

## 이축 및 일축 대칭단면 적층복합 보의 휨과 좌굴해석

황진우<sup>1</sup>, 백성용<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>인제대학교 토목공학과, <sup>2</sup>인제대학교 토목도시공학부

### Flexural and Buckling Analysis of Laminated Composite Beams with Bi- and Mono-Symmetric Cross-Sections

Jin-Woo Hwoang<sup>1</sup>, Sung Yong Back<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Department of Civil Engineering, Inje University

<sup>2</sup>School of Civil and Urban Engineering, Inje University

**요약** 이축 및 일축대칭 단면의 적층복합 보의 휨 해석과 좌굴해석을 위해 일반화된 보 요소를 제안하였다. 전단변형 보 이론을 사용하여 유도된 보 요소는 휨 전단변형 및 뒹 비틀림과 재료 비등방성 성질에 따른 연계성을 고려하였다. 서로 다른 단면에 대해 해석적 기법으로 구한 단면 강성계수와 함께 평면응력과 평면변형률 가정을 사용하였다. 대칭 및 역대칭 적층복합 보의 휨 거동을 조사하기 위해 뒹 변형을 포함하여 절점 당 7개의 자유도를 가진 두 가지 유형의 3절점, 4절점 보 요소를 제안하였다. 전단잠금 현상을 완화하기 위해 본 연구에서는 감차적분 기법을 사용하였다. 또한, 유도된 기하학적 블록강성을 사용하여 축방향 압축력을 받는 적층복합 보의 좌굴하중을 산정하였다. 제시한 보 요소의 정확성과 효율성을 검증하기 위해 3절점 보 요소에 근거한 결과를 다른 연구자와 ABAQUS 유한요소 해석결과와 비교하였다. 적층복합 보의 휨 거동과 좌굴하중에 대한 연계강성과 전단변형, 경계조건, 하중형태, 길이-높이 비, 적층형태의 영향을 조사하였다. 두 개의 다른 보 요소의 수렴성도 제시하였다.

**Abstract** A generalized laminated composite beam element is presented for the flexural and buckling analysis of laminated composite beams with double and single symmetric cross-sections. Based on shear-deformable beam theory, the present beam model accounts for transverse shear and warping deformations, as well as all coupling terms caused by material anisotropy. The plane stress and plane strain assumptions were used along with the cross-sectional stiffness coefficients obtained from the analytical technique for different cross-sections. Two types of one-dimensional beam elements with seven degrees-of-freedom per node, including warping deformation, i.e., three-node and four-node elements, are proposed to predict the flexural behavior of symmetric or anti-symmetric laminated beams. To alleviate the shear-locking problem, a reduced integration scheme was employed in this study. The buckling load of laminated composite beams under axial compression was then calculated using the derived geometric block stiffness. To demonstrate the accuracy and efficiency of the proposed beam elements, the results based on three-node beam element were compared with those of other researchers and ABAQUS finite elements. The effects of coupling and shear deformation, support conditions, load forms, span-to-height ratio, lamination architecture on the flexural response, and buckling load of composite beams were investigated. The convergence of two different beam elements was also performed.

**Keywords** : Generalized Laminated Composite Beam Element, Cross-Section Stiffness Coefficients, Geometric Block Stiffness, Buckling Load, Shear Deformation

\*Corresponding Author : Sung Yong Back(InJe Univ.)

email: civsyb@inje.ac.kr

Received September 18, 2019

Revised October 16, 2019

Accepted December 6, 2019

Published December 31, 2019

### 1. 서론

적층복합 보는 기존 재료에 비해 높은 피로강도, 부식 저항성, 내구성 등의 장점으로 인해 항공, 토목, 기계, 해양 산업분야에서 사용이 증가하는 추세이다. Vlasov[1]와 Gjelsvik[2]의 등방성 박벽보 이론을 개단면 이방성 적층복합재보로 확장한 개념은 Bauld와 Tzeng[3]에 의해 제안되었다. 이후 전통적 보이론과 실험결과의 차이를 극복하기 위해 전단변형의 영향을 고려한 일차원 유한요소법[4-10]이 제안되었으며 각각 다른 양상에 대해 연구를 수행하였다. 단면의 형상에 따라 이축대칭 I형, 일축대칭 I형, 일축대칭 채널 또는 T형 단면으로 대별할 수 있으며 접근방법도 약간의 차이를 두고 있다. 따라서 적층복합 보의 모든 단면에 적용할 수 있는 일반된 접근법이 필요하다.

