 단이 1개씩 증가함에 따라 4개의 경계조건이 발생하게 되는데, 유한요소법(FEM)이 기하학적인 경계조건만을 만족하는 허용함수를 사용하는 반면에, 모드합 방법은 지배방정식과 경계조건을 모두 만족시키는 고유함수를 사용한다는 점에서 유한요소법의 방법보다는 좀 더 정확한 해를 구할 수 있는 장점을 가지고 있다.

식 (9)에서 (13)을 전개하면 다음과 같다.

$$C_{n,1,2} = 0,$$

$$C_{n,1,4} = 0,$$

$$\sin\beta_n e_1 C_{n,1,1} + \sinh\beta_n e_1 C_{n,1,3} - C_{n,2,2} - C_{n,2,4} = 0,$$

$$\cos\beta_n e_1 C_{n,1,1} + \cosh\beta_n e_1 C_{n,1,3} - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} C_{n,2,1} - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} C_{n,2,3} = 0,$$

$$-\sin\beta_n e_1 C_{n,1,1} + \sinh\beta_n e_1 C_{n,1,3} + \gamma^2 C_{n,2,2} - \gamma^2 C_{n,2,4} = 0,$$

$$-\cos\beta_n e_1 C_{n,1,1} + \cosh\beta_n e_1 C_{n,1,3} + \gamma\sqrt{\gamma} C_{n,2,1} - \gamma\sqrt{\gamma} C_{n,2,3} = 0,$$

$$\sin\frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} e_2 C_{n,2,1} + \cos\frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} e_2 C_{n,2,2} + \sinh\frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} e_2 C_{n,2,3} \\ + \cosh(\beta_n/\sqrt{\gamma}) e_2 C_{n,2,4} - C_{n,3,2} - C_{n,3,4} = 0,$$

$$\cos\frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} e_2 C_{n,2,1} - \sin\frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} e_2 C_{n,2,2} + \cosh\frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} e_2 C_{n,2,3} \\ + \sinh\frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} e_2 C_{n,2,4} - \sqrt{\gamma} C_{n,3,1} - \sqrt{\gamma} C_{n,3,3} = 0,$$

$$-\sin\frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} e_2 C_{n,2,1} - \cos\frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} e_2 C_{n,2,2} + \sinh\frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} e_2 C_{n,2,3} \\ + \cosh\frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} e_2 C_{n,2,4} + \frac{1}{\gamma^2} C_{n,3,2} - \frac{1}{\gamma^2} C_{n,3,4} = 0,$$

$$-\cos\frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} e_2 C_{n,2,1} + \sin\frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} e_2 C_{n,2,2} + \cosh\frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} e_2 C_{n,2,3} \\ + \sinh\frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} e_2 C_{n,2,4} + \frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma}} C_{n,3,1} - \frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma}} C_{n,3,3} = 0,$$

$$\sin\beta_n e_3 C_{n,3,1} + \cos\beta_n e_3 C_{n,3,2}$$

$$+ \sinh\beta_n e_3 C_{n,3,3} + \cosh\beta_n e_3 C_{n,3,4} = 0,$$

$$-\sin\beta_n e_3 C_{n,3,1} - \cos\beta_n e_3 C_{n,3,2}$$

$$+ \sinh\beta_n e_3 C_{n,3,3} + \cosh\beta_n e_3 C_{n,3,4} = 0 \quad (14)$$

식 (14)를 행렬형태로 표현하면 식 (15)가 된다.

$$[S]\{C\} = \{0\} \quad (15)$$

여기서, 행렬  $[S]$ 는 식 (14)의 요소로 구성되고, 벡터  $\{C\}$ 는 다음과 같다.

$$\{C\} = \{C_{n,1,1} C_{n,1,3} C_{n,2,1} C_{n,2,2} C_{n,2,3} C_{n,2,4} \\ C_{n,3,1} C_{n,3,2} C_{n,3,3} C_{n,3,4}\}^T \quad (16)$$

고유치  $\beta_n$ 은 특성방정식  $\det[S] = 0$ 로부터 구하며, 형상함수의 계수  $C_{n,i,j}(i=1,2,3, j=1,2,3,4)$ 는 고유벡터가 된다. 해석적인 방법으로 구한 형상함수 계수는 다음과 같다.

$$C_{n,1,1} = 1,$$

$$C_{n,1,2} = 0,$$

$$C_{n,1,3} = \left\{ \sqrt{\gamma} (\sigma^2 \cos\beta_n e_1 \cos\beta_n e_2 - \sigma'^2 \cos\beta_n e_1 \cosh\beta_n e_2) \right. \\ \left. - (\sigma^2 \sin\beta_n e_1 \sin\beta_n e_2 + \sigma'^2 \sin\beta_n e_1 \sinh\beta_n e_2) \right\} \sin\beta_n e_3 \\ + \left\{ \gamma (\sigma^2 \cos\beta_n e_1 \sinh\beta_n e_2 - \sigma'^2 \cos\beta_n e_1 \sinh\beta_n e_2) \right.$$

$$\left. + \sqrt{\gamma} (\sigma^2 \sin\beta_n e_1 \cos\beta_n e_2 - \sigma'^2 \sin\beta_n e_1 \cosh\beta_n e_2) \right\} \cos\beta_n e_3$$

$$+ \sigma\sigma' \left\{ \left[ \sqrt{\gamma} (\cosh\beta_n e_1 \cos\beta_n e_2 - \cosh\beta_n e_1 \cosh\beta_n e_2) \right. \right.$$

