

# 복합재 라미네이트의 두께방향 열탄성 물성치 계산

김경표<sup>\*</sup>

<sup>1</sup>대한항공기술연구원

## Analytical Determination of Out-of-Plane Thermo-elastic Properties for Laminated Composite Plate

Kyung-Pyo Kim<sup>\*</sup>

<sup>1</sup>R&D Center, Koreanair

**요약** 본 논문은 적층된 복합재 라미네이트의 두께방향(out-of-plane) 열탄성 물성치 계산식에 관하여 서술하였다. 다양한 적층패턴을 유도된 계산식에 적용한 결과, 섬유방향이 단방향 0도로 구성된 라미네이트에서 총 플라이수 중 10% 이상이 모두 90도 섬유방향으로 이루어져 있거나, 또는 15도 이상의 섬유방향으로 형성된 적층패턴을 가지는 라미네이트(Laminate)의 두께방향 물성치를 복합재 라미나(lamina)의 단섬유방향과 직교하는 물성치(transverse property)로 가정하는 것은 적절하지 않은 것으로 나타났다.

**Abstract** This paper presents analytical expressions for the determination of out of plane thermo-elastic properties for conventional laminated composite plates. The approach follows that commonly accepted for in-plane properties. Results over a variety of lay-ups reveals that it is poor assumption to use transverse tape lamina properties to represent out of plane laminate properties for laminates with more than 10% plies oriented off-axis(90°) from uniaxial or for laminates with angle plies of 15° or greater.

**Key Words** : Analytical determination, Laminated composite elastic properties, Out of plane shear properties, Out of plane CTE, Composite Optics

### 1. 서론

복합재료는 기존의 금속재료를 대체할 재료로 각광 받고 있으며, 그 사용분야도 건설에서 항공분야에 이르기까지 다양해지고 있으며, 전 세계적으로 수요가 확대되고 있다. 특히 항공우주분야에서의 복합재료의 쓰임은 무게 대비 높은 강성 및 강도의 재료의 특성으로 항공기의 구조물에 많이 적용되고 있다. 종전의 복합재료의 연구가 하중을 받는 구조물의 설계에 초점을 둔 반면, 근래의 복합재료의 쓰임에 대한 연구는 높은 정밀도가 요구되는 통신안테나 구조물이나 허블망원경의 반사경에 사용되었던 기존의 무거운 금속재료를 가벼운 복합재료

로 대체하는데 초점을 두고 있다[1-4]. 기존 연구방법에는 복합재 유한요소해석을 위하여, 일반적으로 복합재 물성치를 입력하는데 두께방향 물성치는 Fig. 1과 같이 단섬유방향 라미나 물성치에 직교하는 물성치(transverse property)와 동일하다고 가정하고 있다. 이러한 가정은 복합재료를 구성하는 섬유(fiber) 및 기지(matrix)의 강성이나 컴플라이언스(compliance)를 통하여 하나의 플라이(ply)로 구성되어 있다고 가정하는 경우에는 적절하지만 여러장의 플라이를 적층하여 구성된 라미네이트의 경우에는 복합재 적층패턴에 따라(섬유각도의 변화) 두께방향 물성치가 동일하지 않으며 그로인해 구조물의 성능에 영향을 줄 수 있다. 특히 허블망원경의 반사경이나

<sup>\*</sup>Corresponding Author : Kyung-Pyo Kim(Koreanair)

Tel: +82-10-9321-4920 email: mekans@naver.com

Received March 3, 2015

Revised April 3, 2015

Accepted April 9, 2015

Published April 30, 2015

통신구조물의 설계 조건은 구조가 받을 외부하중을 고려하여 설계되어야 할 뿐만 아니라, 반사판의 두께방향의 변형표면은 열 팽창 등 내부하중에 의한 변형이 최소화되어야 제 기능을 발휘 할 수 있다. 따라서, 이러한 고정밀도 반사표면이 요구되는 구조물의 설계/해석에는 정확한 재료의 두께방향 물성치가 요구된다. 본 논문에서는 보다 정확한 복합재 라미네이트 구조물의 거동해석에 적용될 물성치 획득을 위하여, 일반적으로 사용되는 다양한 대칭적층각(Symmetric)을 가지며 밸런스(Balanced)한 라미네이트의 두께방향 물성치 계산식에 대하여 기술하였다. 수식유도를 위하여 고전적층이론(Classical Laminate Theory)이 사용되었으며, 다양한 서적이 수식유도를 위해 참조되었다[5-9].

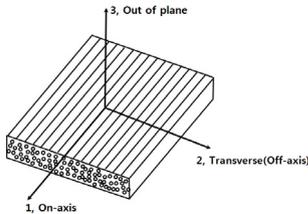


Fig. 1. Orthotropic lamina with principal coordinate system

## 2. 두께방향 탄성계수 획득을 위한 이론

일반적으로 복합재는 얇은 각판을 가정하고 두께방향의 응력 및 변형률은 고려하지 않은 2차 평면(x-y plane)에서의 응력과 변형률의 관계식을 적용하고 있다. 본 논문에서는 두께방향의 물성치 관계식을 유도하기 위해 일반적인 응력과 변형률의 관계식을 이용하였다. 먼저, 일반적인 응력-변형률 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

수식의 유도를 위하여 정육면체로 이루어진 라미네이트에 z 방향으로 단축하중이 Fig. 2와 같이 작용한다고 가정하였다.