본 연구에서는 이축과 일축 대칭단면 모두에 적용할 수 있는 적층복합 박벽보의 일반화된 보 요소를 제시하였다. 제안된 보 요소는 휨, 전단 및 뒎 변형과 재료 이방성으로 인한 모든 연계강성을 고려한다. 먼저, 외형좌표계를 이용하여 적층복합 박벽보의 변위장을 정의하고 이에 따른 구성방정식을 나타내었다. 수치해석을 위해 부재 내의 변위는 등매개변수를 사용하여 3절점, 4절점 유한요소 보 모델을 제안하였다. 각 단면에 대한 단면 강성계수를 해석적으로 유도하였고 사용단면에 대한 강성만 변화함으로 적층복합 보의 휨 거동을 조사하였다. 또한, 압축력을 받는 이축대칭 I형과 일축대칭 T형 적층 보의 좌굴하중을 산정하였다. 제안된 보 요소를 사용하여 기존의 연구결과와 ABAQUS 유한요소 해석결과와 비교, 검토하였다. 각 단면에 대해 다양한 경계조건, 길이-높이 비, 적층순서, 전단변형의 영향도 조사하였다.

### 2. 지배방정식

외형좌표계를 이용하여 박벽보의 면내 평면강체 가정과 Timoshenko 보이론으로부터 판요소의 중립면 변위 요소  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$ 는  $x$ ,  $y$ ,  $z$ 축방향의 강제변위  $U(x)$ ,  $V(x)$ ,  $W(x)$ 로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{u}(s,x) &= U(x) + \theta_z(x)y(s) + \theta_y(x)z(s) + \phi_\omega(x)\omega(s) \\ \bar{v}(s,x) &= V(x)\sin\theta(s) - W(x)\cos\theta(s) - \Phi(x)q(s) \\ \bar{w}(s,x) &= V(x)\cos\theta(s) + W(x)\sin\theta(s) + \Phi(x)r(s) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $\theta_y$ ,  $\theta_z$ ,  $\phi_\omega$ 는 각각  $y$ ,  $z$ ,  $w$ 의 축방향 회전각;  $\Phi(x)$ 는 주극점에 대한 회전각;  $\omega(s)$ 는 뒎 변형을 나타낸다. 식 (1)의 변위장에 대한 최종 변형률을 이용하여 변형을 에너지의 변분을 취하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta U = \int_0^l (N_x \delta \epsilon_x^\circ + M_y \delta \kappa_y + M_z \delta \kappa_z + M_\omega \delta \kappa_\omega \\ + V_y \delta \gamma_{xy}^\circ + V_z \delta \gamma_{xz}^\circ + T \delta \gamma_\omega^\circ + M_t \delta \kappa_{xs}) dx \end{aligned} \quad (2)$$

여기서  $\epsilon_x^\circ$ 는 축변형률;  $\kappa_y, \kappa_z$ 는 곡률성분;  $\kappa_\omega, \kappa_{sx}$ 는 각각 뒎과 비틀림 곡률이다.  $N_x$ 는 축력;  $M_y, M_z$ 와  $V_y, V_z$ 는  $y$ 와  $z$ 축에 대한 모멘트와 전단력;  $M_\omega$ 는 bimoment;  $T$ 와  $M_t$ 는 총 비틀림 모멘트를 나타낸다.

등분포 압축력  $P^\circ$ 을 받는 복합재의 위치에너지는 식 (3)과 같이 나타낸다[11].

$$\Omega = \frac{1}{2} \int_V \frac{P^\circ}{A} [(\bar{v}')^2 + (\bar{w}')^2] dv \quad (3)$$

식 (1)을 식 (3)에 대입하여 변분을 취하면 외력에 의한 위치에너지의 변분은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta \Omega = \int_l P^\circ \{ v' \delta v' + [w' + (y_p + e)\theta_x'] \delta w' \\ + [(y_p + e)w' + (I_p/A - e\beta_z)\theta_x'] \delta \theta_x' \} dx \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $I_p$ 는 주극점에 대한 단면 극관성모멘트,  $e$ 는 편심,  $\beta_z$ 는 Wagner 계수로 다음과 같다.

$$\beta_z = \left[ \int_A y^3 dA + \int_A z^2 y dA \right] / I_z - 2y_p \quad (5)$$

적층판 k층의 박판 구성방정식은 아래와 같이 표현된다.