$$\left. - (\sinh\beta_n e_1 \sin\beta_n e_2 + \sinh\beta_n e_1 \sinh\beta_n e_2) \right\} \sin\beta_n e_3$$

$$+ \left\{ \gamma (\cosh\beta_n e_1 \sin\beta_n e_2 - \cosh\beta_n e_1 \sinh\beta_n e_2) \right.$$

$$\left. + \sqrt{\gamma} (\sinh\beta_n e_1 \cos\beta_n e_2 - \sinh\beta_n e_1 \cosh\beta_n e_2) \right\} \cos\beta_n e_3,$$

$$C_{n,1,4} = 0,$$

$$C_{n,2,1} = \frac{1}{2\gamma\sqrt{\gamma}} \left[ \sigma \cos\beta_n e_1 - \sigma' C_{n,1,3} \cosh\beta_n e_1 \right],$$

$$C_{n,2,2} = \frac{1}{2\gamma^2} \left[ \sigma \sin\beta_n e_1 - \sigma' C_{n,1,3} \sinh\beta_n e_1 \right],$$

$$C_{n,2,3} = \frac{1}{2\gamma\sqrt{\gamma}} \left[ -\sigma' \cos\beta_n e_1 + \sigma C_{n,1,3} \cosh\beta_n e_1 \right],$$

$$\begin{aligned}
 C_{n,2,4} &= \frac{1}{2\gamma^2} [-\sigma' \sin \beta_n e_1 + \sigma C_{n,1,3} \sinh \beta_n e_1], \\
 C_{n,3,1} &= \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \left\{ \sigma \left( C_{n,2,1} \cos \frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} e_2 - C_{n,2,2} \sin \frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} e_2 \right) \right. \\
 &+ \left. \sigma' \left( C_{n,2,3} \cosh \frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} e_2 + C_{n,2,4} \sinh \frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} e_2 \right) \right\}, \\
 C_{n,3,2} &= \frac{1}{2} \left\{ \sigma \left( C_{n,2,1} \sin \frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} e_2 + C_{n,2,2} \cos \frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} e_2 \right) \right. \\
 &+ \left. \sigma' \left( C_{n,2,3} \sinh \frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} e_2 + C_{n,2,4} \cosh \frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} e_2 \right) \right\}, \\
 C_{n,3,3} &= \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \left\{ \sigma' \left( C_{n,2,1} \cos \frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} e_2 - C_{n,2,2} \sin \frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} e_2 \right) \right. \\
 &+ \left. \sigma \left( C_{n,2,3} \cosh \frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} e_2 + C_{n,2,4} \sinh \frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} e_2 \right) \right\}, \\
 C_{n,3,4} &= \frac{1}{2} \left\{ \sigma' \left( C_{n,2,1} \sin \frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} e_2 + C_{n,2,2} \cos \frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} e_2 \right) \right. \\
 &+ \left. \sigma \left( C_{n,2,3} \sinh \frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} e_2 + C_{n,2,4} \cosh \frac{\beta_n}{\sqrt{\gamma}} e_2 \right) \right\} \quad (17)
 \end{aligned}$$

식 (17)에서,  $\sigma = 1 + \gamma^2$ ,  $\sigma' = 1 - \gamma^2$  이다.

### 3. 수치해석

#### 3.1 불균일 단면보의 모드해석

보 구조물의 고유진동수, 구조감쇠비 및 모드형상 등은 그 동적 거동의 특성을 결정하는 중요한 요소로서 모드해석은 이를 획득하기 위한 해석 방법이다. 일반적인 금속재료의 경우, 구조 감쇠비는 1/1000 수준으로 매우 작기 때문에 본 논문의 해석상 무시할 수 있다. Fig. 1의 불균일 단면보는 강성 및 질량의 분포가 달라지기 때문에 계의 고유진동수 및 모드형상에 변화를 주게 된다. 수치해석에서는 이와 같은 불균일 단면보에 대해, 홈의 깊이 및 길이를 변화시킴으로써 불균일 단면보의 강성분포와 질량분포 변화가 계의 고유치 및 형상함수에 미치는 영향을 해석한다. 불균일 단면보의 고유치 해석은 계의 특성방정식의 해  $\beta_n$ 을 구하는 것이다.

행렬식  $\det[S] = 0$ 에 포함된 매개변수는 4개  $\gamma, e_1, e_2, e_3$  이나,  $e_3 = 1 - (e_1 + e_2)$ 이므로 고려되어야 할 매개변수는 실제 3가지이다. 본 논문에서는 해석상의 용이함을 위해,  $e_1 = e_3$ 로 하여 2개의 매개변수  $\gamma = 1 - \gamma$ 와  $z = e_2/2$ 를 변화시켜가며 해석하였다. 행렬식  $\det[S] = 0$ 의 해  $\beta_n$ 은 이분법(bisection method)을 이

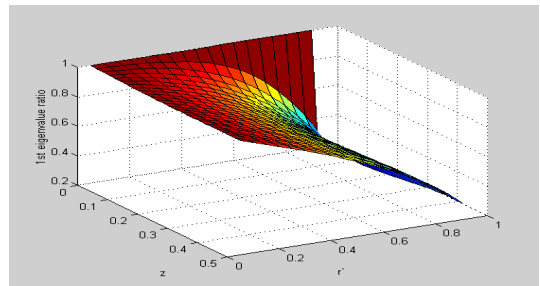
용하여 구하였다. 경우의 수를 줄이기 위해 해석 대상 보 는 홈 깊이비  $\gamma = 1/2, 1/3$ 로, 홈의 길이  $z = 0.1, 0.2$ 의 2가지 경우를 조합하여 총 4가지 보 종류를 선택하였다. Table 1은 균일보에 대한 4종류의 불균일보의 고유치비를 제시하고 있다.