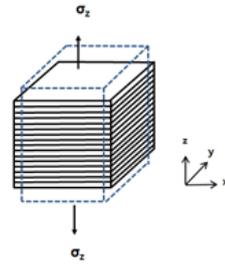


Fig. 2. Deformation of a cubic laminate in z direction

이러한 두께방향 하중이 라미네이트에 작용할 때 Fig. 2와 같이 하중이 작용하는 면과 라미네이트 측면의 변형 후 형상은 직선이라고 가정하였다. 또한 Fig. 2와 같이 라미네이트가 변형할 때 하중이 작용하는 면(normal)의 길이가 변형하며 직선을 유지한다고 가정하였다. 아울러 복합재 라미네이트내의 적층패턴이 대칭이고 밸런스 하다고 가정하여 x-y 평면에 직교하는 코너 또한 변형이 없다고 가정하고, 따라서 복합재 내의 평면전단 변형(in-plane shear strain) 또한 존재하지 않는다고 가정하였다. 앞선 가정처럼 두께방향의 하중만 존재하고 전단 응력 및 전단변형률이 없는 단방향 복합재료의 특성인 직교이방성 재료의 응력-변형률 관계식은 다음식 (1)~(3)과 같이 축소되어 정의된다.

$$\sigma_x = \overline{Q}_{11} \varepsilon_x + \overline{Q}_{12} \varepsilon_y + \overline{Q}_{13} \varepsilon_z \quad (1)$$

$$\sigma_y = \overline{Q}_{12} \varepsilon_x + \overline{Q}_{22} \varepsilon_y + \overline{Q}_{23} \varepsilon_z \quad (2)$$

$$\sigma_z = \overline{Q}_{13} \varepsilon_x + \overline{Q}_{23} \varepsilon_y + \overline{Q}_{33} \varepsilon_z \quad (3)$$

$$\overline{Q}_i = \begin{bmatrix} Q_{11}C^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})C^2S^2 + Q_{22}S^4 & (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})C^2S^2 + Q_{12}(C^4 + S^4) & Q_{13}C^2 + Q_{23}S^2 \\ (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})C^2S^2 + Q_{12}(C^4 + S^4) & Q_{11}S^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})C^2S^2 + Q_{22}C^4 & Q_{13}S^2 + Q_{23}C^2 \\ Q_{13}C^2 + Q_{23}S^2 & Q_{13}S^2 + Q_{23}C^2 & Q_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

수식 4)에서 C=cos(θ), S=sin(θ) 그리고 θ는 플라이의 섬유방향을 나타낸다. 라미네이트를 구성하고 있는 플라이 두께는 얇기 때문에 ε<sub>z</sub>는 z 방향에 관하여 독립 변수라 가정하고, 수식 (3)을 ε<sub>z</sub>로 정리하면,

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{\overline{Q}_{33}} - \frac{\overline{Q}_{13}}{\overline{Q}_{33}} \varepsilon_x - \frac{\overline{Q}_{23}}{\overline{Q}_{33}} \varepsilon_y \quad (5)$$

수식 (5)를 수식 (1)과 (2)에 대입하여 정리하면,

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \left[ \overline{Q_{11}} - \frac{\overline{Q_{13}^2}}{\overline{Q_{33}}} \right] \varepsilon_x + \left[ \overline{Q_{12}} - \frac{\overline{Q_{13} Q_{23}}}{\overline{Q_{33}}} \right] \varepsilon_y + \left[ \frac{\overline{Q_{13}}}{\overline{Q_{33}}} \right] \sigma_z \\ &= \overline{Q_{11}} \varepsilon_x + \overline{Q_{12}} \varepsilon_y + \overline{Q_{17}} \sigma_z\end{aligned}\quad (6)$$

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \left[ \overline{Q_{12}} - \frac{\overline{Q_{13} Q_{23}}}{\overline{Q_{33}}} \right] \varepsilon_x + \left[ \overline{Q_{22}} - \frac{\overline{Q_{23}^2}}{\overline{Q_{33}}} \right] \varepsilon_y + \left[ \frac{\overline{Q_{23}}}{\overline{Q_{33}}} \right] \sigma_z \\ &= \overline{Q_{12}} \varepsilon_x + \overline{Q_{22}} \varepsilon_y + \overline{Q_{27}} \sigma_z\end{aligned}\quad (7)$$

위 수식 (6)과 (7)의  $\overline{Q_{ij}}$ 는 참고하기 편리하게 정의하였다.

Fig. 2처럼 라미네이트에 오직 응력  $\sigma_z$ 가 작용할 때, 라미네이트를 구성하고 있는 각각의 플라이 경계면은 연속성을 유지해야 하고, 각각의 플라이에 작용하는 변형률  $\varepsilon_z$ 를 상수라고 가정했으므로 응력  $\sigma_z$  또한 z 방향에 독립변수라 할 수 있다.(constant for all layers)

