Journal of the Korea Academia-Industrial cooperation Society
Vol. 17, No. 12 pp. 226-231, 2016

http://dx.doi.org/10.5762/KAIS.2016.17.12.226
ISSN 1975-4701 / eISSN 2288-4688

이항분포모형에 일반화된 카탈란 수를 적용한 배리어 옵션의 가격 산정

최승일
공주대학교 산업시스템공학과

Barrier Option Pricing with Binomial Trees Applying Generalized Catalan Numbers

Seung-il Choi
Department of Industrial & Systems Engineering, Kongju National University

요 약 본 논문에서는 배리어 옵션의 가격 산정을 위해 이항분포모형을 사용한다. 경로의존형 옵션인 배리어 옵션의 가격 산정을 위해서는 이항트리의 말단에서 역방향으로 진행하면서 개별 노드들의 옵션 가치를 계산하여 옵션 가격을 산정하게 된다. 이항트리의 말단에서는 배리어 도달 여부를 판단하기 어려운데, 카탈란 수를 일반화하여 배리어에 도달하지 않은 경우의 수를 구하고자 한다. 일정한 범위에서 움직이는 경로의 수를 파악하기 위해 카탈란 수에 상한과 하한을 부여하는 방식으로 일반화한다. 이항분포모형에서 배리어 도달 여부는 가격 상승과 가격 하락 횟수의 차이가 일정한 범위에 있는지를 판단하여 결정한다. 상한과 하한을 부여한 일반화된 카탈란 수를 활용하여 가격 상승과 가격 하락 횟수의 차이가 일정한 범위에 있는 경우의 수를 구할 수 있으면, 이항트리 말단에서 배리어에 도달하지 않았을 확률을 계산할 수 있다. 이항트리 말단에서의 옵션 가치와 배리어에 도달하지 않았을 확률을 이용하여 만기의 옵션 기대값을 계산하고 이를 현재 시점으로 할인하여 배리어 옵션 가격을 구하게 된다. 이항분포모형을 이용한 기존의 방법은 중간 단계의 옵션 가치를 모두 계산해야 하지만, 일반화된 카탈란 수를 적용한 방법은 이항트리 말단에서의 옵션 가치만으로도 옵션 가격 산정이 가능하고 만기시점의 옵션 행사 확률에 대한 분포를 얻을 수 있다. 상한과 하한을 부여하여 일반화된 카탈란 수는 배리어 옵션 가격 산정뿐만 아니라 다양한 분야에 활용할 수 있을 것으로 기대된다.

Abstract Binomial trees are used to price barrier options. Since barrier options are path dependent, option values of each node are calculated from binomial trees using backward induction. We use generalized Catalan numbers to determine the number of cases not reaching a barrier. We will generalize Catalan numbers by imposing upper and lower bounds. Reaching a barrier in binomial trees is determined by the difference between the number of up states and down states. If we count the cases that the differences between the up states and down states remain in a specific range, the probability of not reaching a barrier is obtained at a final node of the tree. With probabilities and option values at the final nodes of the tree, option prices are computable by discounting the expected option value at expiry. Without calculating option values in the middle nodes of binomial trees, option prices are computable only with final option values. We can obtain a probability distribution of exercising an option at expiry. Generalized Catalan numbers are expected to be applicable in many other areas.

Keywords : Barrier Option, Binomial Tree, Catalan Number, Knock-Out Option, Knock-In Opion, Option Price

1. 서론

경로의존형 옵션인 배리어 옵션의 가격을 산정하기 위해서는 가격 변동 경로에 대한 이해가 필요하다. 배리

이 논문은 2012년 공주대학교 학술연구지원사업의 연구지원에 의하여 연구되었음
*Corresponding Author : Seung-il Choi(Kongju National University)
Tel: +82-41-521-9436 email: sichoi@kongju.ac.kr
Received October 31, 2016 Revised November 22, 2016
Accepted December 8, 2016 Published December 31, 2016

어 옵션의 가격을 구하는 방법에는 블랙숄즈모형을 가정하고 일반옵션으로 복제 포트폴리오를 구성하는 방법, 이항분포모형을 이용하는 방법, 편미분 방정식을 이용하는 방법 등이 있다[1-3].

