

LQ 제어와 근의 이동범위를 이용한 중근의 극배치 방법

박민호

충남도립대학교 전기전자공학과

Pole Placement Method of a Double Poles Using LQ Control and Pole's Moving-Range

Minho Park

Electrical & Electronics Engineering, Chungnam State University

요약 일반적으로 비선형 시스템은 1차와 2차 시스템의 곱의 형태로 선형화되며, 시스템은 실근, 중근, 서로 다른 두 실근, 복소근의 4종류의 근을 가진다. 이 논문은 시스템이 가지는 4가지 근 중에서 조단블록을 갖는 중근을 복소근으로 이동시키는 LQ 제어의 가중행렬과 제어법칙을 설계하는 방법에 관한 것이다. 상태가중행렬을 제한 조건으로 하고 성능 지수함수를 최소화하는 LQ 제어는 시스템의 안정성을 보장하고 시스템의 근을 이동시키는 극배치 기능을 가지고 있다. 그렇지만 이 방법은 시행착오 방법으로 설계 변수인 가중행렬을 설정하고, 이동되는 근의 위치를 정확히 지정할 수 없는 문제가 있다. 이 문제를 해결하기 위해 해밀토니안 시스템의 특성방정식을 대각행렬의 제어가중행렬과 삼각함수로 표현된 상태가중행렬을 이용하여 기술한다. 이동할 복소근이 이 특성방정식의 근이라는 조건에서 중근과 상태가중행렬의 관계식(ρ, θ)을 유도하고 상태가중행렬이 양의 반한정행렬이라는 조건에서 중근의 이동범위를 구하고, 좌표평면에 도시한다. 그려진 중근의 이동범위에서 복소근을 선택하여 관계식에 대입하여 상태가중행렬을 계산하고, 이것에서 제어법칙이 구한다. 예제에서 3차 시스템의 중근을 이동시키는 제어법칙의 설계과정을 통해 제안한 방법의 타당성을 확인하였다.

Abstract In general, a nonlinear system is linearized in the form of a multiplication of the 1st and 2nd order system. This paper reports a design method of a weighting matrix and control law of LQ control to move the double poles that have a Jordan block to a pair of complex conjugate poles. This method has the advantages of pole placement and the guarantee of stability, but this method cannot position the poles correctly, and the matrix is chosen using a trial and error method. Therefore, a relation function (ρ, θ) between the poles and the matrix was derived under the condition that the poles are the roots of the characteristic equation of the Hamiltonian system. In addition, the Pole's Moving-range was obtained under the condition that the state weighting matrix becomes a positive semi-definite matrix. This paper presents examples of how the matrix and control law is calculated.

Keywords : Pole Placement, LQ Control, Hamiltonian, Jordan Block, Pole's Moving-Range

1. 서론

제어기 설계 목적은 시스템을 안정화시키면서 원하는 출력이 되도록 시스템의 응답특성을 개선하는 것이다. 여러 방법 중에서 LQ(Linear Quadratic) 제어는 시스템

의 상태방정식을 만족하면서 가중행렬로 표현되는 성능 지수함수를 최소화하는 방법으로 제어를 설계하며, 이득여유($1/2, \infty$)와 위상여유(60° 이상)의 안정성보장과 시스템의 근을 임의 위치로 이동시키는 극배치 기능이 있다 [1,2]. 그런데 LQ 제어는 시행착오 방법으로 설계변수를

*Corresponding Author : Minho Park(Chungnam State Univ.)