Table 1. Eigenvalue ratios of beams with discontinuous cross section with respect to uniform beam.

Beams	Eigenvalue ratios		
	1st	2nd	3rd
#1 ( $\gamma = 1/3, z = 0.1$ )	0.7784	0.9562	0.9066
#2 ( $\gamma = 1/2, z = 0.1$ )	0.5875	0.8781	0.8823
#3 ( $\gamma = 1/3, z = 0.2$ )	0.7037	0.8125	0.8858
#4 ( $\gamma = 1/2, z = 0.2$ )	0.5151	0.6330	0.7895

Fig. 2는  $\gamma$ 과  $z$ 의 변화에 따른 고유치 변화를 도시한 그림으로 도시된 고유치는 균일보 고유치에 대한 홈이 있는 불균일 단면보의 고유치비를 의미한다.  $\gamma$ 과  $z$ 가 증가함에 따라 고유치 비는 감소하는 일반적인 현상을 볼 수 있다.

$z = 0.5$ 인 경우는 홈의 길이가 보 전체길이와 같으므로 홈 두께와 같은 균일보의 경우와 같다. 3차 고유치 비의 경우,  $\gamma$ 과  $z$ 가 증가함에도 불구하고 고유치가 증가하는 구간이 보인다. 이것은 동적강성효과(dynamic stiffness effect)로 홈이 존재하는 구간에서 강성변화의 영향이 질량변화의 영향보다 큰 경우에는 고유치 비가 감소하며, 질량변화의 영향이 더 큰 경우에는 고유치 비가 상대적으로 증가하게 된다. 일반적으로 최대 변위점(peak point)에서는 강성효과가 크게 작용하여 고유치비가 급격히 감소하며, 절점(node)에서는 질량효과가 크게 영향을 미치게 된다.



(a) 1st eigenvalue ratios

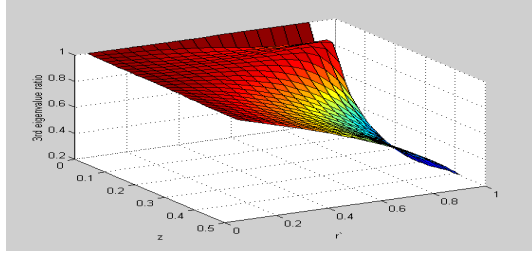
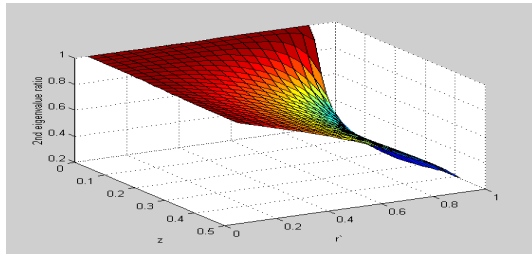


Fig. 2. Variation of eigenvalue ratios with respect to various cut-off length( $z$ ) and depth( $\gamma'$ ) parameters.

Fig. 3은  $\gamma'$ 과  $z$ 의 변화에 따른 고유치비의 변화를 2차원 평면에 도시한 그림이다. 1차 및 3차 모드 최대 변위점인 보의 중간위치 부근에서 고유치 비는 급격히 감소하고 있다. 반면에 2차 모드는 이 지점이 절점이므로 고유치 비는 변화가 없으며  $z$ 가 증가함에 따라 점차로 고유치 비가 감소하게 된다.

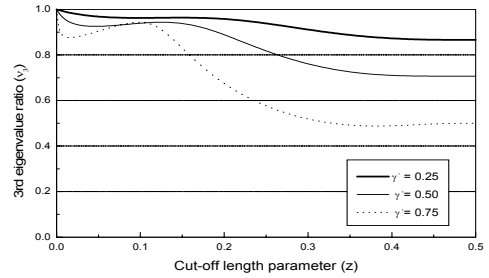
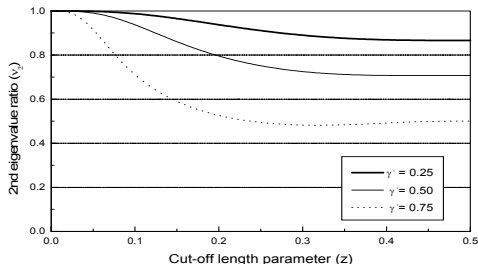
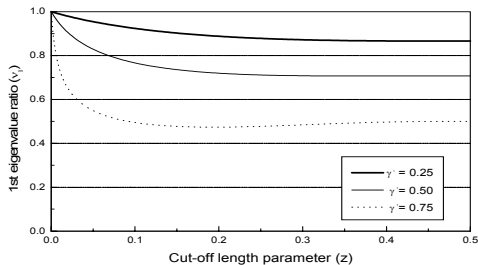


Fig. 3. Effect of cut-off length( $z$ ) and depth( $\gamma'$ ) parameters on eigenvalue ratios

