

암거 상부지반의 거동 평가를 위한 해석법 비교

이승현
선문대학교 건축사회환경학부

Comparison of analysis methods of estimating behavior of soil mass above rigid culvert

Seung-Hyun Lee

Division of Architecture, Architectural Engineering and Civil Engineering, Sunmoon University

요약 철근 콘크리트 암거 상부지반에 있어 아칭효과에 의한 지반의 상대적 변형 때문에 발생하는 침하거동을 평가하기 위해 Ritz 방법과 유한요소법을 적용하고 해석결과를 해석 해에 의한 결과와 상호 비교해 보았다. 유한요소법을 적용하여 절점외력을 구할 경우 요소별 국부좌표계에 관계없이 지표면으로부터의 깊이의 함수로 표현되는 전단응력이 반영되도록 주의할 필요가 있다. 암거 상부지반의 지표면에서의 변위는 해석방법에 상관없이 동일한 값을 보였다. Ritz 방법을 통해 구한 변위를 해석 해와 비교해 볼 때 가정한 변위의 차수를 증가시킬수록 해석 해에 근접한 결과를 보임을 알 수 있었다. 유한요소법에 의한 변위 또한 요소를 세분화 할수록 해석 해에 근접한 결과를 보임을 알 수 있었다. Ritz 방법에 의한 해석결과에 따르면 계산된 응력값이 해석 해에 근접한 결과를 보이지는 않았다. 유한요소법에 의한 응력의 경우 요소를 세분화 할수록 해석 해에 근접한 결과를 보였다. 본 연구에서 고려한 Ritz 방법과 유한요소법에 의한 해석결과를 해석 해와 비교한 결과 유한요소법에 의한 해석결과가 해석 해에 안정적으로 근접하는 결과를 보임을 알 수 있었다.

Abstract In order to estimate behavior of soil mass which is located straight up of reinforced concrete culvert, Ritz method and FEM were applied and arching effects between the soil mass and adjacent soil were considered for the analyses. Analysis results obtained from the Ritz method and finite element method were compared with analytical solution. In the case of estimating nodal forces considered in FEM, caution is needed that shear stress depending on depth from ground surface should be reflected regardless of local coordinate system. Comparing the displacements computed from Ritz method with those of the analytic solution, it is seen that as the power of assumed displacement function increases, differences between the computed displacements and those of analytic solution decreases. It seems that displacements of FEM becomes closer to those of analytical solution as the number of elements are increased. It is seen that stresses computed from the Ritz method don't get closer to those of the analytic solution as the power of assumed displacement function. Stresses from FEM become closer to those of analytic solution as the number of elements are increased. Comparing the analysis results from the Ritz method and FEM with those of analytic solution, it can be seen that FEM is more reliable than Ritz method.

Keywords : Behavior of soil mass, Reinforced concrete culvert, Ritz method, FEM, Displacements, Stesses

1. 서론

암거란 Fig. 1과 같이 지중에 설치되는 철근 콘크리트 구조물로서 주로 지중으로의 소규모 통로로서의 역할을

담당하게 된다. 암거의 재료로 철근 콘크리트를 사용하는 경우 암거의 강성은 주변지반에 비해 상대적으로 크게 되는데 비해 파형강관과 같은 연성재료를 사용하는 경우의 강성은 주변지반에 비해 상대적으로 작게 된다.

^{*}Corresponding Author : Seung-Hyun Lee(Sunmoon Univ.)

Tel: +82-41-530-2328 email: shlee02@sunmoon.ac.kr

Received May 10, 2018

Accepted August 3, 2018

Revised (1st May 28, 2018, 2nd June 4, 2018, 3rd June 11, 2018)

Published August 31, 2018

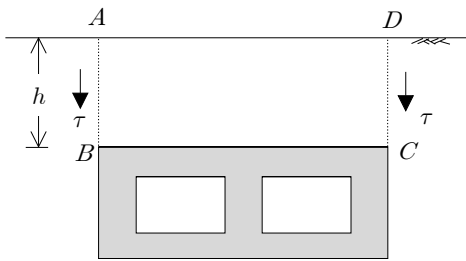


Fig. 1. Reinforced concrete culvert and deformation of soil mass above the culvert