따라서, x, y 방향 변형률  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  그리고 응력  $\sigma_z$ 는 독립변수 이므로 수식 (6)과 (7)을 두께방향으로 적분하면, 수식 (8), (9)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}N_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz \\ &= \left[ \int_{-t/2}^{t/2} \overline{Q_{11}} dz \right] \varepsilon_x + \left[ \int_{-t/2}^{t/2} \overline{Q_{12}} dz \right] \varepsilon_y + \left[ \int_{-t/2}^{t/2} \overline{Q_{17}} dz \right] \sigma_z\end{aligned}\quad (8)$$

$$\begin{aligned}N_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y dz \\ &= \left[ \int_{-t/2}^{t/2} \overline{Q_{12}} dz \right] \varepsilon_x + \left[ \int_{-t/2}^{t/2} \overline{Q_{22}} dz \right] \varepsilon_y + \left[ \int_{-t/2}^{t/2} \overline{Q_{27}} dz \right] \sigma_z\end{aligned}\quad (9)$$

$\overline{A_{ij}}$ 는 수식 (10)과 같이 정의한다.

$$\overline{A_{ij}} = \int_{-t/2}^{t/2} \overline{Q_{ij}} dz = \sum_{k=1}^n \overline{Q_{ij}^{(k)}} t_k \quad (10)$$

$t_k$ 는 라미네이트 내의 임의의  $k^{th}$  플라이의 두께이며,  $n$ 은 플라이 개수를 의미한다. 수식 (10)은 고전적층이론의 확장강성계수( $\overline{A_{ij}}$ , Extensional Stiffness)의 유도 방식을 동일하게 적용하였지만 고전적층이론에서 표현하는  $A_{ij}$  수식과는 다르다는 것을 밝혀둔다.

수식 (10)을 (8)에 대입하고,  $N_x$ 를 제로로 하여 정리하면,

$$\varepsilon_x^{(0)} = \frac{-\overline{A_{12}} \varepsilon_y^{(0)} - \overline{A_{17}} \sigma_z}{\overline{A_{11}}} \quad (11)$$

동일한 방법으로 수식 (10)과 (11)을 수식 (9)에 대입하고  $N_y$ 를 제로로 하여 수식을 정리하면,

$$\varepsilon_y^{(0)} = \left[ \frac{\overline{A_{12}} \overline{A_{17}} - \overline{A_{27}} \overline{A_{11}}}{\overline{A_{11}} \overline{A_{22}} - \overline{A_{12}^2}} \right] \sigma_z = \overline{A_{yz}} \sigma_z \quad (12)$$

수식 (12)를 (11)에 대입하여 정리하면,

$$\varepsilon_x^{(0)} = \left[ \frac{\overline{A_{12}} \overline{A_{27}} - \overline{A_{17}} \overline{A_{22}}}{\overline{A_{11}} \overline{A_{22}} - \overline{A_{12}^2}} \right] \sigma_z = \overline{A_{xz}} \sigma_z. \quad (13)$$

수식 (12)와 (13)의  $\overline{A_{xz}}$ 와  $\overline{A_{yz}}$ 는 참고의 편리성을 위해 임의로 정의하였다.(고전적층이론의  $\overline{A_{ij}}$ 와 같은 수식이 아님)

라미네이트내의 임의의 플라이( $k^{th}$  layer)에 대한 두께방향 변형률은 수식 (5)를 참조하여 유도될 수 있다.

$$\varepsilon_z^{(k)} = \left[ \frac{\sigma_z}{\overline{Q_{33}^{(k)}}} \right] - \left[ \frac{\overline{Q_{13}^{(k)}}}{\overline{Q_{33}^{(k)}}} \right] \varepsilon_x - \left[ \frac{\overline{Q_{23}^{(k)}}}{\overline{Q_{33}^{(k)}}} \right] \varepsilon_y$$

임의의 플라이의 두께방향 변형은  $\Delta t_k = \varepsilon_z^{(k)} t_k$ 임으로, 총 두께에 대한 수식은 다음과 같다.

$$\Delta t = \sum_{k=1}^n \Delta t_k \quad (14)$$

따라서, 두께방향의 평균 변형률과 탄성계수는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta t}{t} = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta t_k}{t} = \frac{\sum_{k=1}^n \varepsilon_z^{(k)} t_k}{t} \quad (15)$$

$$E_z = \frac{t}{\sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{\overline{Q_{33}^{(k)}}} - \left[ \frac{\overline{Q_{13}^{(k)}}}{\overline{Q_{33}^{(k)}}} \right] \overline{A_{xz}} - \left[ \frac{\overline{Q_{23}^{(k)}}}{\overline{Q_{33}^{(k)}}} \right] \overline{A_{yz}} \right\} t_k} \quad (16)$$

위 결과로 두께방향의 포와송비 또한 얻을 수 있다.

$$\nu_{zx} = \frac{-\varepsilon_x}{\varepsilon_z} = \frac{-\overline{A_{xz}} t}{\sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{Q_{33}^{(k)}} - \left[ \frac{Q_{13}^{(k)}}{Q_{33}^{(k)}} \right] \overline{A_{xz}} - \left[ \frac{Q_{23}^{(k)}}{Q_{33}^{(k)}} \right] \overline{A_{yz}} \right\} t_k} \quad (17)$$

$$\nu_{zy} = \frac{-\varepsilon_y}{\varepsilon_z} = \frac{-\overline{A_{yz}} t}{\sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{Q_{33}^{(k)}} - \left[ \frac{Q_{13}^{(k)}}{Q_{33}^{(k)}} \right] \overline{A_{xz}} - \left[ \frac{Q_{23}^{(k)}}{Q_{33}^{(k)}} \right] \overline{A_{yz}} \right\} t_k} \quad (18)$$

본 논문에서 유도된 수식은 적층패턴이 대칭 (symmetric)이며, 밸런스(balanced)한 라미네이트에만 적용된다는 것을 밝혀둔다.