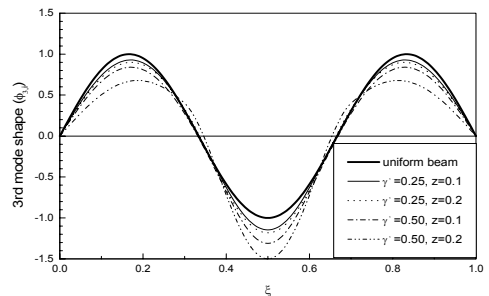
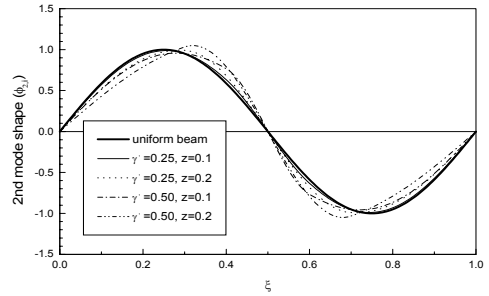
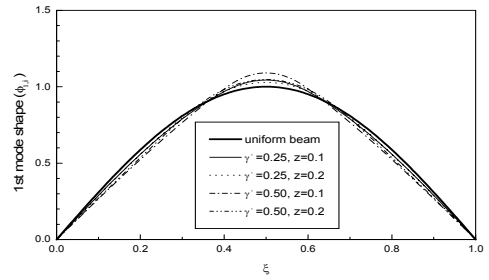
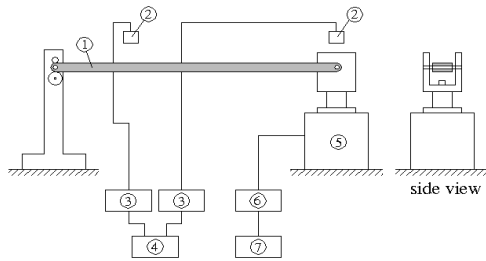


Fig. 4. Comparison of mode shapes of uniform beam and beams with discontinuous cross section.

Fig. 4는  $\gamma$ 와  $z$ 의 변화에 따른 불균일보의 모드 형상을 도식한 것이다. 1차 모드의 경우  $\gamma$ 이 증가함에 따라 모드 형상의 기울기가 커진다. 그러나  $z$ 가 커짐에 따라 최대 변위점에서는 완만한 형상을 갖는다. 2차 모드는 강성이 작은 홈 부위에서 경사가 급해지며  $z$ 가 커짐에 따라 경사는 완만해진다. 3차 모드에서 강성이 작은 홈 부위의 최대 변위점이 커지는 것을 알 수 있다. 이러한 모드형상은 기하학적인 특성을 잘 나타내고 있다. 3차 모드에서 홈의 깊이가 깊어지면 노드점이 점차로 보의 중간지점으로 이동함을 알 수 있다. 이것은 Fig. 4(c)의 고유치비가 동적 강성효과에 의해 증가되는 위치가  $\gamma$ 이 증가함에 따라 보의 중간지점( $z=0$ )으로 향하는 것을 잘 설명해 주고 있다.

## 4. 실험장치 및 실험

### 4.1 실험 장치



- ① Test beam, ② Vibrometer laser sensor,
- ③ Vibrometer controller, ④ FFT analyzer
- ⑤ Exciter, ⑥ Sine/noise generator,
- ⑦ Charge amplifier

Fig. 5. Schematic diagram of the experimental setup.



Fig. 6. Experimental setup for modal tests.

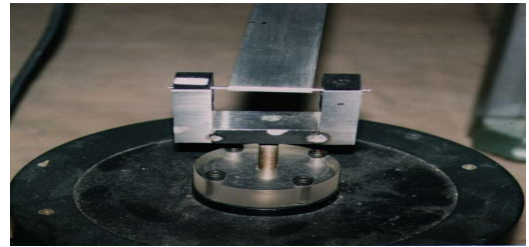


Fig. 7. A jig of an exciter for modal tests.

보의 동특성 확인에 필요한 고유진동수 및 모드형상을 분석하기 위하여 모달테스트 실험 장치를 Fig. 5와 같이 구성하였다. Fig. 6과 Fig. 7에서와 같이 단순지지의 경계조건을 위해 시험보의 양쪽단에 가는 구멍을 내어, 단순지지 보 위의 베어링부에 거치 시킨 후 핀으로 관통시켰다. 시험보의 사진과 기하학적 형상치수 및 제원은 각각 Fig. 8, Table 2, Fig. 9에 나타난 바와 같다.

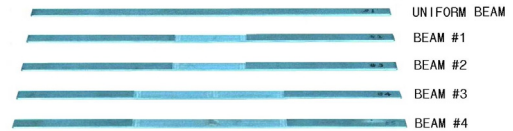


Fig. 8. Test beams.

Table 2. Details of test beams.

Properties		Beam type		Discontinuous section beam			
		Uniform beam	# 1	# 2	# 3	# 4	
Material		Al 6061					
Young's modulus (N/m <sup>2</sup> )		7.07×10 <sup>10</sup>					
Density (kg/m <sup>3</sup> )		2700					
Mass (g)		343.8	309.7	322.8	279.2	299.5	
Dimension (mm)	Thickness of cut-off area, t	-	2.0	2.7	2.0	2.7	
	Width of cut-off area	-	200.0	200.0	400.0	400.0	
	Total length	1,000.0					

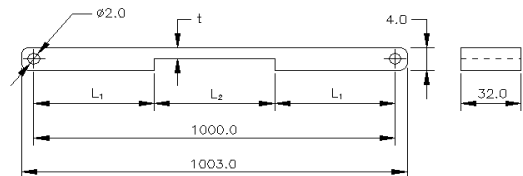


Fig. 9. Geometric dimensions of a test beam.

실험에 사용된 균일보는 Al 6061 판재를 사용하였으며, 전장 1000mm, 폭 32mm 그리고 두께 4mm의 크기

로 제작하였고, 보의 양끝 단에 지지를 위하여 직경 2mm의 구멍을 관통시켰다. 불균일 단면보는 균일 단면 보와 동일한 재질과 크기를 적용하되 보 중앙부에 대칭으로 200, 400mm의 두 종류의 길이에 대하여 각각 2, 1.3mm 깊이의 홈 형태를 갖는 불균일 단면을 추가로 가공하여 제작하였다.