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma_x \\ \tau_{sx} \end{matrix} \right\}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^* & \bar{Q}_{16}^* \\ \bar{Q}_{16}^* & \bar{Q}_{66}^* \end{bmatrix}^k \left\{ \begin{matrix} \epsilon_x \\ \gamma_{sx} \end{matrix} \right\} \quad (6)$$

여기서 평면응력( $\sigma_s = 0$ ) 가정에 대한 압축축소 변형강성은 다음과 같다.

$$\bar{Q}_{11}^* = \bar{Q}_{11} - \bar{Q}_{12}^2 / \bar{Q}_{22} \quad (7a)$$

$$\bar{Q}_{16}^* = \bar{Q}_{16} - \bar{Q}_{12} \bar{Q}_{26} / \bar{Q}_{22} \quad (7b)$$

$$\bar{Q}_{66}^* = \bar{Q}_{66} - \bar{Q}_{26}^2 / \bar{Q}_{22} \quad (7c)$$

면의 평면응력과 평면변형률의 구성관계는 아래와 같이 주어진다.

$$\tau_{nx}^k = \bar{Q}_{55}^k \gamma_{nx} \quad (8)$$

식 (6)을 이용하여 적층복합 판요소의 구성방정식을 힘과 변위에 대한 식으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_y \\ -M_z \\ M_w \\ M_l \\ V_y \\ V_z \\ T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16} & E_{17} & E_{18} \\ & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} & E_{26} & E_{27} & E_{28} \\ & & E_{33} & E_{34} & E_{35} & E_{36} & E_{37} & E_{38} \\ & & & E_{44} & E_{45} & E_{46} & E_{47} & E_{48} \\ & & & & E_{55} & E_{56} & E_{57} & E_{58} \\ & & & & & E_{66} & E_{67} & E_{68} \\ & & & & & & E_{77} & E_{78} \\ & & & & & & & E_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ \theta_y' \\ \theta_z' \\ \phi_x' \\ -2\theta_x' \\ w' + \theta_y \\ v' - \theta_x \\ \theta_z' - \phi_x \end{Bmatrix} \quad (9)$$

여기서  $E_{ij}$ 는 보의 단면에 대한 적층강성이며 I형과 T형 단면에 대한 단면강성계수는 다른 문헌에 수록되어 있다 [6-7].

### 3. 유한요소 해석모델

요소의 절점 수는 3절점과 4절점이며 등매개변수 (isoparametric) 보 요소를 사용하였다. 요소의 절점 수  $n$ 에 따라 부재내의 변위는 절점  $\alpha$ 의 형상함수  $N_\alpha$ 로 나타낼 수 있다.

$$u = \sum_{\alpha=1}^n N_\alpha u_\alpha, \quad v = \sum_{\alpha=1}^n N_\alpha v_\alpha, \quad w = \sum_{\alpha=1}^n N_\alpha w_\alpha, \\ \theta_i = \sum_{\alpha=1}^n N_\alpha \theta_{i\alpha} \quad (i = x, y, z), \quad \phi_w = \sum_{\alpha=1}^n N_\alpha \phi_{w\alpha} \quad (10)$$

식 (2)와 (4)에 식 (10)을 대입하면 변형률 에너지의 변분과 외력에 의한 위치에너지의 변분은 각각 아래와

같다.

$$\delta U = \delta \mathbf{d}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e \quad (11a)$$

$$\delta \Omega = \delta \mathbf{d}_e^T \mathbf{k}_g \mathbf{d}_e \quad (11b)$$

여기서 요소의 절점 수에 따른 요소 변위벡터  $\mathbf{d}_e$ 와 절점 변위벡터  $\mathbf{d}_\alpha$ 는 아래와 같이 정의되며

$$\mathbf{d}_e = [d_1, d_2, \dots, d_n]^T \\ \mathbf{d}_\alpha^T = [u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z, \phi_x] \quad (12)$$

요소의 선형과 기하학적 강성행렬,  $\mathbf{k}_e$ 와  $\mathbf{k}_g$ 는 아래와 같은 블록행렬로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e & \dots & k_{1n}^e \\ k_{12}^e & k_{22}^e & \dots & k_{2n}^e \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{1n}^e & k_{2n}^e & \dots & k_{nn}^e \end{bmatrix} \quad (13a)$$

$$\mathbf{k}_g = \begin{bmatrix} k_{11}^g & k_{12}^g & \dots & k_{1n}^g \\ k_{12}^g & k_{22}^g & \dots & k_{2n}^g \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{1n}^g & k_{2n}^g & \dots & k_{nn}^g \end{bmatrix} \quad (13b)$$

적층복합 보의 평형방정식은 다음의 식으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{k}_e \mathbf{d}_e = \mathbf{f}_e \quad (14)$$

여기서  $\mathbf{f}_e$ 는 절점력 벡터이다. 또한, 선형 고유치문제는 아래와 같이 표현된다.

$$[\mathbf{K}_E + \lambda \mathbf{K}_G] \delta \mathbf{d} = 0 \quad (15)$$

좌굴하중인 고유치  $\lambda$ 을 산정하기 위해 역방향 반복법 (inverse iteration procedure)을 사용한다.

