

등매개변수 사변형요소를 적용한 유한요소해석법

이승현¹, 한진태^{2*}

¹선문대학교 건축사회환경공학부, ²한국건설기술연구원

Finite element method adopting isoparametric formulation of the quadrilateral elements

Seung-Hyun Lee¹, Jin-Tae Han^{2*}

¹Division of Architecture, Architectural Engineering and Civil Engineering, Sunmoon University, Asan, Korea

²Korea Institute of Construction Technology

요약 본 연구에서는 상용 해석프로그램에서 구현하기에 어려움이 있는 지반공학적 문제를 해결하기 위한 쉽고 직관적인 해석 프로그램 개발의 일환으로 계산의 정확도가 상대적으로 높은 요소를 채택한 유한요소법을 정식화 하고 해석과정을 프로그래밍 하였다. 개발된 프로그램의 계산과정에 있어서의 신뢰성 확인을 위해 두 가지 예에 대한 해석을 수행하고 결과분석을 해 보았는데 첫 번째 예는 등방구속압이 요소에 작용하는 경우이고 나머지 예는 전단응력이 요소의 측면에 작용하는 경우이다. 유한요소를 구성하는 요소로는 등매개변수 사변형 요소를 채택하였는데 요소내의 변위는 요소의 절점변위와 형상함수로 표현된다. 전체좌표(global coordinate)에 의한 미분계수로 표현되는 변형률을 얻기 위해 자코비언과 자연좌표(natural coordinate)를 이용하는 계산과정을 코딩하였다. 요소의 강성행렬을 정의하는 이중적분식을 수치적분으로 변환시키기 위해 4점 가우스 구적법을 적용하였다. 개발된 프로그램의 계산과정 검증에 대해 등방구속압이 작용하는 요소에 대한 해석을 수행한 결과 요소내의 네 개의 가우스점과 요소 중앙에 대해 계산된 응력값이 등방구속압과 일치됨을 알 수 있었다. 개발된 프로그램의 계산과정 검증을 위해 전단응력이 작용하는 요소에 대한 해석을 수행한 결과 요소내에 발생하는 횡방향응력 및 연직응력이 위치에 따라 변화됨을 알 수 있었으며 외력에 대한 발생응력의 크기 및 분포양상이 합리적임을 알 수 있었다.

Abstract In order to overcome shortcomings of commercial analysis program for solving certain geotechnical problems, finite element method adopting isoparametric quadrilateral element was selected as a tool for analyzing soil behavior and calculating process was programmed. Two examples were considered in order to verify reliability of the developed program. One of the two examples is the case of acting isotropic confining pressure on finite element and the other is the case of acting shear stress on the sides of the finite element. Isoparametric quadrilateral element was considered as the finite element and displacements in the element can be expressed by node displacements and shape functions in the considered element. Calculating process for determining strain which is defined by derivatives using global coordinates was coded using the Jacobian and the natural coordinates. Four point Gauss rule was adopted to convert double integral which defines stiffness of the element into numerical integration. As a result of executing analysis of the finite element under isotropic confining pressure, calculated stress corresponding to four Gauss points and center of the element were equal to the confining pressure. In addition, according to the analyzed results for the element under shear stress, horizontal stresses and vertical stresses were varied with positions in the element and the magnitudes and distribution pattern of the stresses were thought to be rational.

Keywords : Finite element method, Four point Gauss rule, Isoparametric quadrilateral element, Reliability, Stresses

*Corresponding Author : Jin-Tae Han(Korea Institute of Construction Technology)

Tel: +82-31-910-0259 email: jimmyhane@kict.re.kr

Received July 30, 2018

Revised (1st August 20, 2018, 2nd August 23, 2018, 3rd August 27, 2018, 4th August 28, 2018)