### 4.2 실험 방법

먼저 각 보에 대하여 모달테스트를 수행하여 고유진동수와 진폭, 모드형상을 측정함으로써 보의 동특성을 확인하였다. Sine/noise generator는 스위프(sweep)가진법 및 랜덤(random) 가진법을 모두 사용할 수 있다. 그러나 실험 대상인 보 구조는 단순하기 때문에 실험시간이 짧은 랜덤가진법을 이용하여 전달함수를 구하였다. 전달함수는 가진기의 가진 변위를 입력으로 하고, 보의 진동변위를 출력으로 하였다. 전달함수의 계산은 주파수 분석기의 내부 연산기능을 이용하였으며, 0.25(Hz)의 해상도로 100(Hz) 범위에서 3차 모드까지 구하였다. 랜덤가진에 의한 신호의 왜곡을 줄이기 위해 전달함수는 64회 평균을 하여 스무딩(smoothing)한 결과를 얻었다. 모드형상은 전달함수로부터 피크피킹방법(peak picking method)을 사용하여 계산하였다[13]. 가진점은  $x=0$ 의 위치에 고정하고 측정위치는 시험보를 10등분하여 1/10만큼씩 거리를 증가시켜가며 전달함수를 계측하였다.

### 4.3 실험 결과 및 고찰

5가지 보 모델에 대한 모달테스트 결과 획득한 계의 전달함수는 Fig. 10과 같다. 실험은 보의 한지된 한쪽 끝단( $x=0$ )을 가진기에 연결한 후 500(Hz)까지의 협대역 불규칙 진동으로 가진한 후, 가진기의 진동변위에 대한 보의 진동변위를 전달함수로 하였다. 보의 진동변위는 1차에서 3차 모드의 노드점을 피하기 위하여  $x=0.6l$  지점에서 측정하였다. 이 지점에서 1차와 2차 모드의 위상차가  $180^\circ$ 발생하기 때문에 1차와 2차 모드 사이에 비공진점(anti-resonant point)이 발생하는 것을 볼 수 있으며, 2차와 3차 모드의 위상은 같다.

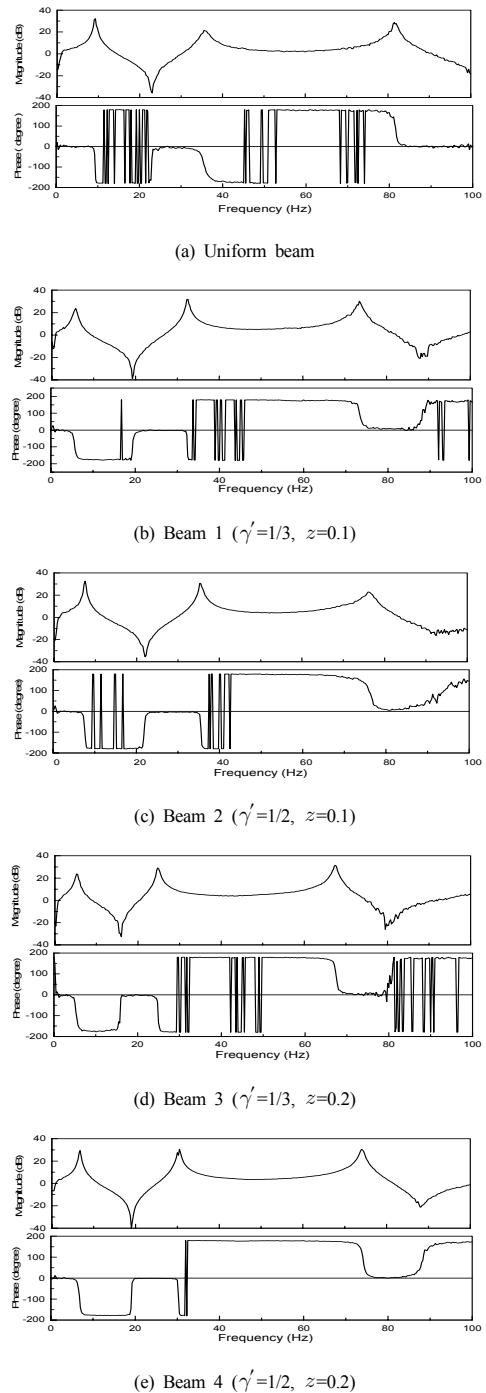


Fig. 10. Transfer functions of beams (exciting position :  $x=0$ , measuring position :  $x=0.6l$ ).

**Table 3.** Natural frequencies for FEM, mode summation method and experiment.

Beam No.	Natural frequency (Hz)	FEM	Mode summation	Exp.
Uniform beam	$f_1$	9.318	9.317	9.25
	$f_2$	37.274	37.268	35.00
	$f_3$	83.876	83.853	82.00
#1	$f_1$	7.330	7.328	7.50
	$f_2$	35.725	35.721	35.75
	$f_3$	76.208	76.172	76.50
#2	$f_1$	5.520	5.474	5.50
	$f_2$	33.017	32.723	32.50
	$f_3$	74.147	73.980	73.50
#3	$f_1$	6.653	6.639	6.50
	$f_2$	30.681	30.553	30.50
	$f_3$	74.733	74.568	74.25
#4	$f_1$	4.835	4.826	5.25
	$f_2$	23.704	23.590	25.00
	$f_3$	66.519	66.205	67.00

Table 3에 실험결과와 모드 합 방법에 의한 계산결과로 얻은 고유진동수를 FEM(Pro/Engineer)의 결과와 비교하여 제시하였다. 모드 합 방법에 의한 결과와 FEM에 의한 결과는 매우 근사하게 일치하고 있다. 실험 결과는 사용했던 분석장비인 FFT분석기가 100(Hz) 범위에서 0.25(Hz)의 해상도를 가지고 있기 때문에 1차 고유진동수의 경우  $\pm 2.5\%$ 의 오차한계를 기본적으로 가지고 있음에도 해석결과와 비교적 잘 일치하고 있다.