Fig. 1에 나타난 철근 콘크리트 압거의 경우 주변지반에 대한 상대강성의 차이로 인해 이른바 아칭효과[1-2]가 생기게 되어 압거 상부의 두께 h 인 토체 ABCD와 그 주변의 토체 사이에는 상대적 변형이 생기게 된다. 즉 Fig. 1에서 토체 ABCD에 비해 그 주변 토체의 침하량이 더 크게 발생하게 된다. 이러한 토체 사이의 상대적 변형으로 인해 토체 ABCD의 측면에는 연직하향의 마찰력이 발생하게 된다. 본 연구에서는 Fig. 1에서 토체 ABCD를 연속체로 보고 연직하향의 마찰력에 의해 연속체에 발생하는 침하량을 평가하는 방법으로서 변분법(variational method)을 적용하여 보았는데 이를 해석 해(analytical solution)와 비교 분석하였다. 본 연구에 적용한 변분법은 Ritz 방법과 유한요소법이다.

2. 변분법의 이론적 배경

최소 포텐셜 에너지 원리는 변분법의 기본이 되는 원리로서 계(system)의 평형상태는 그것의 포텐셜 에너지가 최소가 될 때에만 평형상태에 있게 된다는 것이다 [3-4]. 최소 포텐셜 에너지 원리를 그림으로 나타내면 Fig. 2와 같다.

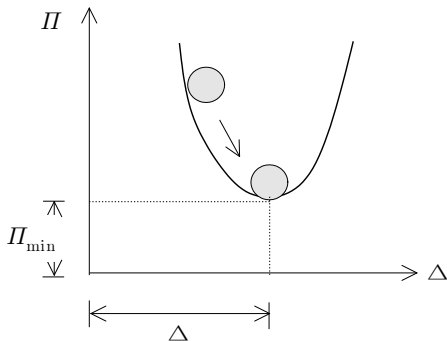


Fig. 2. Principle of minimum potential energy

Fig. 2에서 Π 는 계를 구성하는 포텐셜 에너지를 의미하며 Δ 는 계에 발생하는 변위를 의미한다. 계의 평형상태는 Fig. 2에 나타나 있는 바와 같이 변위, Δ 의 함수인 포텐셜 에너지, Π 가 최소가 될 때 달성된다는 것이 최소 포텐셜 에너지 원리이다. Fig. 2에는 물체가 당초 위치에서 평형상태에 존재하기 위해 최저점으로 이동된 상황이 나타나 있는데 경사면에 놓인 구슬이 굴러 평면에 이르러 정지상태에 놓이는 경우를 생각하면 쉽게 이해가 된다. Fig. 2에 나타난 포텐셜 에너지 곡선으로부터 포텐셜 에너지가 최저가 되는 점에서는 $\frac{\delta \Pi}{\delta \Delta} = 0$ 가 됨을 알 수 있다. 즉 포텐셜 에너지의 최저점에서 변위함수 Δ 의 미소 변화량, $\delta \Delta$ 에 의해 범함수(functional)의 변화량, $\delta \Pi$ 는 0이 됨을 알 수 있다. 따라서 최소 포텐셜 에너지의 수학적 표현은 $\delta \Pi = 0$ 이 된다. 탄성시스템 문제에서 최소 포텐셜 에너지 원리를 이용하여 미지수를 결정하기 위해서는 외력하에서의 탄성시스템의 포텐셜 에너지를 정식화하고 최소 포텐셜 에너지 조건을 식으로 표현하여 그로부터 미지수를 결정하게 된다.

3. 압거 상부지반의 침하량 평가

본 연구에서 고려하고자 하는 문제를 변분법을 통해 살펴보기 위해 Fig. 1에서의 토체 ABCD를 구성하는 미소요소에 작용하는 힘들을 나타내면 Fig. 3과 같다. Fig. 3에서 σ 와 τ_z 는 각각 미소요소에 작용하는 수직응력과 미소요소의 측면에 작용하는 전단응력을 의미한다.