### 4. 수치해석

3절점과 4절점 보 요소를 사용하여 이축대칭 I형과 일축대칭 T형 적층 박벽보의 힘해석과 좌굴해석을 수행하

Table 1. Mid-span displacements of a simply-supported beam under a concentrated load (cm)

Stacking sequence	Park et al.[12]		Present		ABAQUS
	$\epsilon_s = 0$	$\sigma_s = 0$	$\epsilon_s = 0$	$\sigma_s = 0$	
[0] <sub>16</sub>	3.906	3.989	3.944	4.027	4.068
[15/-15] <sub>4s</sub>	4.231	4.415	4.263	4.448	4.481
[30/-30] <sub>4s</sub>	5.300	5.946	5.325	5.972	5.995
[45/-45] <sub>4s</sub>	7.258	8.589	7.279	8.613	8.633
[60/-60] <sub>4s</sub>	9.675	10.864	9.697	10.888	10.90
[75/-75] <sub>4s</sub>	11.291	11.784	11.31	11.81	11.84
[0/90] <sub>4s</sub>	5.858	5.951	5.886	6.011	6.029

고 기존의 연구결과와 상용 프로그램인 ABAQUS 유한 요소 해석결과를 비교, 분석하였다. 아래의 모든 수치해석에 사용된 복합재는 Glass-epoxy이며 이에 대한 재료 특성은  $E_{11}=53.78$  GPa,  $E_{22}=E_{33}=17.93$  GPa,  $G_{12}=G_{13}=8.96$  GPa,  $G_{23}=3.45$  GPa,  $\nu_{12}=\nu_{13}=0.25$ ,  $\nu_{23}=0.34$ 이다.

#### 4.1 휨 해석

휨 거동을 조사하기 위하여 보의 중앙에 집중하중 1.0 kN을 받는 길이가 2.5 m인 단순보를 사용하였다. 단면은 상하부 플랜지 폭과 웨브 높이는 50 mm, 플랜지와 웨브의 두께는 모두 2.08 mm이며 상하부 플랜지와 웨브는 모두 16층으로 적층되어 있는 이축대칭 I형으로 가정하였다. 단면을 구성하는 박벽 요소는 중립면에 대해 대칭 적층된 일방향[0]<sub>n</sub>, 크로스플라이[0/90]<sub>n</sub>, 앵글플라이[ $\theta/-\theta$ ]<sub>n</sub>을 고려하였다.

본 연구에서는 평면응력( $\sigma_s = 0$ )과 평면변형률( $\epsilon_s = 0$ ) 가정을 사용하여 휨 해석을 수행하였다. 각 적층순서에 대해 두 개의 3절점 보 요소를 사용하여 지간 중앙에서의 최대 처짐을 Park 등[12]과 ABAQUS 유한 요소 해석결과와 함께 Table 1에 수록하였다. 본 연구의 최대 처짐은 Vlasov 박벽보 이론에 근거한 미분방

정식 해를 해석적 방법으로 구한 Park 등의 결과보다 ABAQUS 유한요소 해석결과에 더 근접한 것으로 나타났다. 또한, 평면응력으로 가정한 최대 처짐이 평면변형률로 가정한 처짐보다 크게 나타나 평면변형률 가정이 단면 휨강성을 과대평가하여 비안전측 결과를 보여 주었다.

다음 예제는 0.1 kN/m의 등분포하중과 0.1 kN의 집중하중을 받고 높이에 대한 길이 비가  $L/h=20$ 과  $L/h=50$ 인 외팔보를 고려하였다. 단면은 상하부플랜지 폭은 50 mm, 웨브의 높이는 100 mm, 플랜지와 웨브의 두께는 2.08 mm인 이축대칭 I형이며 각각 4개의 층으로 적층되어 있다. 상하부플랜지는 일방향이며 웨브는 앵글플라이[ $\theta/-\theta$ ]<sub>2</sub>로 가정하였다.

보의 길이-높이 비가 상대적으로 작은 경우( $L/h=5$ ,  $L/h=10$ ) 등분포하중과 집중하중으로 인하여 상부플랜지에 국부좌굴이 발생하여  $L/h=20$ 과 50의 경우를 선택하였다. 다양한 적층순서에 대해 평면응력 가정을 사용하여 구한 최대 처짐과 ABAQUS 유한요소 해석결과를 Table 2에 요약하였다. 본 연구에서는 하나의 3절점 요소로 보를 모델링하였으며, 평면응력으로 가정한 최대 처짐은 ABAQUS 유한요소 해석결과와 잘 일치하는 것을 보여주고 있다.