보의 모드 형상은 측정위치  $x_i$ 와  $x_k$ 에서 획득한 전달함수  $T_{ik}(\omega)$ 를 이용하여 실험적으로 얻을 수 있다.

$$T_{ik}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nA_{i,k}}{(\omega_n^2 - \omega^2) + j\zeta_n \omega_n} \quad (18)$$

여기서,  $j = \sqrt{-1}$ ,  $\omega_n$ 은  $n$ 차 고유진동수,  $\omega$ 는 가진주파수,  $\zeta_n$ 은 등가된 구조감쇠를 의미하며,  $nA_{i,k}$ 는  $x_k$  위치에서 가진한 경우  $n$ 차 모드의  $x_i$  위치에서의 크기를 나타내는 계수이다. 이 때, 측정된 변위  $X_i(\omega)$ 는 힘  $F_k(\omega)$ 와 전달함수  $T_{ik}(\omega)$ 를 사용하여 다음과 같은 관계가 된다.

$$X_i(\omega) = T_{ik}(\omega) F_k(\omega) \quad (19)$$

실험에서는 한정된 모드 수만을 고려하기 때문에 고차 모드의 잔여항(residual term)에 의한 오차가 발생할 수 있으므로 오차를 최소화하기 위해서는 측정위치 및 가진위치를 측정하고자 하는 모드 수보다 충분히 많은 횟수로 변화시켜가며 전달함수  $T_{ik}(\omega)$ 를 구해야 한다. 실험 대상보의 경우, 양단 단순지지의 경계조건을 만족시키기 위해 가진점을  $x=0$ 의 한 위치에 고정시키며 실

험결과를 얻었다. 이는 실험 대상보와 같이 고유진동수 사이의 간격이 충분히 있는 경우에는 한점 가진, 다점 측정결과를 이용한 피크-피킹방법(peak picking method)이 유효하게 사용될 수 있다[13].

랜덤가진의 경우 가진력  $F_k(\omega)$ 는 주파수영역에서 항상 일정한 값이므로, 변위응답  $X_i(\omega)$ 는

$$X_i(\omega) = T_i(\omega) \quad (20)$$

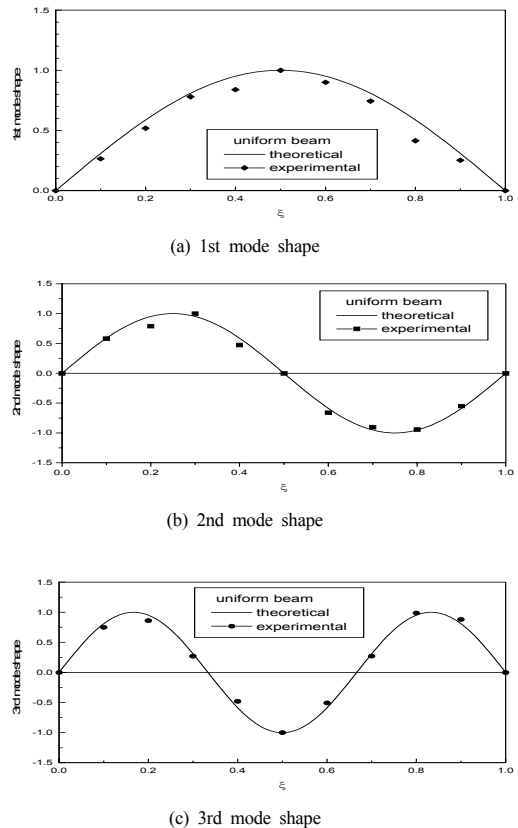
가 되어  $n$ 번째 모드의 피크 값  $\alpha_{i,n}$ 는 다음과 같다.

$$\alpha_{i,n} = |nA_i/2\zeta_n\omega_n| + Residual \quad (21)$$

식 (21)에서 감쇠비  $\zeta_n$ 은 반동력점(half power point) 간의 주파수 대역  $\Delta\omega_n$ 을 이용하여 다음 식으로부터 얻는다.

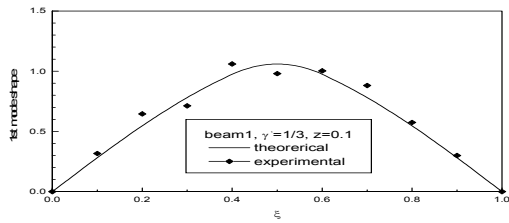
$$\zeta_n = \Delta\omega_n/\omega_n \quad (22)$$

모달테스트로 구한  $\alpha_{i,n}$ 과  $\zeta_n$ 을 이용하여,  $nA_i$ 를 구하면 각 측정지점에서의  $n$ 차 모드의 크기 가중치를 얻을 수 있다. 모달테스트 결과, 얻어진 실험보 각각의 모드 형상은 Fig. 11~15와 같다.