본 연구에서는 가격 변동 경로를 이해하기 쉬운 이항분포모형을 적용하는데, 배리어에 도달하지 않은 경우의 수를 구하기 위해 카탈란 수를 일반화하여 사용한다. 카탈란 수는 n x n 정방 격자에서 대각선 위를 지나지 않는 최단 경로의 수를 나타내는 것으로 여러 가지 다른 의미로 해석될 수 있다[4-5]. 이러한 카탈란 수를 일반화하려는 시도는 다양하게 이루어져 왔는데[6-7], 본 연구에서는 기존의 방식들과는 다르게 일반화한다. 배리어 옵션의 가격 산정을 위해 대각선의 위치를 이동하여 상한과 하한을 부여하는 방식으로 일반화하고 이를 이용하여 중간 단계의 옵션 가치를 산출하지 않고 이항트리 말단에서의 옵션 가치만으로도 가격 산정이 가능함을 보인다.

실물 경영환경에 적용하는 실물옵션에는 성장옵션, 포기옵션, 연기옵션 등이 있는데, 포기옵션은 배리어 옵션과 유사한 특징을 갖는다[8]. 실물옵션의 다양한 응용사례를 살펴보면[9-11], 본 연구를 실물옵션에도 적용할 수 있을 것으로 기대된다.

2장에서는 이항분포모형을 이용한 배리어 옵션의 가격 산정 방법을 설명하고, 3장은 상한과 하한을 부여하여 일반화된 카탈란 수의 정의와 특징을 살펴본다. 4장에서는 상한과 하한을 부여하여 일반화된 카탈란 수를 이항분포모형에 적용하는 방법과 이러한 방법의 장점에 대해 설명한다.

2. 배리어 옵션 가격 산정

2.1 배리어 옵션 개념

배리어 옵션은 기초자산의 가격이 일정 기간 동안 일정 수준에 도달했는지 여부에 의하여 이득이 결정되는 옵션이다. 배리어 옵션은 녹아웃 옵션(knock-out option)과 녹인 옵션(knock-in option)으로 구분된다. 녹아웃 옵션은 기초자산의 가격이 일정 수준에 도달하면 효력이 소멸되는 옵션이고, 녹인 옵션은 기초자산의 가격이 일정 수준에 도달하면 효력이 발생하는 옵션이다.

녹아웃 옵션은 상향녹아웃 옵션(up-and-out option)과 하향녹아웃 옵션(down-and-out option)으로, 녹인 옵션은 상향녹인 옵션(up-and-in option)과 하향녹인 옵션(down-and-in call option)으로 구분할 수 있다.

2.2 이항분포모형을 적용한 가격 산정

이항분포모형은 CRR(Cox-Ross-Rubinstein)모형이라고도 하는데, 기초자산의 가격변동이 이항분포를 따른다고 가정한다. 먼저 옵션의 만기를 짧은 기간 Δt로 나누고, 매 기간 기초자산 가격이 S_0에서 $S_0 u$로 상승하거나 $S_0 d$로 하락한다고 가정한다. 가격이 상승할 확률은 p이고 가격이 하락할 확률은 $1-p$이다. 위험중립가치평가원칙을 적용하여 모수 p, u, d를 구해보면 다음과 같은 관계를 얻는다[12].

$$p = \frac{a-d}{u-d},$$
$$where\ a = e^{r\Delta t}, u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, d = 1/u$$

이항분포모형에서 $S_0 = 100$이고 행사가격 $K = 95$인 유럽형 콜옵션의 가격을 산정하기 위해, $r = 0.06$, $\sigma = 0.2$, $\Delta t = 0.5$라고 가정하면 다음과 같이 옵션가격을 구할 수 있다.