제안된 보 요소의 수렴성을 조사하기 위해 집중하중을

Table 2. Maximum displacement of a cantilever beam (cm)

Stacking sequence	uniformly distributed load				tip load			
	$L/h = 20$		$L/h = 50$		$L/h = 20$		$L/h = 50$	
	Present	ABAQUS	Present	ABAQUS	Present	ABAQUS	Present	ABAQUS
[0] <sub>4</sub>	0.542	0.549	20.98	21.02	0.720	0.728	11.19	11.20
[15/-15] <sub>2</sub>	0.555	0.560	21.50	21.53	0.738	0.743	11.46	11.47
[30/-30] <sub>2</sub>	0.589	0.593	22.85	22.87	0.784	0.787	12.18	12.19
[45/-45] <sub>2</sub>	0.624	0.627	24.21	24.22	0.830	0.833	12.91	12.92
[60/-60] <sub>2</sub>	0.642	0.646	24.91	24.93	0.854	0.858	13.28	13.29
[75/-75] <sub>2</sub>	0.648	0.654	25.13	25.16	0.862	0.867	13.40	13.41
[90/-90] <sub>2</sub>	0.649	0.656	25.17	25.21	0.863	0.870	13.42	13.44

Table 3. Convergence of two different element solutions of CF doubly symmetric I-beam (cm)

Lay-up	$L/h = 20$				$L/h = 50$			
	Three-node element		Four-node element		Three-node element		Four-node element	
	n=1	n=2	n=1	n=2	n=1	n=2	n=1	n=2
$[0]_4$	0.7204	0.7204	0.7205	0.7205	11.19	11.19	11.19	11.19
$[15/-15]_2$	0.7377	0.7377	0.7377	0.7377	11.46	11.46	11.46	11.46
$[30/-30]_2$	0.7835	0.7835	0.7836	0.7835	12.18	12.18	12.19	12.19
$[45/-45]_2$	0.8300	0.8300	0.8300	0.8300	12.91	12.91	12.91	12.91
$[60/-60]_2$	0.8541	0.8541	0.8542	0.8542	13.28	13.28	13.29	13.29
$[75/-75]_2$	0.8619	0.8619	0.8620	0.8619	13.40	13.40	13.40	13.40
$[90/-90]_2$	0.8634	0.8634	0.8635	0.8634	13.42	13.42	13.42	13.42

받는 외팔보에 대해 3절점과 4절점 보 요소를 사용하여 구한 최대 처짐을 Table 3에 나타내었다. 모든 적층순서에 대해 3절점과 4절점 보 요소의 결과는 잘 일치하는 것을 나타내고 있으며 하나의 3절점 보 요소로 보의 휨 거동을 잘 표현할 수 있음을 알 수 있다.

다양한 적층형태에 대한 전단변형의 영향을 조사하기 위하여 등분포하중과 집중하중을 받는 외팔보에 대해 웹 적층각의 변화에 따른 고전적 보이론(CBT)과 Timoshenko 1차 보이론(FOBT)의 최대 처짐을  $\bar{v} = v_{\max} E_2 b_2^3 / (q l^4)$  과  $\bar{v} = v_{\max} E_2 b_2^3 / (P l^3)$  으로 무차원화한 결과를 앵글플라이의 함수로 Fig. 1과 Fig. 2에 각각 나타내었다.

등분포하중과 집중하중이 작용하는 외팔보의 경우 일차 전단변형이론에 따른 비연계방정식에 대한 최대 처짐의 이론해는 휨과 전단변형에 의한 처짐 성분으로 표현되며 각각 아래와 같다[13]:

$$v_{\max} = \frac{q l^4}{8(EI_y)_{\text{com}}} + \frac{q l^2}{2(GA_y)_{\text{com}}} \quad (16-a)$$

$$v_{\max} = \frac{P l^3}{3(EI_y)_{\text{com}}} + \frac{P l}{(GA_y)_{\text{com}}} \quad (16-b)$$

모든 적층각에서 보 요소를 사용한 유한요소 해석결과는 FOBT 해와 잘 일치하지만 전단변형이 고려되지 않은 CBT 해와는 다소 차이를 보여주고 있다. 휨 강성에 대한 연계강성 값이 작아 재료 비등방성의 영향은 무시할 수 있어 보 요소를 사용한 처짐은 직교이방성의 해와 잘 일치하는 것을 볼 수 있다.  $L/h = 50$ 의 경우 전단변형의 효과는 무시할 정도로 작으나 상대적으로  $L/h$ 비가 작은  $L/h = 20$ 의 경우 전단변형의 효과는 다소 증가하는 것으로 나타나 전단변형의 효과를 고려할 수 있는 모델이 적용되어야 한다.