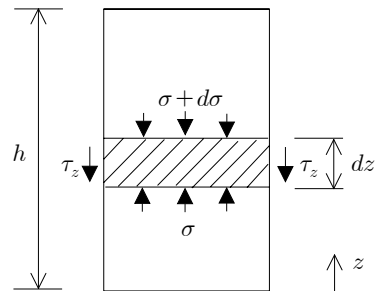


Fig. 3. Stresses acting on small element

변분법을 고려하기에 앞서 Fig. 3에 대한 해석 해를 먼저 살펴본다. Fig. 3에서 두께 dz 의 미소요소에 대한 힘의 평형조건을 나타내는 미분방정식으로부터 z 방향으

로의 연직변위량(u)과 응력(σ)을 구하면 각각 식 (1) 및 (2)와 같다.

$$u = \frac{Qp}{2EA} (h^2z - hz^2 + \frac{1}{3}z^3) \quad (1)$$

$$\sigma = \frac{Qp}{2A} (h^2 - 2hz + z^2) \quad (2)$$

식 (1) 및 (2)에서 $Q = K_h \gamma \tan \delta$ 을 의미하는데 K_h 는 마찰면에 대한 횡방향 토압계수, γ 는 흙의 단위중량 그리고 δ 는 마찰각을 의미한다. 또한 식 (1)에서 E 와 A 는 각각 흙의 탄성계수와 미소요소의 단면적을 의미하며 p 는 마찰응력이 작용하는 미소요소의 둘레길이를 의미한다.

3.1 포텐셜에너지

포텐셜 에너지(Π)는 역학적으로 $\Pi = U - W$ 로 표현 되는데 U 는 변형률에너지를 의미하며 $-W$ 는 외력에 의한 일을 의미한다. Fig. 3에 나타난 미소요소에 대한 변형률에너지와 외력에 의한 일을 구하여 포텐셜에너지를 나타내면 식 (3)과 같다.

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^h EA \left(\frac{du}{dz} \right)^2 dz + \int_0^h Qp(h-z)udz \quad (3)$$

3.2 Ritz 방법

Ritz 방법은 근사적 최소 포텐셜 에너지를 구할 수 있는 방법으로서 미지의 변위함수, $u(z)$ 를 식 (4)와 같이 가정하게 된다[5].

$$u(z) = \sum a_i \psi_i(z) \quad (4)$$

식 (4)에서 a_i 는 계수이며 $\psi_i(z)$ 는 경계조건을 만족 하는 좌표함수(coordinate function) 이다. $u(z)$ 는 범함수(functional)인 포텐셜 에너지, Π 의 종속변수가 되는데 Π 를 최소화 하는 문제를 미지수 a_i 에 의해 범함수의 최솟값 $\Pi_{\min} = \Pi(a_i)$ 를 결정하는 문제로 만들 수 있다[6]. 즉 포텐셜 에너지 함수를 최소화하기 위해 식 (5)와 같이 a_i 로 미분한 미분계수를 0으로 하여 얻게 되는

연립방정식을 통해 미지수 a_i 를 결정하게 된다[7].

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial a_3} = 0, \quad (5)$$

본 연구에서는 주어진 해를 구하기 위해 먼저 해를 $u = ax$ 로 가정하고 Π 를 나타내는 식 (3)에 대입한 다음 $\frac{\partial \Pi}{\partial a} = 0$ 에 의해 해를 식 (6)과 같이 구할 수 있다.

$$u = -\frac{Qph^2z}{6EA} \quad (6)$$

다음으로 $u(z) = a_1z + a_2z^2$ 로 가정하여 식 (3)에 대입하고 Ritz 방법에 의해 $\partial \Pi / \partial a_1 = 0, \partial \Pi / \partial a_2 = 0$ 를 적용하면 a_1 과 a_2 를 구할 수 있으며 해는 식 (7)과 같이 얻을 수 있다.

$$u = \frac{Qph}{EA} \left(-\frac{5}{12}hz + \frac{1}{4}z^2 \right) \quad (7)$$

Ritz 방법에 의한 응력을 계산해 보면 식 (6)과 식 (7)에 나타난 변위에 대응하는 응력은 각각 다음과 같다.

$$\sigma = -\frac{Qph^2}{6A} \quad (8)$$

$$\sigma = \frac{Qph}{A} \left(-\frac{5}{12}h + \frac{1}{2}z \right) \quad (9)$$

3.3 유한요소법

유한요소법은 해석대상이 되는 물체를 유한개의 요소로 나누어 각각의 강성행렬을 구성하여 조합하고 하중과 변위의 함수로 나타나는 선형연립방정식을 풀어서 미지수를 구하는 방법이다[8-10]. Fig. 4는 Fig. 1에서의 토체 ABCD를 유한개의 요소로 분할한 경우를 보여주는데 Fig. 4(a)는 2개의 요소로 분할한 경우를 나타내고 Fig. 4(b)는 3개의 요소로 분할한 경우를 나타낸다.