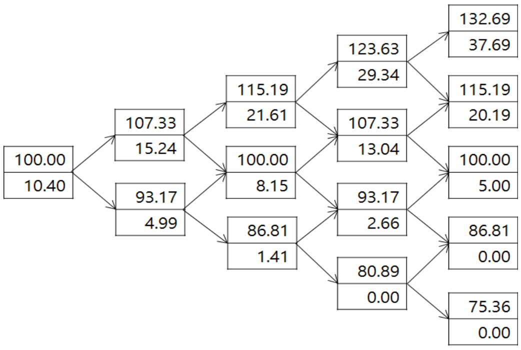

Fig. 1. A Binomial Tree for European Call Option

경로의존형 옵션인 배리어 옵션의 가격 산정에도 이항분포모형을 유용하게 활용할 수 있다. 유럽형 옵션의 이항트리에서 녹아웃 옵션은 배리어에 도달한 노드의 옵션가격을 0으로 설정하여 가격을 산정한다. 배리어가 같은 녹인 옵션과 녹아웃 옵션 가격의 합은 배리어가 없는 유럽형 옵션의 가격이 되므로, 녹인 옵션의 가격도 구할 수 있다.

먼저 이항분포모형에서 $S_0=100, K=95$이고 배리어 $B=90$인 하향녹아웃 콜옵션의 가격을 산정하기 위해, $r=0.06, \sigma=0.2, \Delta t=0.5$라고 가정하면 다음과 같이 옵션가격을 구할 수 있다.

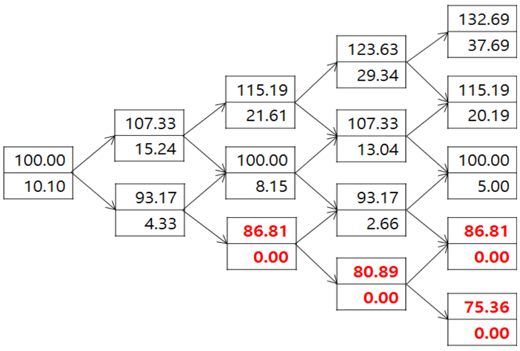

Fig. 2. A Binomial Tree for down-and-out Call Option

이항분포모형에서 $S_0=100, K=95$이고 배리어 $B=110$인 상향녹아웃 콜옵션의 가격을 산정하기 위해, $r=0.06, \sigma=0.2, \Delta t=0.5$라고 가정하면 다음과 같이 옵션가격을 구할 수 있다.

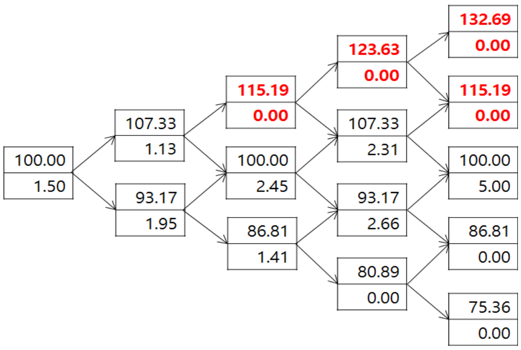

Fig. 3. A Binomial Tree for up-and-out Call Option

3. 카탈란 수의 일반화

3.1 카탈란 수 개념

m개의 1과 n개의 -1로 이루어진 수열 중 처음 k 개로 이루어진 부분수열의 합이 모두 0보다 큰 경우의 수를 $C(m,n)_0$으로 나타내기로 한다. 이러한 수 중 m과 n이 같을 때 카탈란 수(C_n)라고 하고, $C(n,n)_0=C(2n,n)/(n+1)$으로 구할 수 있다. 카탈란 수는 n x n 정방 격자에서 왼쪽 아래 모서리부터 오른쪽 위 모서리까지 대각선 위로 가지 않는 최단경로의 수, (n+2)각형을 n개의 삼각형으로 나누는 방법의 수, (n+1)개의 항에 이항연산자를 적용하는 방법의 수 등을 의미한다.