Accepted November 2, 2018

Published November 30, 2018

1. 서론

유한요소법(Finite element method)은 연속체의 해석을 위해 유한차분법(Finite difference method)과 더불어 많이 쓰이는 해석법이다. 유한요소법과 유한차분법 등을 통틀어 수치해석법(Numerical analysis)이라 하는데 수치해석법을 이용하면 다양한 하중조건과 경계조건을 고려할 수 있으므로 해석해(analytical solution)를 구할 수 없는 복잡한 문제를 비교적 쉽게 풀 수 있다[1]. 즉 수치해석법에서는 다양한 하중조건과 경계조건을 고려할 수 있게 된다. 현재 연속체 해석을 위해 몇몇 상용 유한요소 프로그램이 쓰이고 있다. 그러나 복잡한 사용법과 접촉 요소(contact element)와 같이 지반-구조물 상호작용 효과를 적절히 묘사하는데 있어 한계를 지니고 있는 상용 프로그램의 문제점을 극복하고 특정한 연구목적에 부합되는 쉽고 직관적인 프로그램의 개발이 필요한 경우도 있다. 본 연구에서는 말뚝주면의 하중전이특성과 같이 흙과 그에 인접한 주변지반 사이의 거동특성을 반영할 수 있는 쉽고 직관적인 해석 프로그램 개발의 일환으로 유한요소 해석과정을 프로그램화 하고자 하였다. 프로그램 개발에서 고려한 요소는 등매개변수 사변형요소이며 개발한 프로그램의 신뢰성 검증을 위해서 두 가지 경우를 고려하였다. 신뢰성 검증을 위한 첫 번째 시도로 등분포하중을 받는 요소에 대하여 계산된 응력값이 등분포하중과 같은 값을 보이는지 확인해 보았다. 두 번째 시도로는 전단응력이 작용하는 흙요소에 대한 응력값들을 구하고 분포특성을 살펴봄으로써 계산과정에 있어서의 프로그램 신뢰성을 검증해 보았다.

2. 해석이론

2.1 자연좌표계와 전체좌표계 사이의 사상(mapping)

본 연구에서 고려한 요소의 형상은 사변형으로서 하나의 사변형요소에 의한 내적인 일은 그에 대응하는 두 개의 삼각형요소에 의한 내적인 일 보다 작음이 증명된 바 있다[2]. 이는 사변형에 의한 정확도를 확보하기 위해서는 좀 더 많은 삼각형 요소가 필요함을 의미하는데 등매개변수 사변형요소에 관해서는 그동안 꾸준한 연구발견이 이어지고 있다[3,4]. Fig. 1에는 유한요소법에서의 사변형 요소가 나타나 있으며 두 종류의 좌표계가 나타

나 있다.

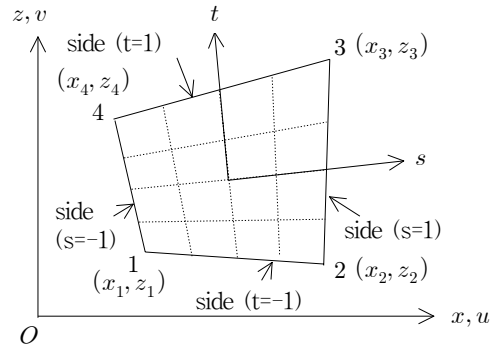


Fig. 1. Natural coordinate system and global coordinate system

Fig. 1에 나타나 있는 자연좌표계(natural coordinate system) $s-t$ 는 요소의 형상에 의해 정의되며 전체좌표계(global coordinate system) $x-z$ 를 따르는 요소의 방향에 의해 정의되지는 않는다. 자연좌표 $s-t$ 를 요소에 위치시킬 때 원점을 요소 중앙에 위치시키는데 s 축과 t 축은 서로 직교할 필요가 없으며 x 축 또는 z 축에 평행일 필요가 없다. $s-t$ 좌표는 4 개의 절점과 사변형을 이루는 4개의 변이 +1과 -1에 의해 경계되어 진다. 이때 각 변은 직선이지만 형상은 임의의 형상을 갖게 된다. Fig. 1에서 전체좌표계와 자연좌표계 사이의 관계는 식 (1) 및 (2)와 같이 가정한다.

$$x = a_1 + a_2s + a_3t + a_4st \quad (1)$$

$$z = a_5 + a_6s + a_7t + a_8st \quad (2)$$

식 (1), (2)에서 계수 a_1, a_2, \dots, a_8 을 결정하기 위해 전체 좌표계에 의한 4개 절점의 좌표 $(x_1, z_1), (x_2, z_2), (x_3, z_3), (x_4, z_4)$ 를 적용하면 식 (3)과 같게 된다. 식 (3)에 대하여 4개 절점에 대응하는 자연좌표 $(-1, -1), (1, -1), (1, 1), (-1, 1)$ 을 대입하면 a_1, a_2, \dots, a_8 를 구할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} 1 & s_1 & t_1 & s_1t_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & s_1 & t_1 & s_1t_1 \\ 1 & s_2 & t_2 & s_2t_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & s_2 & t_2 & s_2t_2 \\ 1 & s_3 & t_3 & s_3t_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & s_3 & t_3 & s_3t_3 \\ 1 & s_4 & t_4 & s_4t_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & s_4 & t_4 & s_4t_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ z_1 \\ x_2 \\ z_2 \\ x_3 \\ z_3 \\ x_4 \\ z_4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