### 3. 두께방향 전단 탄성계수 획득을 위한 이론

두께방향 탄성계수 수식은 Fig. 2와 같이 두께방향에 작용하는 축방향 응력을 적용하여 수식을 유도하였다면, 이번 장에서는 두께방향에 전단응력만 작용한다고 가정하여 수식을 유도하였다.

라미네이트의 두께방향 전단응력  $\tau_{xz}$  또는  $\tau_{yz}$ 가 작용하고, 각각의 플라이에 그 전단응력이 동일하게 적용된다고 가정하면, 변형률과 응력의 관계식은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\gamma_{yz}^{(k)} = S_{44}^{(k)} \tau_{yz}^{(k)} + S_{45}^{(k)} \tau_{xz}^{(k)} = S_{44}^{(k)} \tau_{yz} + S_{45}^{(k)} \tau_{xz} \quad (19)$$

$$\gamma_{xz}^{(k)} = S_{45}^{(k)} \tau_{yz}^{(k)} + S_{55}^{(k)} \tau_{xz}^{(k)} = S_{45}^{(k)} \tau_{yz} + S_{55}^{(k)} \tau_{xz} \quad (20)$$

$S_{44}^{(k)}$ ,  $S_{45}^{(k)}$  그리고  $S_{55}^{(k)}$ 는 강성계수가 변환된 컴플라이언스(compliance)이며,  $\gamma_{yz}^{(k)}$ 와  $\gamma_{xz}^{(k)}$ 은 두께방향 전단 변형률이다. 임의의 플라이( $k^{th}$  | layer)의 두께방향 전단 변형은 동일한 플라이의 상부면에 대한 바닥면의 변위식을 표현하는데 사용될 수 있다. 관련하여 정리하면,

$$\Delta_x^{(k)} = \gamma_{xz}^{(k)} t_k \quad (21)$$

$$\Delta_y^{(k)} = \gamma_{yz}^{(k)} t_k \quad (22)$$

라미네이트 전체에 대한 변위는,

$$\Delta_x = \sum_{k=1}^n \Delta_x^{(k)} = \sum_{k=1}^n \gamma_{xz}^{(k)} t_k \quad (23)$$

$$\Delta_y = \sum_{k=1}^n \Delta_y^{(k)} = \sum_{k=1}^n \gamma_{yz}^{(k)} t_k \quad (24)$$

따라서, 라미네이트 전체 전단변형률은 다음과 같이 정의된다.

$$\gamma_{yz} = \frac{\Delta_y}{t} = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^n \gamma_{yz}^{(k)} t_k \quad (25)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\Delta_x}{t} = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^n \gamma_{xz}^{(k)} t_k \quad (26)$$

수식 (19)와 (20)을 수식 (25)와 (26)에 각각 대입하여 정리하면,

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{t} \left( \sum_{k=1}^n S_{44}^{(k)} t_k \tau_{yz}^{(k)} + \sum_{k=1}^n S_{45}^{(k)} t_k \tau_{xz}^{(k)} \right) \quad (27)$$

$$= \left( \frac{1}{t} \sum_{k=1}^n S_{44}^{(k)} t_k \right) \tau_{yz} + \left( \frac{1}{t} \sum_{k=1}^n S_{45}^{(k)} t_k \right) \tau_{xz}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{t} \left( \sum_{k=1}^n S_{45}^{(k)} t_k \tau_{yz}^{(k)} + \sum_{k=1}^n S_{55}^{(k)} t_k \tau_{xz}^{(k)} \right) \quad (28)$$

$$= \left( \frac{1}{t} \sum_{k=1}^n S_{45}^{(k)} t_k \right) \tau_{yz} + \left( \frac{1}{t} \sum_{k=1}^n S_{55}^{(k)} t_k \right) \tau_{xz}$$

라미네이트의 대칭이며 밸런스한 적층패턴의 특성에서,  $\sum_{k=1}^n S_{45}^{(k)} t_k = 0$  임으로, 따라서 두께방향 전단변형률은 다음과 같이 정의된다.

$$\gamma_{yz} = \left( \frac{1}{t} \sum_{k=1}^n S_{44}^{(k)} t_k \right) \tau_{yz} = \overline{S_{44}} \tau_{yz} \quad (29)$$

$$\gamma_{xz} = \left( \frac{1}{t} \sum_{k=1}^n S_{55}^{(k)} t_k \right) \tau_{xz} = \overline{S_{55}} \tau_{xz} \quad (30)$$

$\overline{S_{44}}$ 와  $\overline{S_{55}}$ 는 수식의 편리함을 위해 임의로 정의하였고, 따라서 두께방향 전단계수는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$G_{yz} = \left( \frac{1}{t} \sum_{k=1}^n S_{44}^{(k)} t_k \right)^{-1} \quad (31)$$

$$G_{xz} = \left( \frac{1}{t} \sum_{k=1}^n S_{55}^{(k)} t_k \right)^{-1} \quad (32)$$