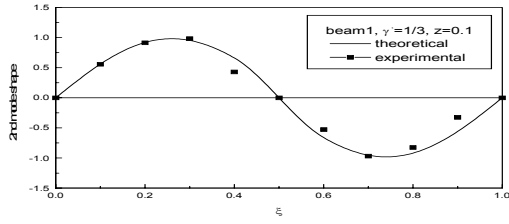


**Fig. 11.** Comparison of the mode shapes of uniform beam from theoretical and experimental result.

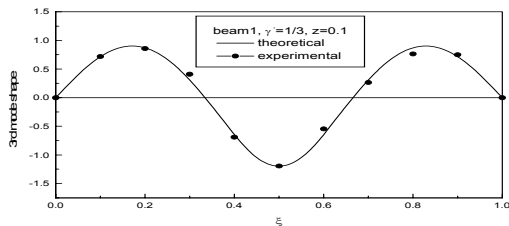




(a) 1st mode shape

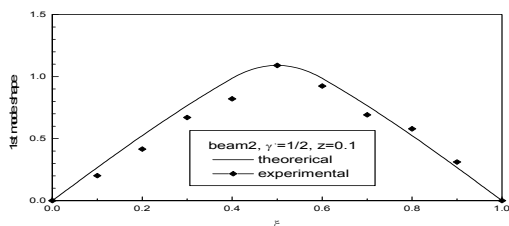


(b) 2nd mode shape

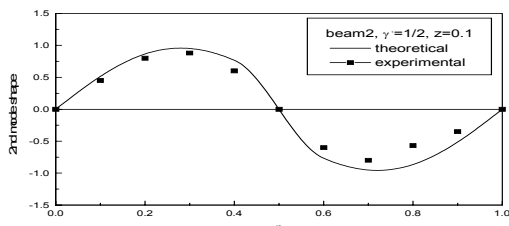


(c) 3rd mode shape

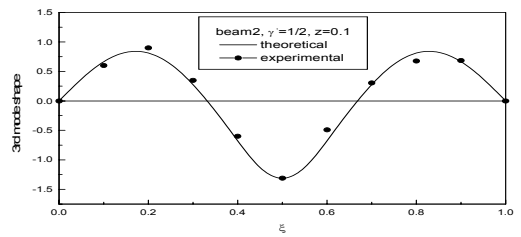
Fig. 12. Comparison of the mode shapes of beam 1 from theoretical and experimental result.



(a) 1st mode shape

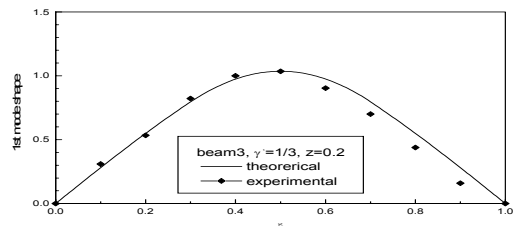


(b) 2nd mode shape

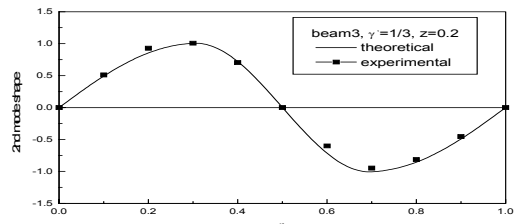


(c) 3rd mode shape

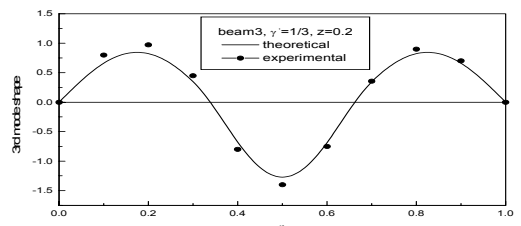
Fig. 13. Comparison of the mode shapes of beam 2 from theoretical and experimental result.



(a) 1st mode shape



(b) 2nd mode shape



(c) 3rd mode shape

Fig. 14. Comparison of the mode shapes of beam 3 from theoretical and experimental result.

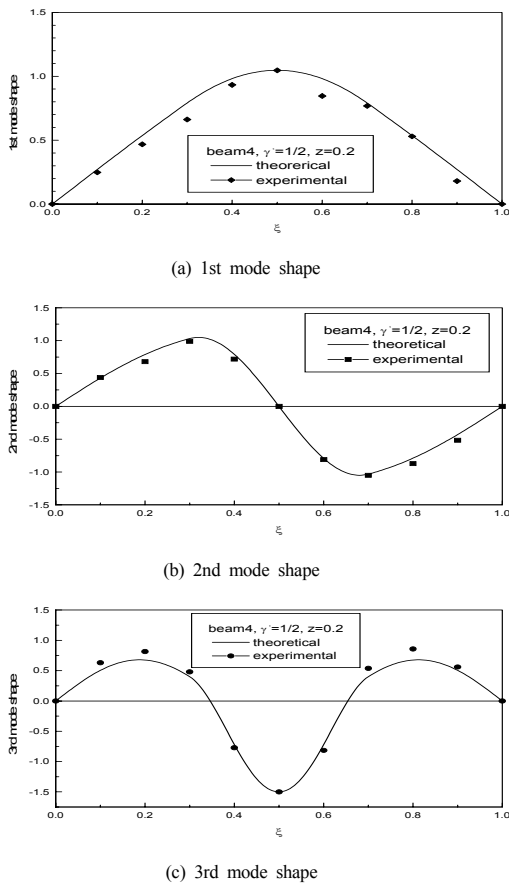


Fig. 15. Comparison of the mode shapes of beam 4 from theoretical and experimental result.

Fig. 11~Fig. 15에서 알 수 있듯이 다양한 보형태의 1차부터 3차까지의 실험값과 이론값의 모드형상은 비교적 근사하게 일치하고 있음을 알 수 있다.