3.2 카탈란 수의 일반화 방안

Bailey의 정의를 일반화하여 m개의 1과 n개의 -1로 이루어진 수열 중 처음 k개로 이루어진 부분수열의 합이 모두 L보다 크거나 같을 때 $C(m,n)_L$이라고 정의한다. 이렇게 일반화한 카탈란 수는 $m<n+L$일 때 0의 값을 가지며 다음과 같은 관계를 만족한다.

$$C(m,n)_L=1 \text{ for } m=0 \text{ or } n=0$$
$$C(m,n)_L=C(m-1,n)_L+C(m,n-1)_L$$

Table 1. Generalized Catalan Numbers with L=0

m \ n	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	2			
3	1	3	5	5		
4	1	4	9	14	14	
5	1	5	14	28	42	42

위에서 대각선 원소는 카탈란 수 C_n이며, L=-1, L=-2에 대해 일반화된 카탈란 수를 구해보면 다음의 결과를 얻는다.

Table 2. $C(m,n)_L$ with L=-1

m \ n	0	1	2	3	4	5
0	1	1				
1	1	2	2			
2	1	3	5	5		
3	1	4	9	14	14	
4	1	5	14	28	42	42
5	1	6	20	48	90	132

Table 3. $C(m,n)_L$ with L=-2

m \ n	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1			
1	1	2	3	3		
2	1	3	6	9	9	
3	1	4	10	19	28	28
4	1	5	15	34	62	90
5	1	6	21	55	117	207

m개의 1과 n개의 -1로 이루어진 수열 중 처음 k개로 이루어진 부분수열의 합이 모두 L보다 작거나 같을 때 $C(m,n)^L$이라고 정의한다. 1과 -1의 역할을 바꾸어 보면 $C(m,n)^L = C(n,m)_{-L}$이 성립함을 알 수 있다.

Table 4. C(m,n)^L with L=1

m \ n	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6
2		2	5	9	14	20
3			5	14	28	48
4				14	42	90
5					42	132

Table 5. C(m,n)^L with L=2

m \ n	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6
2	1	3	6	10	15	21
3		3	9	19	34	55
4			9	28	62	117
5				28	90	207

4. 일반화된 카탈란 수의 적용

4.1 카탈란 수 적용 사례

2장의 이항분포모형에서 제시한 하향녹아웃옵션과 상향녹아웃옵션의 가격 산정 사례에서는 중간 노드의 옵션 가격을 이용하였다. 하지만 4장에서는 만기 노드에 도달하는 확률을 일반화된 카탈란 수를 적용하여 계산한 후 만기에서의 기대값을 할인하여 옵션 가격을 산정한다.

먼저 이항분포모형에서 $S_0 = 100, K = 95$이고 배리어 $B = 90$인 하향녹아웃 콜옵션의 가격을 산정하기 위해, $r = 0.06, \sigma = 0.2, \Delta t = 0.5$라고 가정한다.

가격 상승보다 가격 하락이 2번 이상 이루어지면 배리어에 도달하므로 일반화된 카탈란 수에서 L=-2인 경우를 고려한다. 위 그림에서 빨간 색으로 표시된 가격은 배리어에 도달하여 옵션의 효력이 상실된 것을 나타낸다.

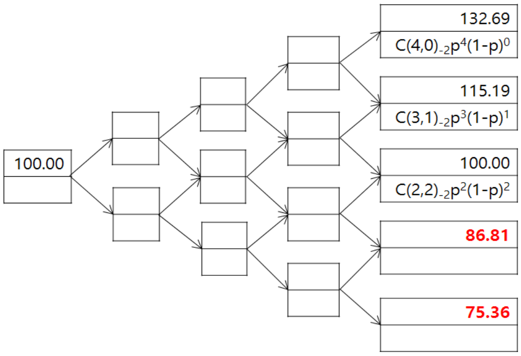

Fig. 4. Probabilities at expiry for down-and-out Call Option

만기 노드에서의 옵션 가치와 일반화된 카탈란 수를 적용한 확률을 이용하여 만기에서의 기대값을 계산하고 이를 a^4으로 나누어 현재 시점으로 할인해 주면 하향녹아웃옵션의 가격이 구해지는데 2.2절에서 계산한 값과 일치한다.

이항분포모형에서 $S_0 = 100, K = 95$이고 배리어 $B = 110$인 상향녹아웃 콜옵션의 가격을 산정하기 위해, $r = 0.06, \sigma = 0.2, \Delta t = 0.5$라고 가정한다.