이들 a_i 값들을 식 (1) 과 식 (2)에 대입하여 그 결과를 행렬 형태로 나타내면 식 (4)와 같게 된다. 식 (4)가 의미하는 바는 요소내 임의의 위치를 자연좌표 (s, t) 로 나타낼 때 자연좌표에 대응하는 전체좌표를 절점좌표를 이용하여 구할 수 있다는 것이다. 식 (4)에서 N_i 를 형상 함수(shape function)라 한다.

$$\begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ z_1 \\ x_2 \\ z_2 \\ x_3 \\ z_3 \\ x_4 \\ z_4 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$N_1 = \frac{(1-s)(1-t)}{4}, \quad N_2 = \frac{(1+s)(1-t)}{4}$$

$$N_3 = \frac{(1+s)(1+t)}{4}, \quad N_4 = \frac{(1-s)(1+t)}{4}$$

전체좌표와 자연좌표를 매개짓는 형상함수에 관해서는 지금까지 많은 연구가 진행되었다[5-7].

2.2 변형률 행렬의 유도

등매개변수 요소(isoparametric element)[8]란 요소내의 변위함수가 요소의 기하학적 형상을 정의하는데 사용된 것과 동일한 형상함수에 의해 정의되는 요소를 의미한다. 즉 식 (5)와 같은 관계가 성립되는 요소를 말한다.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = [N] \{d\} \quad (5)$$

식 (5)에서 $[N]$ 은 형상함수 행렬을 의미하고 $\{d\}$ 는 절점변위 행렬을 의미하는데 u 는 x 방향 변위를 의미하고 v 는 z 방향 변위를 의미한다. 변형률과 변위의 관계를 행렬로 나타내면 식 (6)과 같다.

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial(\cdot)}{\partial z} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial z} & \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (6)$$

식 (6)에 나타나 있듯이 변형률은 x, z 에 대한 미분계수로 정의되는데 식 (5)로부터 변위는 s, t 의 함수임을 알 수 있다. 따라서 $\partial u/\partial x, \partial v/\partial z$ 도 s, t 의 함수가 되는데 x, z 에 의한 도함수를 구하기 위해 연쇄법칙이 적용된다. 임의의 함수 (\cdot) 에 대한 $\partial(\cdot)/\partial x, \partial(\cdot)/\partial z$ 를 구하기 위해 연쇄법칙을 적용하면 식 (7)이 되고 식 (7)에 대하여 크레이머 법칙(Cramer's rule)[9]을 적용하면 식 (8), (9)를 얻을 수 있는데 식 (8),(9)에서 $[[J]]$ 는 자코비안(Jacobian)을 의미하며 식 (10)과 같이 표현된다[10].

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial s} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial x} = \frac{1}{[[J]]} \left[\frac{\partial(\cdot)}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} \right] \quad (8)$$

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial z} = \frac{1}{[[J]]} \left[\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} - \frac{\partial(\cdot)}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} \right] \quad (9)$$

$$[[J]] = \frac{\partial(x, z)}{\partial(s, t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} \quad (10)$$

식 (8)~(10)을 식 (6)에 대입하면 식 (11)을 얻게 된다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{[[J]]} \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial(\cdot)}{\partial s} - \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} & 0 \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial(\cdot)}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial(\cdot)}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial(\cdot)}{\partial s} - \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (11)$$

식 (11)은 식 (12)와 같이 간단히 나타낼 수 있는데 식 (12)에서 $[D']$ 은 식 (11)의 우변에서 변위행렬을 제외한 항을 의미한다.

$$\{\epsilon\} = [D'] [N] \{d\} = [B] \{d\} \quad (12)$$

식 (12)에서 $[B] = [D'] [N]$ 임을 알 수 있는데 $[D']$ 는 3x2 행렬이고 $[N]$ 은 2x8 행렬이므로 행렬 $[B]$ 는 3x8 행렬이 됨을 알 수 있다. 행렬 $[B]$ 는 계산을 통해 식 (13)과 같이 표현된다.

$$[B] = \frac{1}{[[J]]} \{ [B_1] \ [B_2] \ [B_3] \ [B_4] \} \quad (13)$$

식 (13)에서 $[B_i]$ 는 식 (14)와 같이 쓸 수 있으며 식 (14)에서 a, b, c, d 는 식 (15)와 같이 표현된다.

$$[B_i] = \begin{bmatrix} a(N_{i,s}) - b(N_{i,t}) & 0 \\ 0 & c(N_{i,t}) - d(N_{i,s}) \\ c(N_{i,t}) - d(N_{i,s}) & a(N_{i,s}) - b(N_{i,t}) \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$a = \frac{\partial z}{\partial t}, b = \frac{\partial z}{\partial s}, c = \frac{\partial x}{\partial s}, d = \frac{\partial x}{\partial t} \quad (15)$$