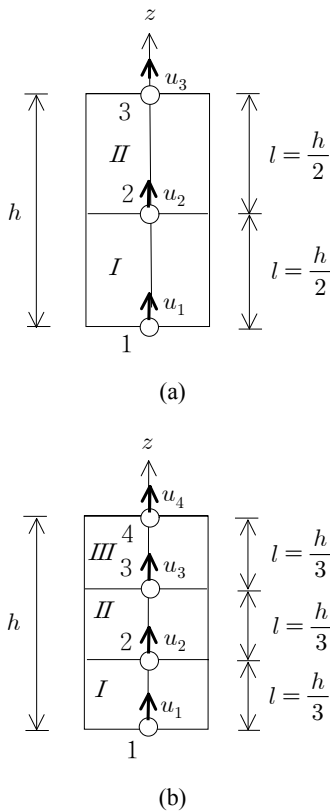


Fig. 4. Discretization of element
(a) 2 elements (b) 3 elements

유한요소해석을 위해 먼저 Fig. 4(a)와 같이 해석대상을 2개의 요소로 분할한 경우를 고려한다. 요소의 변위 함수를 계수 c_0 와 c_1 을 이용하여 $u = c_0 + c_1z$ 로 표현하면 요소의 변위함수를 식 (10)과 같이 절점변위의 함수로 나타낼 수 있다.

$$u = \left(1 - \frac{z}{l}\right)u_1 + \frac{z}{l}u_2 = u_1N_1(z) + u_2N_2(z) \quad (10)$$

식 (10)으로부터 형상함수는 $N_1(z) = 1 - z/l$ 이고 $N_2(z) = z/l$ 임을 알 수 있다. 식 (10)을 식 (3)에 나타낸 포텐셜 에너지식에 대입하면 요소 하나의 포텐셜 에너지, Π^e 는 식 (11)과 같이 표현된다.

$$\Pi^e = \frac{1}{2} [K_{11}^e u_1^2 + 2K_{12}^e u_1 u_2 + K_{22}^e u_2^2] + u_1 F_1^e + u_2 F_2^e \quad (11)$$

식 (11)에서 강성행렬 K_{11}^e , K_{12}^e 그리고 K_{22}^e 는 각각 식 (12), (13) 그리고 (14)와 같다.

$$K_{11}^e = \int_0^l EA \{N_1'(z)\}^2 dz = \frac{EA}{l} \quad (12)$$

$$K_{12}^e = \int_0^l EAN_1'(z)N_2'(z) dz = -\frac{EA}{l} \quad (13)$$

$$K_{22}^e = \int_0^l EA \{N_2'(z)\}^2 dz = \frac{EA}{l} \quad (14)$$

또한 식 (11)로부터 절점력 F_1^e 와 F_2^e 는 각각 식 (15) 및 식 (16)과 같다.

$$F_1^e = \int_0^l Qp(h-z)N_1(z) dz = \frac{Qpl}{6}(3h-l) \quad (15)$$

$$F_2^e = \int_0^l Qp(h-z)N_2(z) dz = Qpl\left(\frac{h}{2} - \frac{l}{3}\right) \quad (16)$$

Fig. 4(a)에 나타나 있는 첫 번째 요소(요소 I)에 대하여 식 (11)을 적용하여 포텐셜 에너지를 구해보면 식 (17)과 같은데 식 (17)에서 $K_{22}^I = K_{22}^e$ 이고 $F_2^I = F_2^e$ 이다.

$$\Pi^I = \frac{1}{2} K_{22}^I u_2^2 + u_2 F_2^I \quad (17)$$

Fig. 4(a)의 두 번째 요소(요소 II)에 대하여 식 (11)을 적용하여 포텐셜 에너지를 구해보면 식 (18)과 같다.

$$\Pi^{II} = \frac{1}{2} [K_{11}^{II} u_2^2 + 2K_{12}^{II} u_2 u_3 + K_{22}^{II} u_3^2] + u_2 F_1^{II} + u_3 F_2^{II} \quad (18)$$

식 (18)에서 $K_{11}^{II} = K_{11}^e$, $K_{12}^{II} = K_{12}^e$ 그리고 $K_{22}^{II} = K_{22}^e$ 이다. 또한 식 (18)에서 F_1^{II} 와 F_2^{II} 는 각각 식 (19) 및 식 (20)과 같다.