### 5. 결론

불균일 단면 보의 모달해석 및 시험결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 불균일 단면보의 모드해석을 위하여 국부좌표를 이용한 형상함수를 정의하고, Galerkin의 모드합 방법에 의한 고유진동수와 고유모드를 얻었다. 고유진동수에 대한 정량적 비교를 위하여 상용 FEM S/W (Pro/Engineer)를 사용한 해석결과와

비교하여 1% 미만의 오차로 비교적 근사한 결과를 얻었다. 또한, 모달테스트 결과와 비교한 수치도 측정장비의 해상도 오차에서 대부분 크게 벗어나지 않았다.

- (2) 불균일 단면보의 홈 깊이가 깊어질수록 고유진동수가 감소하며, 진동모드의 절점과 홈이 있는 경우 동적강성효과가 발생하는 역학적 타당성을 확인할 수 있다.
- (3) 모드형상에 대한 확인을 위하여 모달시험에 의한 형상벡터를 구하여 수치해석에 의한 결과와 비교하였으며, 다만, 경계조건 유지를 위하여 가진점 위치를 다양하게 변화시킬 수 없었으며 초기 정적 처짐량에 의한 오차 등으로 보다 더 정밀한 실험 결과를 확보할 수 없었으나, 수치해석 결과에서 획득한 불균일 단면보의 모드형상에서 볼 수 있는 특징을 확인할 수 있었다.

### References

- [1] A. C. Heidebrecht, "Vibration of Non-Uniform Simply-Supported Beams", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 93, No. 2, pp.1-15, 1967.
- [2] H. C. Wang, "Generalized Hypergeometric Function Solutions on Transverse Vibrations of a Class of Nonuniform Beams", Journal of Applied Mechanics, Vol. 34, pp.702-708, 1968.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.1115/1.3607764>
- [3] L. Klein, "Transverse Vibrations of Non-Uniform Beams", Journal of Sound and Vibration, Vol. 37, No. 4, pp.491-505, 1974.  
DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0022-460X\(74\)80029-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0022-460X(74)80029-5)
- [4] A. K. Gupta, "Vibration of Tapered Beams", Journal of Structural Engineering, Vol. 111, No. 1, pp.19-36, 1985.
- [5] S. Y. Lee, H. Y. Ke and Y. H. Kuo, "Analysis of Non-uniform Beam Vibration", Journal of Sound and Vibration, Vol. 142, No. 1, pp.15-29, 1990.  
DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0022-460X\(90\)90580-S](http://dx.doi.org/10.1016/0022-460X(90)90580-S)
- [6] B. K. Lee, K. K. Park, S. J. Oh and J. M. Mo, "Free Vibrations of Beams with Static Deflections due to Dead Load", Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 4, No. 4, pp.451-457, 1994.
- [7] K. J. Kang and B. S. Kim, "In-Plane Vibration Analysis of Curved Beams Considering Shear Deformation using DQM", Journal of the Korea Academia-Industrial cooperation Society, Vol. 7, No. 5, pp.788-792, 2006.
- [8] Z. R. Lu, M. Huang, J. K. Liu, W. H. Chen and W. Y. Liao, "Vibration Analysis of Multiple-Stepped Beams with the Composite Element Model", Journal of Sound and Vibration, Vol. 332, No. 4-5, pp.1070-1080, 2009.

- [9] S. K. Lim and O. S. Song, "Free Vibration Analysis of Composite H-Type Cross-section Beams", Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 20, No. 5, pp.492-501, 2010.  
DOI : <http://dx.doi.org/10.5050/KSNVE.2010.20.5.492>
- [10] B. K. Lee, S. J. Oh, C. E. Park and T. E. Lee, "Free Vibrations of Tapered Beams with Constant Surface Area", Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 21, No. 1, pp.66-73, 2011.  
DOI : <http://dx.doi.org/10.5050/KSNVE.2011.21.1.066>
- [11] J. W. Lee, J. H. Kim and J. Y. Lee, "Exact Solutions for Bending Vibration of Beam with Linearly Reduced Width Along Its Length", Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 25, No. 6, pp.66-73, 2015.  
DOI : <http://dx.doi.org/10.5050/KSNVE.2015.25.6.420>
- [12] D. J. Gorman, Free Vibration Analysis of Beams and Shafts, Newyork, John Wiley and Sons, 1975.
- [13] D. J. Ewins, Modal Testing : Theory and Practice, Research Studies Press Ltd., pp.153-196, 1984.

**김 영 식(Youngshik Kim)**

[정회원]



- 2003년 5월 : University of Utah, 대학원 기계공학과 (석사)
- 2008년 8월 : University of Utah, 대학원 기계공학과 (박사)
- 2009년 ~ 2011년 1월 : DGIST 선임연구원
- 2011년 2월 ~ 현재 : 한밭대학교 기계공학과 교수

<관심분야>  
로보틱스, 제어

**김 인 우(In-Woo Kim)**

[정회원]



- 1981년 2월 : 연세대학교 기계공학과 (공학사)
- 1991년 8월 : 충남대학교 대학원 기계설계공학과 (공학석사)
- 1999년 8월 : 충남대학교 대학원 기계설계공학과 (공학박사)
- 1982년 2월 ~ 현재 : 국방과학연구소

<관심분야>  
구조해석, 진동해석 및 시험 등

**유 봉 조(Bong-Jo Ryu)**

[정회원]



- 1983년 2월 : 연세대학교 대학원 기계공학과 (공학석사)
- 1988년 2월 : 연세대학교 대학원 기계공학과 (공학박사)
- 1988년 3월 ~ 1989년 2월 : 연세대학교 산업기술연구소
- 1989년 7월 ~ 현재 : 한밭대학교 기계공학과 교수

<관심분야>  
구조물 진동/제어, 구조해석