식 (4)을 식 (15)에 적용하면 a, b, c, d 를 식 (16)~(19)와 같이 얻을 수 있다.

$$a = \frac{1}{4} \left\{ \begin{matrix} y_1(s-1) + y_2(-s-1) \\ + y_3(1+s) + y_4(1-s) \end{matrix} \right\} \quad (16)$$

$$b = \frac{1}{4} \left\{ \begin{matrix} y_1(t-1) + y_2(1-t) \\ + y_3(1+t) + y_4(-1-t) \end{matrix} \right\} \quad (17)$$

$$c = \frac{1}{4} \left\{ \begin{matrix} x_1(t-1) + x_2(1-t) \\ + x_3(1+t) + x_4(-1-t) \end{matrix} \right\} \quad (18)$$

$$d = \frac{1}{4} \left\{ \begin{matrix} x_1(s-1) + x_2(-s-1) \\ + x_3(1+s) + x_4(1-s) \end{matrix} \right\} \quad (19)$$

한편, 자코비안 $[[J]]$ 를 구하기 위해 식 (10)에 대하여 식 (15)와 식 (16)~(19)를 적용하면 식 (20)과 같이 표현된다.

$$[[J]] = \frac{1}{8} \{X_c\}^T [S] \{Y_c\} \quad (20)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 1-t & t-s & s-1 \\ t-1 & 0 & s+1 & -s-t \\ s-t & -s-1 & 0 & t+1 \\ 1-s & s+t & -t-1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{X_c\}^T = \{x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4\}$$

$$\{Y_c\}^T = \{y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4\}$$

이상의 계산결과를 통해 $[[J]]$ 는 s, t 와 기지의 전체 좌표 $x_1, x_2, x_3, \dots, y_4$ 의 함수임을 알 수 있다. 식 (17)로부터 $[B]$ 또한 s, t 와 기지의 전체 좌표 $x_1, x_2, x_3, \dots, y_4$ 의 함수임을 알 수 있다.

2.3 요소의 강성행렬

변형률이 s, t 와 기지의 전체 좌표의 함수이므로 다음의 식 (21)로 표현되는 응력-변형률 관계 또한 s, t 와 기지의 전체 좌표의 함수가 된다.

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} = [D][B]\{d\} \quad (21)$$

일정 두께, h 를 갖는 요소에 대하여 강성행렬 $[[k]]$ 을 나타내면 다음과 같다.

$$[k] = \iint_A [B]^T [D] [B] h dx dz \quad (22)$$

식 (22)에서 $[B]$ 는 s, t 의 함수이기 때문에 적분은 s, t 에 대하여 수행되어야 한다. 즉 피적분변수가 s, t 가 되도록 해야 한다. 자코비안, $[[J]]$ 는 전체 좌표계에서의 요소면적 $dx dz$ 를 자연좌표계에서의 요소면적 $ds dt$ 와 관련짓는 역할을 하게 되는데 그 결과는 $dx dz = [[J]] ds dt$ 가 된다[11]. 따라서 식 (22)는 식 (23)과 같이 표현되며 이때의 강성행렬은 8×8 행렬이 된다.

$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] h [[J]] ds dt \quad (23)$$

정적분을 수치적으로 평가하는 방법에는 Newton-Cotes 방법, 가우스 구적법(Gaussian quadrature) 등이 있는데 일반적으로 가우스 구적법이 많이 쓰인다[12]. 가우스 구적법에서는 불규칙적으로 분포하는 n 개의 표본점(sampling point)을 적용하여 차수 $(2n-1)$ 개의 다항식을 정확히 적분할 수 있다. 즉 적분의 근사값을 구하기 위해 n 개의 표본점을 선택하고 그에 대응하는 함수값(y_i)을 구한 다음 적절한 가중값 W_i 를 곱하고 각 항들을 더함으로써 적분값을 구하게 된다. 표본점은 적분간격의 중앙에 대하여 대칭적으로 위치하게 된다. 2점 가우스 구적법을 이중적분에 적용하게 되면 식 (24)와 같이 하나의 좌표에 대해 적분을 먼저 수행하고 다음으로 나머지 하나의 좌표에 대해 적분을 수행하게 된다.

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(s, t) ds dt \\ & \approx \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 W_i W_j f(s_i, t_j) \\ & \approx W_1 W_1 f(s_1, t_1) + W_1 W_2 f(s_1, t_2) \\ & \quad + W_2 W_1 f(s_2, t_1) + W_2 W_2 f(s_2, t_2) \end{aligned} \quad (24)$$

결과적으로 식 (24)는 4점 가우스법칙(four point Gauss rule)[13]을 의미하게 되고 이를 그림으로 나타내면 Fig. 2와 같다. Fig. 2에서 가우스점(Gauss point)의 번호는 원문자로 나타나 있는데 4개의 가우스점에 대응하는 자연좌표가 나타나 있다.