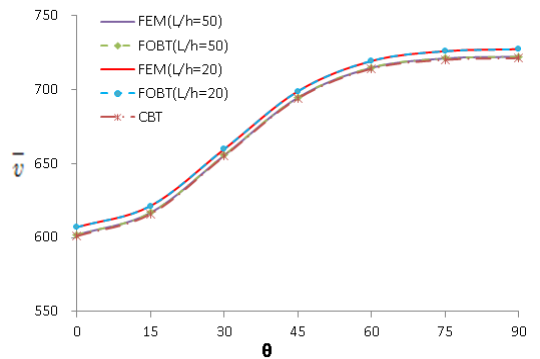


Fig. 1. Variation of tip displacement of CF beam under uniformly distributed load ( $L/h=20$  and  $L/h=50$ )

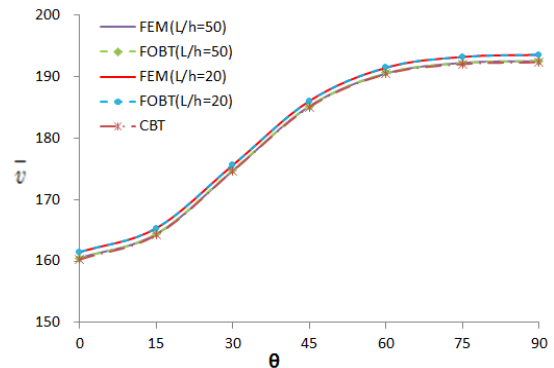


Fig. 2. Variation of tip displacement of CF beam under a tip load ( $L/h=20$  and  $L/h=50$ )

#### 4.2 좌굴 해석

보의 길이-높이 비가  $L/h = 10$ 과  $L/h = 20$ 인 외팔보의 주극점(principal pole)에 압축하중이 작용하는 경우를 고려하였으며 상하부 플랜지 폭 및 웹 높이가 두께는 각각 50 mm, 50 mm 그리고 2.08 mm인 이축대

Table 4. Buckling loads of a cantilever I-beam (kN)

Stacking sequence	L/h=10			L/h=20				
	Present		ABAQUS	Vo & Lee[8]	Kim & Choi[9]	Present		ABAQUS
	$\epsilon_s = 0$	$\sigma_s = 0$				$\epsilon_s = 0$	$\sigma_s = 0$	
[0] <sub>16</sub>	23.666	22.786	22.634	5.7415	5.7375	5.8626	5.7408	5.7329
[15/-15] <sub>4s</sub>	21.529	20.635	20.536	5.1890	5.1877	5.4156	5.1898	5.1852
[30/-30] <sub>4s</sub>	17.241	15.372	15.349	3.8545	3.8560	4.3265	3.8568	3.8573
[45/-45] <sub>4s</sub>	12.613	10.658	10.660	2.6684	2.6706	3.1610	2.6710	2.6726
[60/-60] <sub>4s</sub>	9.4667	8.4369	8.4299	2.1113	2.1132	2.3713	2.1136	2.1137
[75/-75] <sub>4s</sub>	8.1122	7.7727	7.7529	1.9451	1.9466	2.0321	1.9472	1.9460
[0/90] <sub>4s</sub>	15.580	15.257	15.256	3.8298	3.8498	3.9132	3.8318	3.8472

칭 I형 단면을 사용하였다. 플랜지와 웨브는 16층으로 각 층의 두께는 모두 일정하며 동일한 적층순서와 적층각을 가지는 것으로 가정하였다.

각각의 길이-높이 비에 대해 박벽보의 평면변형률 ( $\epsilon_s = 0$ )과 평면응력( $\sigma_s = 0$ ) 가정을 사용하여 구한 좌굴하중을 Table 4에 나타내었다.  $L/h = 20$ 인 경우 Vo와 Lee[8], Kim와 Choi[9]가 구한 좌굴하중 그리고 평면응력 가정에 의한 좌굴하중은 ABAQUS 해석결과와 잘 일치하나, 평면변형률로 가정한 좌굴하중은 유한요소 결과와 상당한 차이를 보여주고 있으며 휨-비틀림 연계 강성  $D_{16}$ 이 상대적으로 큰 [45/-45]<sub>4s</sub> 앵글플라이에서 좌굴하중은 18.3%의 차이를 보여주고 있다.

$L/h = 10$ 의 경우 [45/-45]<sub>4s</sub> 앵글플라이에서의 좌굴형상을 Fig. 3에서 보여주고 있으며 압축력이 주극점에 작용하여 휨에 의한 좌굴거동을 잘 나타내고 있다. 모든 연계강성을 무시한 외팔보의 직교이방성 단힌 해는 오일러 좌굴하중인  $P_y = \pi^2 E_{22} / 4L^2$ 이다. 연계강성  $E_{25}$ 을 무시한  $y$ 축에 대한 휨 좌굴하중은  $P_y = 10.69$  kN으로 산정되며 본 연구의 해석결과보다 다소 높게 나타났다.