$$F_1^{II} = \int_0^l Qp\{h-(l+z)\}N_1(z) dz \quad (19)$$

$$= Qpl\left(\frac{h}{2} - \frac{2}{3}l\right)$$

$$F_2^H = \int_0^l Qp\{h-(l+z)\}N_2(z)dz \quad (20)$$

$$= Qpl\left(\frac{h}{2} - \frac{5}{6}l\right)$$

식 (15)와 (16)을 식 (19) 및 식 (20)과 비교해 보면 차이가 있음을 알 수 있는데 이는 Fig. 1에 나타나 있는 토체 ABCD의 측면에 작용하는 마찰응력(τ_z)이 상수가 아니라 z 의 함수이기 때문이다. 이상의 결과로부터 전체 포텐셜 에너지, Π 는 식 (21)과 같게 된다.

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi^I + \Pi^H \\ &= \frac{1}{2} \left[\overline{K}_{22}u_2^2 + 2\overline{K}_{23}u_2u_3 + \overline{K}_{33}u_3^2 \right] + \overline{F}_2u_2 + \overline{F}_3u_3 \end{aligned} \quad (21)$$

식 (21)에서 강성행렬 및 절점 외력간의 관계는 식 (22)~(26)과 같다.

$$\overline{K}_{22} = K_{22}^I + K_{11}^H = \frac{2EA}{l} \quad (22)$$

$$\overline{K}_{23} = K_{12}^H = -\frac{EA}{l} \quad (23)$$

$$\overline{K}_{33} = K_{22}^H = \frac{EA}{l} \quad (24)$$

$$\overline{F}_2 = F_2^I + F_1^H = Qpl(h-l) \quad (25)$$

$$\overline{F}_3 = F_2^H = Qpl\left(\frac{h}{2} - \frac{5}{6}l\right) \quad (26)$$

식 (21)에 대하여 최소 포텐셜 에너지 원리를 적용하면 $\partial\Pi/\partial u_2 = 0$, $\partial\Pi/\partial u_3 = 0$ 가 되며 이를 행렬로 나타내면 식 (27)과 같다.

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = -Qpl \begin{Bmatrix} h-l \\ \frac{h}{2} - \frac{5}{6}l \end{Bmatrix} \quad (27)$$

식 (27)에 $l = h/2$ 를 적용하면 식 (28)과 같이 절점변위를 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = -\frac{Qph^3}{48EA} \begin{Bmatrix} 7 \\ 8 \end{Bmatrix} \quad (28)$$

요소 I에 대한 응력(σ^I)과 요소 II에 대한 응력(σ^H)은 각각 식 (29) 및 식 (30)과 같게 된다.

$$\sigma^I = -\frac{7Qph^2}{24A} \quad (29)$$

$$\sigma^H = -\frac{Qph^2}{24A} \quad (30)$$

같은 식으로 Fig. 4(b)의 3요소에 있어서 최소 포텐셜 에너지 원리를 적용하여 절점변위를 구해 보면 식 (31)과 같다.

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = -\frac{Qph^3}{162EA} \begin{Bmatrix} 19 \\ 26 \\ 27 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

또한 요소 I에 대한 응력(σ^I)과 요소 II에 대한 응력(σ^H) 그리고 요소 III에 대한 응력(σ^{III})은 식 (32)와 같게 된다.

$$\sigma^I = -\frac{19Qph^2}{54A}, \quad \sigma^H = -\frac{7Qph^2}{54A}, \quad \sigma^{III} = -\frac{Qph^2}{54A} \quad (32)$$

4. 해석결과의 비교분석

본 연구에서 고려한 해석적 방법과 Ritz 방법 그리고 유한요소법에 의해 Fig. 1의 토체 ABCD에 대하여 얻은 연직변위와 응력을 나타내면 Fig. 5와 같다. Fig. 5에서 연직축은 토체의 연직방향을 의미하는데 연직좌표 값이 0인 경우가 토체 ABCD의 하단을 의미하고 연직좌표 값이 h 인 경우가 지표면을 의미한다.