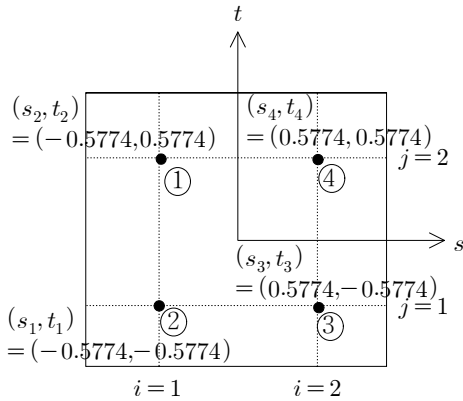


Fig. 2. Gauss points

식 (23)을 식 (24)로 표현되는 4점 가우스 구적법을 이용하여 나타내면 식 (25)와 같음을 알 수 있다. 식 (25)에서 $W_1 = W_2 = W_3 = W_4 = 1.0$ 이다.

$$\begin{aligned}
 [k] &= [B(s_1, t_1)]^T [D] [B(s_1, t_1)] |h| [J(s_1, t_1)] |W_1 W_1| \\
 &+ [B(s_2, t_2)]^T [D] [B(s_2, t_2)] |h| [J(s_2, t_2)] |W_2 W_2| \\
 &+ [B(s_3, t_3)]^T [D] [B(s_3, t_3)] |h| [J(s_3, t_3)] |W_3 W_3| \\
 &+ [B(s_4, t_4)]^T [D] [B(s_4, t_4)] |h| [J(s_4, t_4)] |W_4 W_4| \\
 &= [k(s_1, t_1)] + [k(s_2, t_2)] + [k(s_3, t_3)] + [k(s_4, t_4)]
 \end{aligned} \tag{25}$$

2.4 프로그램 검증

2.4.1 등방구속압하에서의 응력분포

등방구속압을 받는 정사각형요소 에 대한 응력분포를 살펴보기 위해 Fig. 3과 같은 요소를 고려하며 요소는 평면변형률 상태에 있다고 가정한다. 요소의 두께는 1 m 이고 탄성계수는 $E = 2 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ 이며 포아송비는 $\nu = 0.2$ 이다. 또한 등방구속압은 100 kN/m^2 이다.

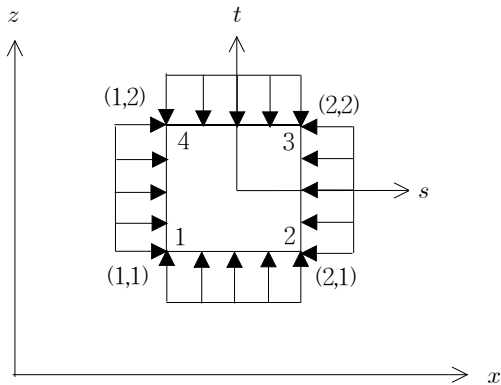


Fig. 3. Element under isotropic confining pressure

Fig. 3에 나타낸 요소에 대하여 수치적분을 위해 4점 가우스 구적법을 적용하였다. 식 (25)의 우변에 있는 네 개의 자코비안($|[J]|$)은 식 (20)으로부터 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned}
 |[J(s_1, t_1)]| &= 0.25, \quad |[J(s_2, t_2)]| = 0.25 \\
 |[J(s_3, t_3)]| &= 0.25, \quad |[J(s_4, t_4)]| = 0.25
 \end{aligned} \tag{26}$$

식 (25)에서의 $[B(s_1, t_1)]$ 의 계산과정을 나타내면 다음과 같다. 먼저 (s_1, t_1) 를 통해 a, b, c, d 를 식 (16)~(19)를 통해 계산할 수 있는데 각각 0.5, 0, 0.5, 0 으로 계산된다. 또한 식 (14)에 나타나 있는 $N_{1,s}$ 와 $N_{1,t}$ 는 -0.394325로 계산된다. 따라서 식 (14)로부터 $[B_1]$ 은 다음과 같이 계산된다.

$$[B_1] = \begin{bmatrix} -0.19716 & 0 \\ 0 & -0.19716 \\ -0.19716 & -0.19716 \end{bmatrix} \tag{27}$$