#### 4. 두께방향 열팽창계수 획득을 위한 이론

적층각이 대칭이며, 밸런스한 라미네이트에 온도하중이 작용하면, 수식 (1)~(3)은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\sigma_x = \overline{Q_{11}}(\varepsilon_x - \alpha_x \Delta T) + \overline{Q_{12}}(\varepsilon_y - \alpha_y \Delta T) + \overline{Q_{13}}(\varepsilon_z - \alpha_z \Delta T) + \overline{Q_{16}}(-\alpha_{xy} \Delta T) \quad (33)$$

$$\sigma_y = \overline{Q_{12}}(\varepsilon_x - \alpha_x \Delta T) + \overline{Q_{22}}(\varepsilon_y - \alpha_y \Delta T) + \overline{Q_{23}}(\varepsilon_z - \alpha_z \Delta T) + \overline{Q_{26}}(-\alpha_{xy} \Delta T) \quad (34)$$

$$\sigma_z = \overline{Q_{13}}(\varepsilon_x - \alpha_x \Delta T) + \overline{Q_{23}}(\varepsilon_y - \alpha_y \Delta T) + \overline{Q_{33}}(\varepsilon_z - \alpha_z \Delta T) + \overline{Q_{36}}(-\alpha_{xy} \Delta T) \quad (35)$$

라미네이트내에 온도가 변화할 때 두께방향으로의 하중은 거의 없고 그로인해 발생하는 응력  $\sigma_z$ 도 거의 없기 때문에 수식 (35)를  $\sigma_z=0$  으로 하여 정리하고 수식 (33)과 (34)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \left[ \overline{Q_{11}} - \frac{\overline{Q_{13}}^2}{\overline{Q_{33}}} \right] (\varepsilon_x - \alpha_x \Delta T) + \left[ \overline{Q_{12}} - \frac{\overline{Q_{13}} \overline{Q_{23}}}{\overline{Q_{33}}} \right] (\varepsilon_y - \alpha_y \Delta T) \\ &\quad + \left[ \overline{Q_{16}} - \frac{\overline{Q_{13}} \overline{Q_{36}}}{\overline{Q_{33}}} \right] (-\alpha_{xy} \Delta T) \\ &= \overline{Q_{11}}(\varepsilon_x - \alpha_x \Delta T) + \overline{Q_{12}}(\varepsilon_y - \alpha_y \Delta T) + \overline{Q_{16}}(-\alpha_{xy} \Delta T) \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \left[ \overline{Q_{12}} - \frac{\overline{Q_{13}} \overline{Q_{23}}}{\overline{Q_{33}}} \right] (\varepsilon_x - \alpha_x \Delta T) + \left[ \overline{Q_{22}} - \frac{\overline{Q_{23}}^2}{\overline{Q_{33}}} \right] (\varepsilon_y - \alpha_y \Delta T) \\ &\quad + \left[ \overline{Q_{26}} - \frac{\overline{Q_{23}} \overline{Q_{36}}}{\overline{Q_{33}}} \right] (-\alpha_{xy} \Delta T) \\ &= \overline{Q_{12}}(\varepsilon_x - \alpha_x \Delta T) + \overline{Q_{22}}(\varepsilon_y - \alpha_y \Delta T) + \overline{Q_{26}}(-\alpha_{xy} \Delta T) \end{aligned} \quad (37)$$

$\overline{Q_{16}}$ 과  $\overline{Q_{26}}$ 은 임의로 정의하였다. 수식 (36)과 (37)을 두께방향으로 적분하여 정리하면,

$$N_x = \overline{A_{11}} \varepsilon_x + \overline{A_{12}} \varepsilon_y + N_x^T \Delta T \quad (38)$$

$$N_y = \overline{A_{12}} \varepsilon_x + \overline{A_{22}} \varepsilon_y + N_y^T \Delta T \quad (39)$$

수식 (38)과 (39)의  $N_x^T$ 와  $N_y^T$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$N_x^T = \int_{-t/2}^{t/2} (\overline{Q_{11}} \alpha_x + \overline{Q_{12}} \alpha_y + \overline{Q_{16}} \alpha_{xy}) dz \quad (40)$$

$$N_y^T = \int_{-t/2}^{t/2} (\overline{Q_{12}} \alpha_x + \overline{Q_{22}} \alpha_y + \overline{Q_{26}} \alpha_{xy}) dz \quad (41)$$

온도변화로 인한 내부하중은 존재하지만 외부에서 작용하는 하중은 없으므로( $N_x = N_y = 0$ ), 라미네이트 평면방향(in-plane) 열팽창계수는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\alpha_x^{(0)} = \frac{\varepsilon_x}{\Delta T} = \frac{[A_{22} N_x^T - A_{12} N_y^T]}{[A_{11} A_{22} - A_{12}^2]} \quad (42)$$

$$\alpha_y^{(0)} = \frac{\varepsilon_y}{\Delta T} = \frac{[A_{11} N_x^T - A_{12} N_y^T]}{[A_{11} A_{22} - A_{12}^2]} \quad (43)$$

수식 35)에서,

$$\varepsilon_z = \left[ \alpha_z + \frac{\overline{Q_{36}}}{\overline{Q_{33}}} \alpha_{xy} - \frac{\overline{Q_{13}}}{\overline{Q_{33}}} (\alpha_x^{(0)} - \alpha_x) - \frac{\overline{Q_{23}}}{\overline{Q_{33}}} (\alpha_y^{(0)} - \alpha_y) \right] \Delta T \quad (44)$$