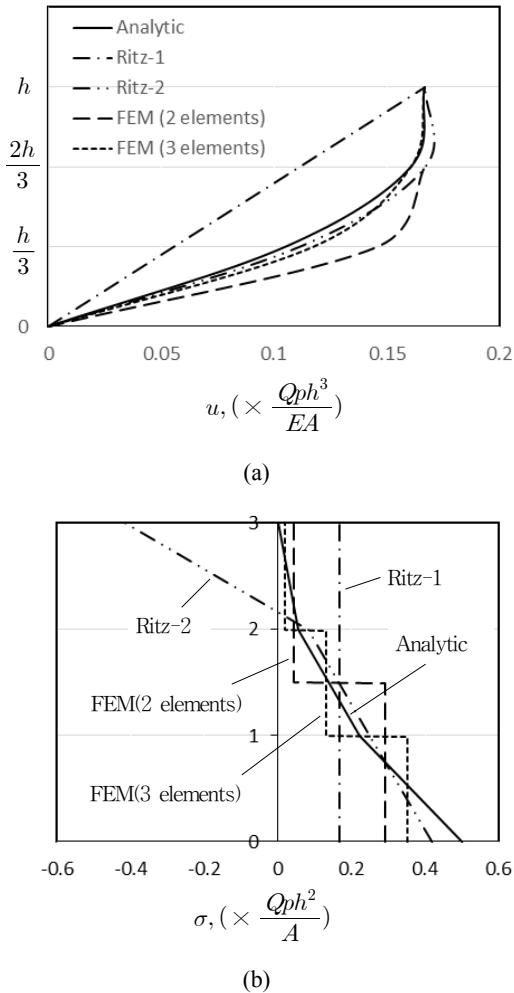


Fig. 5. Comparison of analysis results
 (a) displacements (b) stresses

Fig. 5(a)는 토체 ABCD에 대하여 높이별 연직변위량을 의미하는데 본 연구에서 고려한 세 가지 방법들을 통해 얻은 지표면에서의 변위는 모두 동일한 값을 보임을 알 수 있다. 해석 해에 의하면 변위량은 높이, z 의 3차 다항식으로 표현됨을 식 (1)을 통해 알 수 있다. Ritz 방법에 의한 경우 변위를 z 의 1차함수로 고려하는 경우의 변위량은 해석 해와 큰 차이를 보임을 알 수 있으나 변위를 z 의 2차함수로 고려하는 경우 해석 해와 유사한 변위량 분포를 보임을 알 수 있다. $z = h/3$ 에서의 변위를 z 의 1차함수로 고려한 경우의 변위량은 해석 해의 0.53배 이지만 변위를 z 의 2차함수로 고려한 경우의 변위량은 해석 해의 1.06배로 해석 해에 상당히 근접한

결과를 보인다. 유한요소법에 의한 경우 요소의 개수를 2개로 고려하는 경우 변위분포는 해석 해와 비교적 큰 차이를 보이지만 요소의 개수를 3개로 늘리면 해석 해와 상당히 근접한 결과를 보임을 알 수 있다. $z = h/3$ 에 대하여 요소의 개수가 2개인 경우의 변위량은 해석 해의 1.41배 이지만 요소의 개수가 3개인 경우의 변위량은 해석 해의 1.12배로 해석 해에 상당히 근접한 결과를 보인다. 이상의 결과를 통해 볼 때 Ritz 방법의 경우 가정하는 변위의 차수를 증가시킬수록 해석 해에 근접하는 결과를 보일 것으로 예상된다. 유한요소법에 의한 경우도 요소의 분할 개수가 커질수록 해석 해에 근접하는 결과를 보일 것으로 예상된다. Fig. 5(b)에 나타난 응력분포도에서 해석 해는 깊이에 2차적으로 변화됨을 식 (2)를 통해 알 수 있다. Ritz 방법에 의한 응력분포를 해석 해와 비교해 볼 때 변위 함수를 z 의 1차함수로 고려하는 경우의 응력값은 깊이에 관계없이 일정한 분포를 보여 해석 해와 큰 차이를 보인다. 변위를 z 의 2차함수로 고려하는 경우에는 토체의 하단부에서의 응력분포는 해석 해에 근접한 결과를 보여주지만 지표면 근처에서의 응력값은 해석 해와 큰 차이를 보임을 알 수 있다. 유한요소법에 의한 응력분포를 해석 해와 비교해 보면 요소를 2개로 고려하는 경우에 비해 3개로 고려하는 경우 해석 해에 더 근접한 결과를 보임을 알 수 있다. 지표면에서의 응력의 경우 요소를 2개로 고려한 경우의 응력값은 3개로 고려한 경우에 비해 약 2배 컸다. 토체 최하단에서의 응력은 요소를 2개로 고려한 경우 해석 해에 비해 0.58배 이었지만 요소를 3개로 고려한 경우 해석 해에 비해 0.7배로 해석 해에 근접한 결과를 보였다. 전체적으로 볼 때 요소의 개수를 3개로 고려한 유한요소법에 의한 응력분포가 해석 해와 가장 근접한 결과를 보임을 알 수 있다.