$N_{2,s}$ 와 $N_{2,t}$ 를 적용하여 $[B_2]$ 를 얻을 수 있으며 같은 식으로 하여 $[B_3]$ 및 $[B_4]$ 를 결정할 수 있는데 식 (13)으로부터 $[B(s_1, t_1)]$ 는 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned}
 [B(-0.5773, -0.5773)] \\
 = \begin{bmatrix} -0.78 & 0 & 0.78 & 0 & 0.21 & 0 & -0.21 & 0 \\ 0 & -0.78 & 0 & -0.21 & 0 & 0.21 & 0 & 0.78 \\ -0.78 & -0.78 & -0.21 & 0.78 & 0.21 & 0.21 & 0.78 & -0.21 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{28}$$

응력-변형률관계를 나타내는 식 (21)에서 평면변형률 조건인 경우의 $[D]$ 는 다음과 같이 주어진다[14].

$$\begin{aligned}
 [D] &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2222222 & 555556 & 0 \\ 555556 & 2222222 & 0 \\ 0 & 0 & 833333 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{29}$$

따라서 식 (25)의 우변에서 $[k(s_1, t_1)]$ 을 계산할 수 있다. 같은 식으로 자연좌표, (s_2, t_2) 와 (s_3, t_3) 그리고 (s_4, t_4) 에 대응하는 $[k(s_2, t_2)]$ 와 $[k(s_3, t_3)]$ 그리고 $[k(s_4, t_4)]$ 를 결정할 수 있다. 강성행렬 $[k]$ 의 계산결과는 식 (30)과 같으며 8x8 대칭 정방행렬임을 알 수 있다.

$$[k] = \begin{bmatrix} 1018474 & 347222 & -601808 & -69444 & -509304 & -347222 & 92637 & 69444 \\ & 1018474 & 69444 & 92637 & -347222 & -509304 & -69444 & -601808 \\ & & 1018474 & -347222 & 92637 & -69444 & -509304 & 347222 \\ & & & 1018474 & 69444 & -601808 & 347222 & -509304 \\ & & & & 1018474 & 347222 & -601808 & -69444 \\ & & & & & 1018474 & 69444 & 92637 \\ & & & & & & 1018474 & -347222 \\ & & & & & & & 1018474 \end{bmatrix} \quad (30)$$

강성행렬을 구성하는 각 항의 숫자는 실제로는 소수점 아래의 숫자를 포함하지만 소수점 아래의 숫자의자리수가 많은 경우 역행렬을 제대로 계산할 수 없으므로 정수로 나타낸 것이다. Fig. 3에서 정사각형요소의 네 모서리점에 작용하는 절점외력, $\{F\}$ 은 등분포하중의 크기와 요소의 두께 및 변의 길이를 통해 다음과 같이 쉽게 나타낼 수 있는데 단위는 kN 이다.

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 50 \\ 50 \\ -50 \\ 50 \\ -50 \\ -50 \\ 50 \\ -50 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

따라서 $\{F\} = [k]\{d\}$ 로부터 $\{d\} = [k]^{-1}\{F\}$ 를 이용하여 절점변위를 다음과 같이 결정할 수 있다.

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.8 \times 10^5 \\ 1.8 \times 10^{-5} \\ -1.8 \times 10^{-5} \\ 1.8 \times 10^{-5} \\ -1.8 \times 10^{-5} \\ -1.8 \times 10^{-5} \\ 1.8 \times 10^{-5} \\ -1.8 \times 10^{-5} \end{Bmatrix} \quad (32)$$

응력은 식 (21)로부터 계산될 수 있으며 일반적으로 사변형 요소내에서 일정하지 않으나 등방구속압을 받는 경우는 요소내에서 일정한 값이 된다. 요소내의 4개의 가우스점과 요소 중앙에서 해석을 통해 얻은 응력값은 모두 100 kN/m^2 으로서 등방구속압과 같은 크기가 되어 프로그램의 계산과정에 문제가 없음을 알 수 있다.

2.4.2 전단응력하에서의 응력분포

사변형요소내의 응력분포를 살펴보기 위해 요소의 측

면에 전단응력이 작용하는 경우를 고려해 보았다. 이러한 경우는 실제에 있어 암거 상부지반에 해당되는 것으로 암거 상부지반과 그에 접해 있는 주변지반 사이의 침하 차이로 인해 암거 상부지반의 측면에 연직하향의 전단력이 작용하게 된다. 이 경우 Fig. 4에 나타나 있는 흙 요소는 평면변형률 상태에 있게 된다. 흙요소는 중간밀도의 모래로 가정하였는데 두께는 1 m 이고 탄성계수는 $E = 30000 \text{ kN/m}^2$ 이며 포아송비는 $\nu = 0.3$ 이다[15]. 흙의 단위중량은 18 kN/m^3 이고 전단저항각(ϕ)은 30° 로 가정하였는데 요소 중앙 깊이에서의 전단응력은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \tau &= \sigma_v K_h \tan \phi \\ &= 18(0.5)(1 - \sin \phi)(\tan 30^\circ) \\ &= 2.6 \text{ kN/m}^2 \end{aligned} \quad (33)$$

횡방향토압계수는 재키(Jaky)의 식[16]을 적용하여 $K_h = 1 - \sin \phi$ 로 계산하였다.