주어진 라미네이트 층내에 일정한 두께방향 변형률  $\varepsilon_z$ 가 작용한다고 가정하면, 임의의 플라이층의 온도변화  $\Delta T$ 에 의한 두께변화는,

$$\Delta t^{(k)} = \varepsilon_z^{(k)} t^{(k)} \quad (45)$$

그리고, 임의의 플라이의 스트레인 변형률과 총두께에 대한 변화량은 각각 다음과 같다.

$$\varepsilon_z^{(k)} = \left[ \alpha_z^{(k)} + \frac{\overline{Q_{36}}^{(k)}}{\overline{Q_{33}}^{(k)}} \alpha_{xy}^{(k)} - \frac{\overline{Q_{13}}^{(k)}}{\overline{Q_{33}}^{(k)}} (\alpha_x^{(0)} - \alpha_x^{(k)}) - \frac{\overline{Q_{23}}^{(k)}}{\overline{Q_{33}}^{(k)}} (\alpha_y^{(0)} - \alpha_y^{(k)}) \right] \Delta T \quad (46)$$

$$\Delta t = \sum_{k=1}^n \Delta t^{(k)} = \sum_{k=1}^n \varepsilon_z^{(k)} t^{(k)} \quad (47)$$

따라서, 두께방향 열팽창계수 수식은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} \alpha_z &= \frac{\Delta t}{t} \left( \frac{1}{\Delta T} \right) \\ &= \frac{1}{t} \sum_{k=1}^n \left[ \alpha_z^{(k)} + \frac{\overline{Q_{36}}^{(k)}}{\overline{Q_{33}}^{(k)}} \alpha_{xy}^{(k)} - \frac{\overline{Q_{13}}^{(k)}}{\overline{Q_{33}}^{(k)}} (\alpha_x^{(0)} - \alpha_x^{(k)}) - \frac{\overline{Q_{23}}^{(k)}}{\overline{Q_{33}}^{(k)}} (\alpha_y^{(0)} - \alpha_y^{(k)}) \right] t^{(k)} \end{aligned} \quad (48)$$

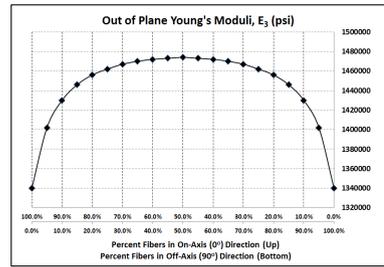
### 5. 결과 및 고찰

본 논문에서 찾아낸 수식(16), (17), (18), (31), (32) 그리고 (48)을 적용하여 섬유층의 적층패턴을 달리하는 라미네이트의 물성치 변화를 비교하였다. 두께방향 물성치 계산을 위한 복합재료 플라이 물성치는 AS3501 복합재가 사용되었고, 재료의 물성치는 Table 1에 표현하였다.

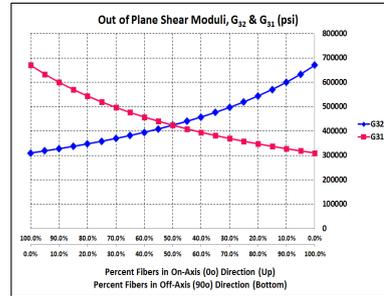
Table 1. AS3501 Material Properties

Ply Engineering Constants	AS3501 (CFRP)
$E_1$ (Msi)	19.1
$E_2$ (Msi)	1.36
$E_3$ (Msi)	1.34
$G_{12}$ (Msi)	0.84
$G_{23}$ (Msi)	0.31
$G_{31}$ (Msi)	0.67
$\nu_{12}$	0.3
$\nu_{13}$	0.28
$\nu_{23}$	0.34
$\alpha_1$ ( $10^{-5}$ , length/length/°F)	0.0433
$\alpha_2$ ( $10^{-5}$ , length/length/°F)	16.1
$\alpha_3$ ( $10^{-5}$ , length/length/°F)	16.1

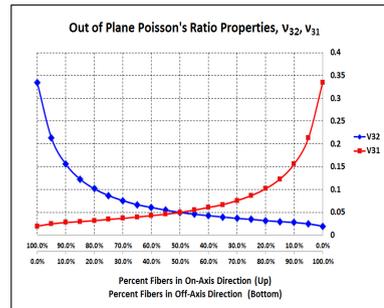
먼저 물성치 비교의 첫 번째의 경우는 0°(on-axis) 섬유방향만으로 이루어진 라미네이트 적층패턴에서 90°(off-axis) 섬유방향의 비율을 10%씩 높여가며 라미네이트의 두께방향 물성치 변화를 Fig. 3과 같이 비교하였다. Fig. 3의 결과를 얻기 위해 수식에 사용된 적층패턴은 다음과 같다. 먼저 라미네이트가 100% 0도 방향으로만 구성되어있다고 가정하고 [0<sub>20</sub>], 90도 섬유방향의 비율을 10%씩 증가시켰다(예: [0<sub>20</sub>], [0<sub>9</sub>,90<sub>2</sub>,0<sub>9</sub>], [0<sub>8</sub>,90<sub>4</sub>,0<sub>8</sub>], [0<sub>7</sub>,90<sub>6</sub>,0<sub>7</sub>],...[90<sub>20</sub>]). Fig. 3의 두 개의 수평선은 라미네이트내의 섬유방향의 성분 비율을 나타낸 것으로, 수평선의 위의 수치는 0도 방향의 섬유방향 비율을 나타내고, 아래 수치는 그에 상응하는 90도 방향의 섬유방향 비율을 나타낸다. Fig. 3에서의 결과와 같이, 섬유방향이 모두 0도이거나 90도로 이루어진 라미네이트의 경우 라미네이트의 두께방향 물성치값이 라미나 물성치와 동일한 수치를 나타냄을 알 수 있다( $E_3$ ,  $G_{31}$ ,  $G_{32}$ , and  $\alpha_3$ ). 하지만 라미네이트를 구성하고 있는 총플라이 수 중 90도 섬유방향의 비율이 20% 이상이면 탄성계수 물성치값이 최대 9.8%(1.34Mpa~1.456Mpa) 변화하고, 전단 탄성계수의 경우에는 최대 50% 이상 (0.67Mpa~0.31Mpa), 그리고 열팽창계수의 경우 최대 28%이상( $1.6 \times 10^{-5} \sim 2.058 \times 10^{-5}$ ) 변화하는 것으로 나타났다.