email: minhinf@gmail.com

Received November 18, 2019

Accepted January 3, 2020

Revised December 12, 2019

Published January 31, 2020

선택하고, 이동할 극점을 정확히 알지 못하는 문제가 있다. 해밀토니안(Hamiltonian) 시스템을 이용하여 이 문제를 해결하려는 연구가 있었다[3-5]. 1972년에 Solheim은 1차와 2차 시스템의 곱으로 시스템을 선형화한 후 해밀토니안 시스템 특성방정식에서 근과 가중행렬의 관계식을 유도하여, 시스템의 실근과 매우 제한적이지만 시스템의 복소근을 이동시키는 방법을 제시하였다[3]. 1995년에 Ochi는 근과 가중행렬의 관계를 상태가 중행렬 변화에 따른 해밀토니안 시스템 특성방정식 근의 변화를 테일러(Taylor) 급수로 표현하였는데 계산량이 많은 것이 단점이다[4]. 2001년에 Fujinaka는 삼각함수로 표현된 상태가중행렬로 관계식을 유도하고 시스템의 복소근을 페루프 복소근으로 이동시키는 방법을 제시하였다[5]. 2005년에 박민호는 Fujinaka의 상태가중행렬과 Solheim의 방법으로 근과 가중행렬의 관계식과 상태가중행렬의 조건에서 시스템의 근의 이동범위(Moving-Range)를 제시하고 시스템의 복소근을 원하는 페루프의 복소근으로 이동시켰다[6]. 2007년에 시스템의 복소근을 페루프의 서로 다른 두 실근으로 이동[7], 2009년에 시스템의 서로 다른 두 실근을 페루프의 복소근으로 이동[8], 2018년에 조단블록을 갖는 시스템의 중근을 페루프의 두 실근으로 이동하는 방법[9]을 제시하였다. 본 논문은 조단블록을 가지는 중근을 페루프의 한 쌍의 복소근으로 이동시키는 LQ 제어에 관한 것이다. 2장에서는 LQ 제어와 제어법칙의 특징 그리고 대각행렬에 대해서 알아보고, 3장에서는 근과 상태가중행렬의 관계식, 중근이 복소근으로 이동할 수 있는 범위에 대해서 알아보고, 4장에서는 간단한 예제 시스템에 제시한 방법을 적용해본다. 그리고 5장에서 결론을 맺는다.

2. LQ 제어와 대각행렬

2.1 LQ 제어

일반적으로 비선형 시스템은 1차와 2차 시스템의 다중 곱의 형태로 선형화하면 1차 시스템에서 얻어지는 실근과 2차 시스템에서 구해지는 서로 다른 두 실근, 복소근, 중근으로 4 종류의 근을 가질 수 있다. 선형화된 n 차 SISO(Single Input Single Output) 시스템의 상태방정식은

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

이고, 제어가 가능하다고 가정한다. 여기서 상태변수 x 는

$n \times 1$ 행렬, 제어입력 u 는 1×1 행렬, A 는 $n \times n$, B 는 $n \times 1$ 인 시스템 행렬이다. 그리고 시스템이 가지는 n 개의 근을

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \quad (2)$$

라 하면, $\lambda_i (i=1, \dots, n)$ 는 4 종류 중 하나가 된다.

그런데 제어입력은 상태방정식을 만족하면서 Eq. (3)의 성능지수함수를 최소화한다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (3)$$

한편 이 제어입력은 라그랑지(Lagrange) 곱수(λ_L)로 표현되는 Eq. (4)의 성능지수함수를 최소화하는 것에서도 구할 수 있다.

$$J_{\lambda} = \int_0^{\infty} (H - \lambda_L^T \dot{x}) dt \quad (4)$$

여기서 $H = \frac{1}{2}(x^T Q x + u^T R u) + \lambda_L^T (Ax + Bu)$ 이고, 상태가중행렬 Q 는 $n \times n$ 인 양의 반한정대칭행렬이고, 제어가중행렬 R 은 1×1 인 양의 한정대칭행렬이다. Eq. (4)를 최소화하는 제어입력은

$$u = -Kx = -R^{-1}B^T P x \quad (5)$$

이다. 여기서 제어법칙 K 는 $1 \times n$ 행렬이다. P 는 가중행렬 Q 와 R 을 변수로 하는 리카티 방정식

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (6)$$

에서 구해지는데 이런 이유로 LQ 제어는 가중행렬의 선택 문제가 된다[1]. 그런데 시스템이 제어가능하면 리카티 방정식은 해밀토니안 시스템

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -V \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (7)$$

에서 유도된다. 여기서 $V = BR^{-1}B^T$ 이다. 그리고 해밀토니안 시스템의 근은 s 평면의 좌반면과 우반면에 각각 n 개씩 위치하며 서로 허수축에 대칭인 특징을 가지고 있다[2,9].