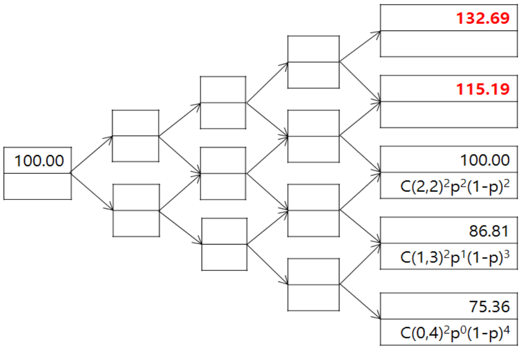

Fig. 5. Probabilities at expiry for up-and-out Call Option

가격 하락보다 가격 상승이 2번 이상 이루어지면 배리어에 도달하므로 일반화된 카탈란 수에서 L=2인 경우를 고려한다. 하향녹아웃 콜옵션과 마찬가지로 빨간 색으로 표시된 가격은 배리어에 도달하여 옵션의 효력이 상실된 것을 나타낸다.

만기에서 옵션 행사가 가능한 노드가 하나 밖에 없는데 이 때의 옵션 가치가 5이므로, 여기에 일반화된 카탈란 수를 적용한 확률을 곱하여 만기에서의 기대값을 계

산한다. 이 값을 a^4으로 나누어 현재 시점으로 할인해 주면 상향녹아웃옵션의 가격이 구해지는데 2.2절에서 계산한 값과 일치한다.

4.2 카탈란 수를 적용한 산식

하향녹아웃 콜옵션과 상향녹아웃 콥옵션의 가격을 일반화된 카탈란 수를 적용하여 산출하는 과정을 살펴보았다. 이를 많은 수의 짧은 기간 $\Delta t(=1/n)$으로 확대하여 산식을 유도하면 다음과 같다.

먼저 배리어에 도달하기 위한 가격 상승과 가격 하락의 횟수 차이를 구하여 L을 결정한다.

하향녹아웃 콜옵션의 경우 일반화된 카탈란 수를 적용한 산식은 다음과 같다.

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} C(n-k,k)_L p^{n-k}(1-p)^k Max(S_0 u^{n-k} d^k - K, 0)}{a^n}$$

상향녹아웃 콜옵션의 경우에는 위 식에서 $C(n-k,k)_L$을 $C(n-k,k)^L$로 바꾸어 쉽게 산식을 구할 수 있다.

하향녹아웃 콜옵션의 산식에서 $C(n-k,k)_L$를 $C(n,k)$로 바꾸면 배리어가 없는 유럽형 콜옵션의 가격을 구하는 산식이 되고 배리어가 같은 녹인 옵션과 녹아웃 옵션 가격의 합은 배리어가 없는 유럽형 옵션의 가격이 되므로, $C(n-k,k)_L$를 사용하는 대신에 $C(n,k)-C(n-k,k)_L$를 적용하면 하향녹인 콜옵션의 가격을 구하는 산식을 얻게 된다.

지금까지 콜옵션에 대해 살펴보았는데, 배리어가 있는 풋옵션의 가격을 산정하기 위해서는 콜옵션에 대한 산식에서 $Max(S_0 u^{n-k} d^k - K, 0)$로 되어있는 부분을 $Max(K - S_0 u^{n-k} d^k, 0)$로 바꾸면 산식을 쉽게 유도할 수 있다.

5. 결론

이색 옵션에 속하는 배리어 옵션의 가격을 산정하기 위해 이항분포모형을 이용하였다. 기존의 방식은 이항트리의 말단에서부터 역방향으로 진행하면서 개별 노드들의 옵션 가치를 모두 구하여 옵션 가격을 산정한다. 이에 반해 상한과 하한을 부여하여 일반화된 카탈란 수를 정의하면 이항트리의 말단에서의 정보만으로 옵션 가격을 구할 수 있다.

먼저 상한과 하한을 부여하여 일반화된 카탈란 수를 이용하여 이항트리의 말단에서 중도에 배리어에 도달하지 않았을 확률을 구한다. 하향녹아웃 옵션의 경우는 하한을 부여한 카탈란 수를, 상향녹아웃 옵션의 경우는 상한을 부여한 카탈란 수를 이용한다.