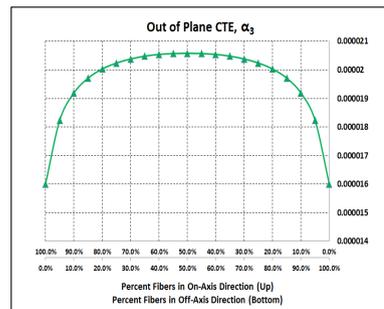
a)  $E_3$



b)  $G_{33}$  &  $G_{31}$



c)  $\nu_{32}$  &  $\nu_{31}$

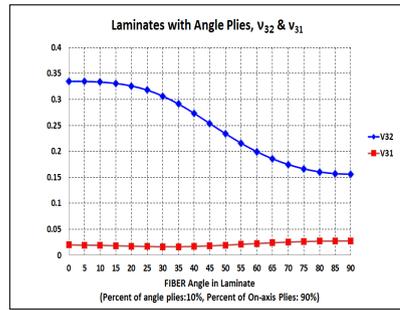


d)  $\alpha_3$

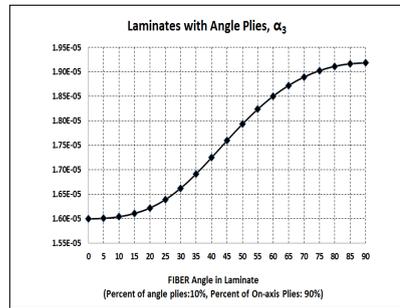
Fig. 3. Comparison of out-of-plane thermo-elastic properties, a)  $E_3$ , b)  $G_{33}$  &  $G_{31}$ , c)  $\nu_{32}$  &  $\nu_{31}$ , d)  $\alpha_3$  (initially 100% 0° plies and gradually increase percent of 90° plies by 10% increment)

두 번째는 라미네이트를 구성하고 있는 총플라이 수 비율 중 섬유각도의 변화에 따른 물성치 변화의 민감도를 찾기 위해 다음과 같이 적층패턴을 구성하고 라미네이트의 두께방향 물성치 변화를 구하였다. 먼저 0도방향 섬유각도를 가지는 섬유비율을 90%이상이라고 가정하고, 나머지 10%의 섬유각도를 5도에서 90도까지 변화시킨 후 물성치값의 변화를 체크하였다. 그 결과는 Fig. 4에 나타내었고, 사용되어진 적층패턴은 다음과 같이 정의하였다. 먼저 처음 조건은 100% 0도(on-axis) 섬유방향 라미네이트를 가정하였고  $[0_{20}]$ , 0도 섬유방향 비율을 90%로 고정 시킨 후 나머지 10%의 섬유비율에 해당하는 섬유각도를 5도씩 점차적으로 증가시켜 물성치를 계산하였다(예: $[0_{20}]$ ,  $[0_9,5_2,0_9]$ ,  $[0_9,10_2,0_9]$ ,  $[0_9,15_2,0_9]$ ,  $[0_9,20_2,0_9]$ ,  $[0_9,25_2,0_9]$ ,... $[0_9,90_2,0_9]$ ). Fig. 4의 결과로 미루어 보건데 라미네이트내의 섬유의 비율이 최소 10%이고 섬유각도가 15도 이상의 라미네이트의 경우에 플라이 두께방향 물성치값에서 급격히 벗어나는 것을 알 수 있다.

Fig. 3과 4의 결과로 미루어 볼 때, 라미네이트의 두께방향 물성치는 라미네이트를 구성하고 있는 적층패턴(적층각, 섬유의 성분)에 영향을 받는 것으로 나타났다.