또한, 일방향으로 적층된 [0]<sub>16</sub>인 경우 좌굴하중이 가장 크게 나타났으며  $[\theta/-\theta]$ <sub>4s</sub> 앵글플라이가 증가할수록 좌굴하중이 감소하는 것을 보여주었다.

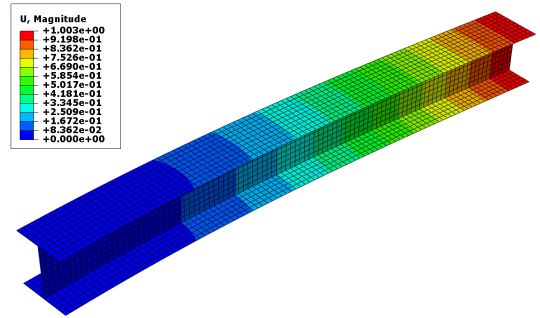


Fig. 3. Buckling Mode Shape for a Cantilever Beam, [45/-45]<sub>4s</sub>

마지막 예제는 일축대칭 T형 보의 좌굴거동을 조사하기 위해 보의 길이-높이 비  $L/h=10$ 과  $L/h=20$ 인 외팔보의 주극점에 압축하중이 작용하는 경우를 고려하였다. 단면의 플랜지 폭과 웨브높이가 75 mm와 71.5 mm이며 두께는 각각 7 mm와 5 mm이다. 플랜지와 웨브는 16개의 플라이로 적층되고 중립면에 대해 대칭 적층된 일방향, 크로스플라이, 앵글플라이를 사용하였다. 여러 적층순서에 대해 평면변형률과 평면응력으로 가정한 좌굴하중과 ABAQUS 유한요소 해석결과를 Table 5에 요약하였다.

Table 5. Critical buckling loads of a cantilever T-beam (kN)

Stacking sequence	L/h = 10			L/h = 20		
	Present		ABAQUS	Present		ABAQUS
	$\epsilon_s = 0$	$\sigma_s = 0$		$\epsilon_s = 0$	$\sigma_s = 0$	
[0] <sub>16</sub>	58.589	57.382	57.318	14.796	14.489	14.501
[15/-15] <sub>4s</sub>	54.285	52.028	51.991	13.681	13.110	13.116
[30/-30] <sub>4s</sub>	43.520	38.781	38.840	10.936	9.7468	9.7566
[45/-45] <sub>4s</sub>	31.822	26.282	26.320	7.9888	6.8109	6.7597
[60/-60] <sub>4s</sub>	24.055	21.375	21.320	6.0037	5.3484	5.3462
[75/-75] <sub>4s</sub>	20.526	19.682	19.607	5.1408	4.9268	4.9220
[0/90] <sub>4s</sub>	39.566	38.943	38.603	9.9086	9.7023	9.7328

평면변형률로 가정한 좌굴하중은 ABAQUS 해석결과와 다소 차이가 나타나지만 평면응력으로 가정한 좌굴하중은 ABAQUS 해석결과와 잘 일치하는 것을 보여주고 있다. 또한,  $L/h = 10$ 인 경우 본 연구에서 구한 좌굴하중은 ABAQUS 유한요소 해석결과와 약간의 차이가 있지만  $L/h = 20$ 인 경우에는 ABAQUS 결과와 0.8% 이내로 비교적 정확한 좌굴하중을 구할 수 있었다. 예측한대로 보의 길이가 증가함에 따라 횡좌굴이 두드러져 좌굴하중이 감소하였다. 모든 적층순서에 대하여 일방향 보가 가장 큰 좌굴하중을 나타내며 앵글플라이  $\theta$ 가 증가할수록 좌굴하중은 급격히 감소하는 것을 보여주었다.

### 5. 결론

본 연구에서는 이축대칭과 일축대칭 단면에 적용할 수 있는 일반화된 적층복합 보 모델을 사용하여 휨해석과 좌굴해석을 수행하였다. 각 단면에 대해 해석적으로 구한 단면강성계수만 달리 적용하여 처짐과 좌굴하중을 산정하였다. 평면응력과 평면변형률 가정을 사용하여 3절점과 4절점 보 요소로 모델링하였다. 이축대칭 I형과 일축대칭 T형 단면에 대해 다른 경계조건, 하중조건, 적층순서를 고려한 수치해석을 수행하고 얻은 결론은 다음과 같다.