이항트리의 말단에서의 옵션 가치와 배리어에 도달하지 않았을 확률을 가지고 기대값을 계산한 후 현재 가치로 할인하면 옵션 가격을 얻을 수 있다. 이러한 방식으로 중간 단계의 옵션 가치를 계산하는 과정을 생략할 수 있으며, 만기 시점 옵션 행사 확률에 대한 분포를 얻을 수 있다. 또한 동일한 배리어를 가진 녹인 옵션과 녹아웃 옵션 가격의 합은 배리어가 없는 유럽형 옵션의 가격이 되므로, 녹인 옵션의 가격은 녹아웃 옵션의 가격으로부터 구할 수 있다.

상한과 하한을 부여하여 일반화된 카탈란 수를 이항분포모형에 적용하면 배리어 옵션의 가격을 보다 간편하게 계산할 수 있으며, 카탈란 수의 다양한 응용 사례에서 볼 수 있듯이 새로운 방식으로 일반화된 카탈란 수도 더 많은 분야에서 활용될 것으로 기대된다.

References

[1] E. D. Derman, D. Ergener, I. Kani, "Static Options Replication", *The Journal of Derivatives,* 2(4), pp. 78-95, 1995.
DOI: https://doi.org/10.3905/jod.1995.407927

[2] P. P. Boyle, S. H. Lau, "Bumping Up Against the Barrier with the Binomial Method", *The Journal of Derivatives,* 1(4), pp. 6-14, 1994.
DOI: https://doi.org/10.3905/jod.1994.407891

[3] R. Zvan, K. R. Vetzal, P. A. Forsyth, "PDE Methods for Pricing Barrier Options", *Journal of Economic Dynamics and Control,* 24, pp. 1563-1590, 2000.
DOI: https://doi.org/10.1016/S0165-1889(00)00002-6

[4] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics. Vol. 2,* Cambridge University Press, 1999.
DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511609589

[5] T. Koshy, *Catalan numbers with applications,* Oxford University Press, 2008.
DOI: https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780195334548.001.0001

[6] D. D. Frey, J. A. Sellers, "Generalizing Bailey's

Generalization of the Catalan Numbers", *Fibonacci Quarterly*, 39, pp. 142-148, 2001.

[7] H. K. Ju, S. C. Park, "On the Generalized Catalan Numbers", *Korean Annals of Math.,* 21(2), pp. 169-176, 2004.

[8] J. Y. Kim, Y. K. Kim, "The Valuation of Real Estate Development by the Real Option Model", *Journal of Appraisal,* 7(2), pp. 1-18, 2008.

[9] D. Kim, K. Jung, J. Kim, “An Evaluation of Venture Business by ROV”, *Journal of the Korea Academia-Industrial Cooperation Society*, 4(3), pp. 289-295, 2003.

[10] S. Gu, W. Ping, S. Y. Jang, “A Study on Valuation of Foreign Real Estate Investment Using Real Option”, *Journal of the Korea Academia-Industrial Cooperation Society*, 14(11), pp. 5465-5475, 2013.
DOI: https://doi.org/10.5762/KAIS.2013.14.11.5465

[11] T. Park, E. Shin, Y. Lee, “Valuation of Highway O&M Contract Using Real Option”, *Journal of the Korea Academia-Industrial Cooperation Society*, 14(11), pp. 5964-5970, 2013.
DOI: https://doi.org/10.5762/KAIS.2013.14.11.5964

[12] J. C. Hull, *Fundamentals of Futures and Options Markets,* pp. 368-391, Pearson Education Korea, 2005.

최 승 일(Seung-il Choi) **[종신회원]**

- 1996년 2월 : 서울대학교 수학과 (학사)
- 2000년 12월 : University of Michigan, Mathematics (MS)
- 2001년 12월 : University of Michigan, Financial Engineering (MSE)
- 2002년 8월 : University of Michigan, Mathematics (PhD)
- 2005년 3월 ~ 현재 : 공주대학교 산업시스템공학과 부교수

<관심분야>
경제성공학, 금융공학, 게임이론, 네트워크분석