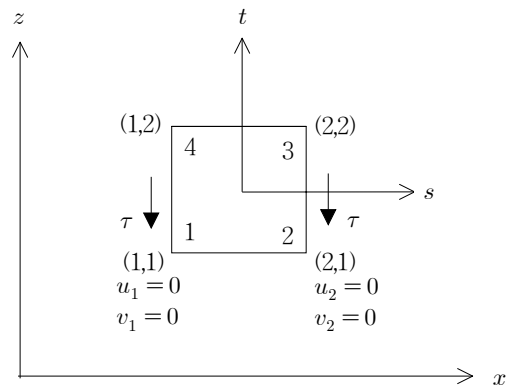


Fig. 4. Element under shear stress

Fig. 4에서 요소의 모서리 1과 2로 연결되는 변은 암거와 접하는 부분으로 경계조건에 의해 x 방향 및 z 방향으로의 변위는 구속된다. Fig. 4에 나타나 있는 사변형 요소에 대한 절점외력은 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1.3 \\ 0 \\ -1.3 \\ 0 \\ -1.3 \\ 0 \\ -1.3 \end{Bmatrix} \quad (34)$$

절점외력과 강성행렬로부터 결정된 절점변위는 다음과 같다. 또한 결정된 변위로부터 계산한 요소내의 응력 값들은 Fig. 5에서와 같다. Fig. 5의 응력값들은 가우스 점들과 요소의 중앙에 대응하는 값들이다.

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2.2 \times 10^{-5} \\ -7.4 \times 10^{-5} \\ -2.2 \times 10^{-5} \\ -7.4 \times 10^{-5} \end{Bmatrix} \quad (35)$$

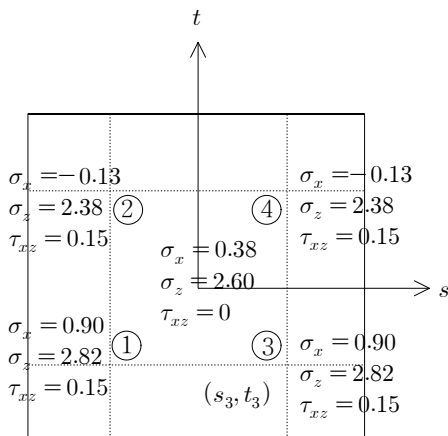


Fig. 5. Calculated stresses

Fig. 5에 나타낸 응력값들에서 음의 부호는 인장응력을 의미한다. Fig. 5를 통해 알 수 있듯이 횡방향응력인 σ_x 의 경우 요소 상부에서는 상대적으로 작은 크기의 인장응력이 발생하고 하부로 갈수록 압축응력으로 바뀌게 되며 절댓값도 커짐을 알 수 있다. 연직응력인 σ_z 의 경우 역시 요소 상부에서는 상대적으로 작은 크기의 압축응력이 발생하며 하부로 갈수록 그 크기가 커짐을 알

수 있는데 크기에 있어서 큰 차이를 보이지는 않는다. 전단응력의 경우 고려한 위치에 상관없이 일정한 값을 보임을 알 수 있다. 이상의 결과로부터 요소내에 발생하는 횡방향응력과 연직응력은 위치에 따라 그 값들이 변함을 알 수 있는데 요소에 작용하는 외력조건과 경계조건에 비추어 볼 때 합리적인 분포양상을 보인다고 할 수 있다.

3. 결론

본 연구에서는 상용 프로그램에서는 충분히 고려할 수 없는 지반-구조물 상호작용효과를 고려하기 위한 유한요소해석 프로그램 개발의 일환으로 쉽고 직관적인 해석 프로그램을 개발하고자 하였다. 개발된 프로그램의 신뢰성 검증을 위해서 두 가지 예에 대한 해석을 수행하고 해석결과를 비교분석하였다. 본 연구를 통해 얻은 프로그램의 개발과정에서의 핵심 내용과 결론은 다음과 같다.