2.2 제어법칙과 근 극배치의 관계

시스템 상태방정식(Eq. (1))을 블록다이어그램으로 표현하면 Fig. 1의 (a)이다. 1단계로($i=1$) Q_1 을 선택해서, Eq. (8)과 Eq. (9)에서 구한 K_1 을 (a)에 적용하면 (b)가 된다.

$$P_1 A_1 + A_1^T P_1 + Q_1 - P_1 B R^{-1} B^T P_1 = 0 \quad (8)$$

$$K_1 = R^{-1} B^T P_1 \quad (9)$$

(b)는 블록선도의 간략화로 (c)로, $A_2 = A_1 - BK_1$ 에 의해 (d)가 된다. 2단계로($i=2$) 선택한 Q_2 를 Eq. (10)과 Eq. (11)에 대입해서 얻은 K_2 를 적용하면 (b)가 된다.

$$P_2 A_2 + A_2^T P_2 + Q_2 - P_2 B R^{-1} B^T P_2 = 0 \quad (10)$$

$$K_2 = R^{-1} B^T P_2 \quad (11)$$

그런데 동일한 제어가중행렬을 사용하며 단계별로 적용된 제어법칙은 Eq. (12)처럼 더해진다.

$$K_1 + K_2 = R^{-1} B^T P_1 + R^{-1} B^T P_2 = R^{-1} B^T (P_1 + P_2) \quad (12)$$

더군다나 가중행렬이 대각행렬이면 $P_1 + P_2$ 를 구하는 리카티 방정식 Eq. (13)은 Eq. (8)과 Eq. (10)을 더해서 얻어지며, 상태가중행렬도 $Q_1 + Q_2$ 가 된다.

$$(P_1 + P_2)A_1 + A_1^T(P_1 + P_2) + (Q_1 + Q_2) - (P_1 + P_2)BR^{-1}B^T(P_1 + P_2) = 0 \quad (13)$$

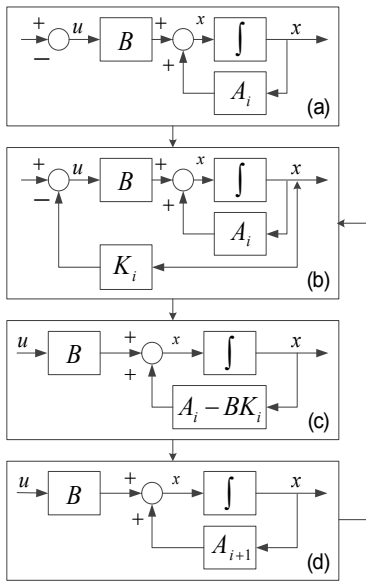


Fig. 1. Step-by-step process of LQ control

위와 같이 선택한 Q_i 와 계산된 K_i 에 의해 시스템의 근이 이동되기 때문에 k 번 반복하면 시스템의 근을 원하는 페루프 근으로 이동가능 하다. 그리고 제어가중행렬이면 대각행렬이면 상태가중행렬과 제어법칙은 각 단계에서 적용된 값의 합과 같다[3].

$$Q = \sum_{i=1}^k Q_i, K = \sum_{i=1}^k K_i \quad (14)$$

2.3 중근을 갖는 A의 대각행렬

시스템에 따라 A의 형태는 다양하지만

$$x = Tz \quad (15)$$

의 변환행렬(T)에 의해 시스템의 근이 행렬의 주대각선에 위치하는 대각행렬 $\Lambda (= T^{-1}AT)$ 로 변환된다[3]. 중근(λ_d)의 고유벡터가 1개이면 대각행렬은 조단블록이 있는

$$A_{dj} = \begin{bmatrix} \lambda_d & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (16)$$