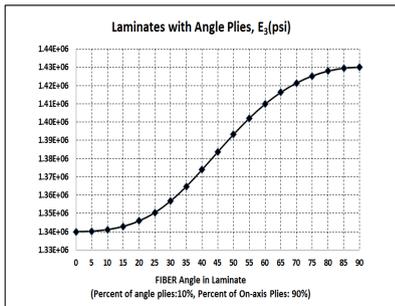


c) ν<sub>32</sub> & ν<sub>31</sub>

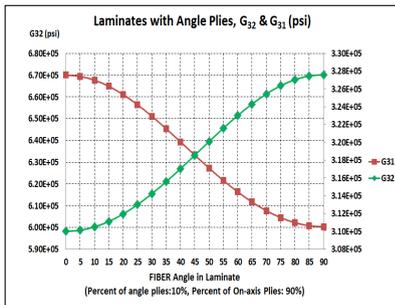


d) α<sub>3</sub>

Fig. 4. Comparison of out-of-plane thermo-elastic properties, a)E<sub>3</sub>, b)G<sub>33</sub> & G<sub>31</sub>, c)ν<sub>32</sub> & ν<sub>31</sub>, d) α<sub>3</sub> (set percentage of 0° plies is 90% and fiber orientation in rest of the 10% plies gradually increase by 5° increment upto 90°)



a) E<sub>3</sub>



b) G<sub>33</sub> & G<sub>31</sub>

## 6. 결론

본 연구를 통해 단방향 복합재료를 적층한 라미네이트의 두께방향 열탄성 물성치 계산식을 정리하였고, 라미네이트의 두께방향 물성치는 플라이 수 대비 섬유방향 성분과 비율의 영향을 받는 것으로 나타났다. 결과로 얻어진 물성치 값들을 비교해 볼 때, 단방향 섬유성분(100% 0도)으로 이루어진 라미네이트 물성치값은 라미나의 물성치와 동일한 것으로 나타났지만, 단방향 섬유방향(0도)과 직교하는(90도) 섬유 성분의 비율을 높여가며 비교해 보면 기준에 물성치로 가정하는 플라이의 물성치값보다 최대 10%이상 변화하는 것으로 나타났으며, 전체 라미네이트를 구성하는 섬유 성분 중 단지 10%가 15도 이상의 섬유방향으로 이루어진 라미네이트의 경우에도 두께방향 물성치값이 변화하는 것으로 나타났다.

본 논문에서는 다양한 적층패턴으로 인한 두께방향 물성치의 변화를 보여주기 위해 섬유비율을 각각 0도,

90도로 제한하거나 또는 0도 이외의 섬유각도의 비율을 최대 10%만 고려하여 물성치 변화를 계산하였지만, 일반적으로 구조 설계에 적용되는 복합재료 적층패턴의 섬유각은 최적화를 위해 [0도, ±45도, 90도]를 적층각으로 사용하는 경우가 대부분이며, 구조의 강성 및 전단력, 굽힘력 및 비틀림을 고려한 이상적인 섬유비율은 [50%/40%/10%], [40%/40%/20%] 또는 [30%/40%/30%]의 비율이 많이 사용되고 있으며, 정밀도를 요구하는 광학장비 구조물은 0도, 90도, ±45도 이외에 더 다양한 섬유각을 사용하고 있으며 그 비율도 다양하기 때문에 정확한 라미네이트의 두께방향 물성치가 요구된다. 그러한 측면에서 본 연구에서 제시한 방법은 복합재 구조물에 실질적으로 많이 적용되어지는 단방향 복합재를 이용한 라미네이트의 두께방향 물성치를 얻는 데에 도움을 줄 수 있을 것으로 예상되어 복합재 구조물 특히 복합재광학(Composite Optics) 구조물의 설계 및 해석에 널리 활용될 수 있을 것으로 예상된다.

## References

- [1] J. Hochhalter, A. Maji, D. Reicher, "Process Induced Errors in Replicated Carbon Fiber Reinforced Polymer Mirrors", *Proceedings of the Ninth Biennial ASCE Aerospace Division International Conference on Engineering, Construction, and Operations in Challenging Environments*, pp. 875-882. 2004.  
DOI: [http://dx.doi.org/10.1061/40722\(153\)120](http://dx.doi.org/10.1061/40722(153)120)
- [2] J. Massarello, J. Hochhalter, P. Fuierer, A. Maji, "Composite mirror replication: curing, coating and polishing", *Proc. SPIE Vol. SPIE-5868*, pp. 210-219. 2005.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.1117/12.614603>
- [3] H.E. Bennett, H.F. Blazek, A.O. Danielson, "Large lightweight low scatter composite active/adaptive mirror development", *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, p 63060Q, 2006.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.1117/12.687503>
- [4] R. C. Romeo, R. Martin, "Progress in 1m-class lightweight, CFRP composite mirrors for the ULTRA telescope", *Proceedings of SPIE -The International Society for Optical Engineering*, p 62730S, 2006.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.1117/12.672221>
- [5] Michael W. Hyer, *Stress Analysis of Fiber-reinforced Composite Materials*, McGRAW-HILL International

Editions, 1998.

- [6] Ronald F. Gibson, *Principles of Composite Material Mechanics*, McGRAW-HILL, 1994.
- [7] Robert M. Jones, *Mechanics of Composite Materials*, CRC Press, 1998.
- [8] Laszlo P. Kollar, George S. Springer, *Mechanics of Composite Structures*, Cambridge University Press, 2009.
- [9] Isaac M. Daniel, Ori Ishai, *Engineering Mechanics of Composite Materials*, Oxford Uni. Press, 1994.

김 경 표(Kyung-Pyo Kim)

[정회원]



- 2005년 5월 : Univ. of Kansas (기계공학석사)
- 2009년 5월 : Univ. of Kansas (항공우주공학박사)
- 2010년 2월 ~ 2012년 2월 : 한국항공우주연구원 선임연구원
- 2012년 2월 ~ 현재 : 대한항공기술평가연구원 선임연구원

<관심분야>

복합재역학, 복합재광학