- 1) 유한요소를 구성하는 요소로는 등매개변수 사변형 요소를 채택하였는데 요소내의 변위는 요소의 절점변위와 형상함수로 표현된다.
- 2) 전체좌표에 의한 미분계수로 표현되는 변형률을 얻기 위해 자코비언과 자연좌표를 이용하는 계산 과정을 코딩하였다.
- 3) 요소의 강성행렬을 정의하는 이중적분식을 수치적 분으로 변환시키기 위해 4점 가우스 구적법을 적용하였다.
- 4) 개발된 프로그램의 계산과정 검증을 위해 등방구속압을 받는 요소에 대한 해석을 수행한 결과 요소내의 네 개의 가우스점과 요소 중앙에 대해 계산된 응력값이 등방구속압과 일치됨을 알 수 있었다.
- 5) 개발된 프로그램의 계산과정 검증을 위해 전단응력을 받는 요소에 대한 해석을 수행한 결과 요소내에 발생되는 횡방향응력 및 연직응력이 위치에 따라 변화됨을 알 수 있었으며 응력의 크기 및 분포양상에 있어 합리적인 결과를 보임을 알 수 있었다.
- 6) 개발된 프로그램은 다양한 하중조건 및 경계조건을 갖는 지반공학 관련 문제에 유용하게 적용될 수 있을 것으로 보인다.

References

- [1] D. R. J. Owen, and E. Hinton, Finite elements in plasticity, Pineridge Press Limited Swansea, U.K., 1980.
- [2] E. Wilson, B. Parsons, "Trapezoidal Finite Elements - Their Derivation and Use for Axisymmetric Rotating Bodies", ASME Presentation at the Design Engineering Technical Conference, Cincinnati, Ohio, September 9-12, Paper 73 -DET- 47, 1973.
- [3] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, J.Z. Zhu, The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals, Elsevier, Oxford, UK, 2008.
- [4] D. Moxey, M. D. Green, S. J. Sherwin, J. Peiro, "An isoparametric approach to high-order curvilinear boundary-layer meshing", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.283, pp.636-650, 2015. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2014.09.019>
- [5] J. Hoth and W. Kowalczyk, Direct determination of shape functions for isoparametric elements with arbitrary node configuration, Open Engineering, Volume 5, Issue 1, ISSN (Online) 2391-5439, 2015. DOI: <https://doi.org/10.1515/eng-2015-0049>
- [6] S.E. Stapleton, T. Gries, A.M. Waas. E.J. Pineda. Adaptive Shape Functions and Internal Mesh Adaptation for Modelling Progressive Failure in Adhesively Bonded Joints, NASA Technical Report, NASA/TM-2014-218333, 2015. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijstr.2014.05.022>
- [7] P. Jarzebski, K. Wisniewski, Corrected shape functions for sixnode triangular element for heat conduction, In: T. Lodygowski, J. Rakowski, P. Litewka (Eds.), Recent Advances in Computational Mechanics, CRC Press, London, UK, 2014.
- [8] K.J. BATHE : Finite Element Procedures, Prentice-Hall International, New Jersey, USA, p. 1037, 1996.
- [9] S. Lang, Calculus, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1968.
- [10] E. Kreyszig. Advanced Engineering Mathematics Fifth Edition, pp.1-1080, John Wiley & Sons, Inc., 1983.
- [11] W. Kaplan, Advanced Calculus, 3rd ed. Reading, MA: Addison-Wesley, pp. 98-99, 123, and 238-245, 1984.
- [12] H. Wilf, Mathematics for the Physical Sciences, Wiley, New York, 1962.
- [13] A. Stroud, and D. Secrest, Gaussian Quadrature Formulas, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1966.
- [14] M. Budhu, Soil mechanics and foundations, John Wiley & Sons, Inc., 2007.
- [15] J. E. Bowles, Foundation analysis and design, McGraw-Hill Book Company, 1988.
- [16] J. Jaky, "The coefficient of earth pressure at rest. In Hungarian (A nyugalmi nyomas tenyezoe)", Journal of the Society of Hungarian Architects and Engineering (Magyar Mernok es Epitesz-Egylet Kozlonye), pp.355-358, 1944.

이 승 현(Seung-Hyun Lee)

[정회원]



- 1988년 8월 : 서울대학교 토목공학과 (공학사)
- 1991년 2월 : 서울대학교 토목공학과 (공학석사)
- 1997년 2월 : 서울대학교 토목공학과 (공학박사)
- 2000년 3월 ~ 현재 : 선문대학교 건축사회환경공학부 교수

<관심분야>

토질역학, 기초공학

한 진 태(Jin-Tae Han)

[정회원]



- 1999년 2월 : 서울대학교 토목공학과 (공학사)
- 2001년 2월 : 서울대학교 지구환경시스템공학부 (공학석사)
- 2006년 8월 : 서울대학교 지구환경시스템공학부 (공학박사)
- 2011년 12월 ~ 현재 : 한국건설기술연구원 Geo-인프라연구실 수석연구원

<관심분야>

지반내진공학, 기초공학