5. 결론

철근 콘크리트 암거 상부지반에 발생하는 아칭효과를 고려한 지반거동을 평가하기 위해 Ritz 방법과 유한요소법을 적용하는 방법을 유도하고 해석결과를 해석 해에 의한 결과와 상호 비교해 보았다. 본 연구를 통해 얻은 결론은 다음과 같다.

- 1) 본 연구를 통해 강성압거 상부지반의 침하량 산정을 위한 해석법으로 Ritz 방법과 유한요소법을 정식화 하고 해석결과를 유도하였다.
- 2) 강성압거 상부 토체의 측면에 작용하는 전단응력은 지표면으로부터의 깊이에 비례하므로 유한요소의 절점외력을 구할 경우 요소별 국부좌표계에 관계없이 지표면으로부터의 깊이의 함수로 표현되는 전단응력이 반영되도록 주의할 필요가 있다.
- 3) 해석결과 얻은 지표면에서의 변위는 모두 동일한 값을 보임을 알 수 있었다. 해석대상이 되는 토체에 있어 변위의 차이가 가장 큰 깊이에 대하여 Ritz 방법을 적용한 결과에 따르면 변위를 z 의 1차함수로 고려한 경우의 변위량은 해석 해에 비해 0.53배 이지만 변위를 z 의 2차함수로 고려한 경우의 변위량은 해석 해의 1.06배였다. 유한요소법에 의한 계산결과에 따르면 변위의 차이가 가장 큰 깊이에 대하여 요소의 개수가 2개인 경우의 변위량은 해석 해의 1.41배 이지만 요소의 개수가 3개인 경우의 변위량은 해석 해의 1.12배 였다.
- 4) 해석결과를 통해 구한 응력을 해석 해와 비교해 볼 때 Ritz 방법에 있어 변위의 차수를 증가시키더라도 해석 해에 근접한 결과를 보이지는 않았다. 유한요소법에 의한 경우 토체 최하단에서의 응력은 요소를 2개로 고려한 경우 해석 해에 비해 0.58배 이었지만 요소를 3개로 고려한 경우 해석 해에 비해 0.7배로 해석 해에 근접한 결과를 보였다.
- 5) 본 연구에서 고려한 Ritz 방법과 유한요소법에 의한 해석결과를 해석 해와 비교해 보았을 때 유한요소법에 의한 해석결과가 해석 해에 안정적으로 근접하는 결과를 보임을 알 수 있었다.

pp.656-660, 1965.

DOI: <https://dx.doi.org/10.1115/1.3627274>

- [5] I. S. SOKOLNIKOFF, Mathematical Theory of Elasticity, Mc-Graw Hill Book Company, Inc., 1956.
- [6] Karel Rektorys, Variational methods in mathematics, science, and engineering, D. REIDEL PUBLISHING COMPANY, 1977.
- [7] Bruce A. Finlayson, The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, SIAM, 2014.
- [8] Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E. and Witt, R. J., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, JOHN WILEY & SONS, INC., 2002.
- [9] O. C. Zienkiewicz, The finite element method. Vol.1, Basic formulation and linear problems, McGraw-Hill, 1989.
- [10] Hughes, T. J., The finite element method : linear static and dynamic finite element analysis, Mineola, NY : Dover Publications, 2000.

이 승 현(Seung-Hyun Lee)

[정회원]



- 1988년 8월 : 서울대학교 토목공학과 (공학사)
- 1991년 2월 : 서울대학교 토목공학과 (공학석사)
- 1997년 2월 : 서울대학교 토목공학과 (공학박사)
- 2000년 3월 ~ 현재 : 선문대학교 건축사회환경학부 교수

<관심분야>

토질역학, 기초공학

References

- [1] Terzaghi, K. T. and Peck, R. B., Soil mechanics in engineering practice, John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney, pp.267-268, 1967.
- [2] Krynine, D. P., Soil mechanics, McGraw-Hill Book Company, Inc., pp. 310-312, 1947.
- [3] Erik Thompson, ENERGY METHODS, A Tutorial Note, Fall 1993.
- [4] M. Levinson, "The Application of the Principle of Stationary Potential Energy to Some Problems in Finite Elasticity", *Journal of Applied Mechanics*, Vol.32, No.3,