- 1) 사용단면에 따라 해석적으로 구한 단면강성계수만 변화시킴으로써 본 연구의 일반화된 보 모델을 이축대칭과 일축대칭 적층복합 보에 쉽게 적용할 수 있었다.
- 2) 평면변형률 가정에 의한 결과는 적층 보를 과대평가하는 반면에 평면응력 가정은 ABAQUS 유한요소 해석결과와 잘 일치하여 적층복합 보의 휨과 좌굴 해석 시 평면응력 가정이 사용되어야 한다.
- 3) 적층복합 보의  $L/h$  비가 증가할수록 전단변형의 영향은 미미하나  $L/h$  비가 감소할 경우 플랜지의 국부좌굴 현상에 대한 검토가 선행되어야 한다.
- 4) 일방향으로 적층된  $[0]_n$ 인 경우에 좌굴하중이 가장 크게 나타났으며 앵글플라이가 증가할수록 좌굴하중이 감소하였다.
- 5) 제시한 3절점과 4절점 보 요소는 적은 보 요소의 사용으로도 기존 연구자와 ABAQUS 유한요소 해석결과와 잘 일치하였으며 효율성을 감안하여 3절

점 요소로도 적층복합 보의 휨과 좌굴 해석에 효과적임을 입증하였다.

### References

- [1] V. Z. Vlasov, "Thin-walled elastic beams," Jerusalem: Israel Program for Scientific Translation, 1961.
- [2] A. Gjelsvik, "The theory of thin-walled bars," New York: Wiley, 1981.
- [3] N. R. Bauld, L. S. Tzeng, "A Vlasov theory for fiber-reinforced beams with thin-walled open cross section," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 20, no. 3, pp. 277-297, 1984.  
DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(84\)90039-8](https://doi.org/10.1016/0020-7683(84)90039-8)
- [4] J. Lee, "Flexural analysis of thin-walled composite beams using shear-deformable beam theory," *Composite Structures*, vol. 70, no. 2, pp. 212-222, 2005.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2004.08.023>
- [5] S. Y. Back, S. S. Lee, "A  $C^0$  Finite Element of Thin-Walled Laminated Composite I-Beams Including Shear Deformation," *Journal of Korean Society of Steel Construction*, vol. 18, no. 3, pp. 349-359, 2006. (in Korean)  
DOI: <https://www.kci.go.kr/kciportal/ci/sereArticleSearch/ciSereArtiView.kci?sereArticleSearchBean.artid=ART001120277>
- [6] S. Y. Back, K. M. Will, "Shear-flexible thin-walled element for composite I-beams," *Engineering Structures*, vol. 30, no. 5, pp. 1447-1458, 2008.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2007.08.002>
- [7] S. Y. Back, "Flexural analysis of laminated composite T-beams," *Journal of Korean Society of Steel Construction*, vol. 26, no. 5, pp. 397-405, 2014. (in Korean)  
DOI: <https://www.kci.go.kr/kciportal/ci/sereArticleSearch/ciSereArtiView.kci?sereArticleSearchBean.artid=ART001923507>
- [8] T. P. Vo, J. Lee, "On sixfold coupled buckling of thin-walled composite beams," *Composite Structures*, vol. 90, no. 3, pp. 295-303, 2009.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.03.008>
- [9] N. I. Kim, D. H. Choi, "Super convergent shear deformable finite elements for stability analysis of composite beams," *Composites: Part B*, vol. 44, no. 1, pp. 100-111, 2013.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.07.013>
- [10] N. I. Kim, "Shear deformable doubly- and mono-symmetric composite I-beams," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 53, no. 1, pp. 31-41, 2011.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmeccsci.2010.10.004>

- [11] F. Bleich, "Buckling strength of metal structures," New York: McGraw-Hill, 1952.
- [12] Y. S. Park, H. C. Kwan, D. K. Shin, "Bending Analysis of Symmetrically Laminated Composite Open Section Beam by Vlasov-Type Thin-Walled Beam Theory," *Korean Society of Civil Engineering*, vol. 20, no. I-A, pp. 125-141, 2000. (in Korean)
- [13] J. N. Reddy, "Mechanics of laminated composite plates: theory and analysis," CRC Press, 1997.

---

황진우(Jin Woo Hwoang)

[정회원]



- 2004년 8월 : 인제대학교 토목공학과 (공학석사)
- 2004년 11월 ~ 2007년 11월 : (주)한진개발공사 (구조부 과장)
- 2007년 11월 ~ 2015년 2월 : (주)하우엔지니어링 (구조부 부장)
- 2015년 2월 ~ 현재 : CSD엔지니어링 (구조부 이사)

<관심분야>

토목구조, 적층복합보, 구조동역학

---

백성용(Sung Yong Back)

[정회원]



- 1985년 12월 : (미)조지아공대 토목공학과 (공학석사)
- 1992년 12월 : (미)조지아공대 토목공학과 (공학박사)
- 1994년 3월 ~ 현재 : 인제대학교 토목도시공학부 교수

<관심분야>

강구조, 복합재료, 구조설계