의 형태로 변화되며 상태방정식(Eq. (1))과 해밀토니안 시스템(Eq. (7))도

$$\dot{z} = \Lambda_{dj}z + \tilde{B}u \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{dj} & -\tilde{V}_{dj} \\ -\tilde{Q}_{dj} & -\Lambda_{dj}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} = \tilde{F} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (18)$$

로 변경된다. 여기서 기호($\tilde{\cdot}$)는 대각행렬화된 시스템과 변수를 의미하며 $\tilde{Q}_{dj} = T^T Q T$, $\tilde{B} = T^{-1} B$,

$$\tilde{V}_{dj} = \tilde{B}R^{-1}\tilde{B}^T = \begin{bmatrix} \tilde{v}_{11} & \tilde{v}_{12} & \cdots & \tilde{v}_{1n} \\ \tilde{v}_{21} & \tilde{v}_{22} & \cdots & \tilde{v}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{v}_{n1} & \tilde{v}_{n2} & \cdots & \tilde{v}_{nn} \end{bmatrix} \text{이다.}$$

그리고 입력이 하나라서 제어가중행렬은 $R = r_{11}^{-1}$ 이 되고, 제어가중행렬이 가지는 조건에 의해 $r_{11} > 0$ 이 된다[10]. 또한 $\tilde{B} = [\tilde{b}_{11} \tilde{b}_{21} \cdots \tilde{b}_{n1}]^T$ 의 요소는 제어가 가능하기 때문에 $\tilde{b}_{i1} \neq 0$ 이다[11]. 이 두 조건에 의해 \tilde{V} 의 $\tilde{v}_{kk} = r_{11} \tilde{b}_{k1}^2$, $\tilde{v}_{ij} = r_{11} \tilde{b}_{i1} \tilde{b}_{j1}$ 는 $\tilde{v}_{kk} > 0$ 과 $\tilde{v}_{ii} \tilde{v}_{kk} - \tilde{v}_{ik}^2 = 0$ 이 된다.

그리고 중근의 고유벡터가 2개이면 대각행렬은 $\Lambda_{dd} = \text{diag}(\lambda_d, \lambda_d, \cdots, \lambda_n)$ 의 형태로 기존 연구 방법을 적용할 수 있다[3,8].

3. 중근의 극배치

3.1 중근과 가중행렬의 관계식

LQ 제어로 조단블록을 갖는 중근(λ_d)이 이동할 페루프의 복소근을 $c_r \pm j c_i$ 라 하면, 안정한 복소근이 되기 위

해서는 $c_r < 0$, $c_i \neq 0$ 이어야 한다. 그리고 대각행렬 A_{dj} 와 관련된 상태가중행렬을

$$\tilde{Q}_{dj} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_{11} & \tilde{q}_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{q}_{12} & \tilde{q}_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

라 하고, 변수(\tilde{q}_{11} , \tilde{q}_{12} , \tilde{q}_{22})는 삼각함수를 이용하여 Eq. (20)처럼 ρ , θ 로 표현할 수 있다[6-9,11,12].

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{11} &= \rho \cos^2 \theta, \\ \tilde{q}_{22} &= \rho \sin^2 \theta \\ \tilde{q}_{12} &= \rho \cos \theta \sin \theta \end{aligned} \quad (20)$$

여기서 θ 의 범위는 $-\pi \leq \theta < \pi$ 이다. 그리고 \tilde{Q}_{dj} 를 Eq. (18)에 대입하면

$$\begin{aligned} |sI - \tilde{F}| &= \begin{vmatrix} s - \lambda_d & -1 & \tilde{v}_{11} & \tilde{v}_{12} \\ 0 & s - \lambda_d & \tilde{v}_{12} & v_{22} \\ \tilde{q}_{11} & \tilde{q}_{12} & s + \lambda_d & 0 \\ \tilde{q}_{12} & \tilde{q}_{22} & -1 & s + \lambda_d \end{vmatrix} \\ &\times \prod_{i=3}^n (s + \lambda_i)(s - \lambda_i) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

이 된다. 복소근($c_r \pm jc_i$)이 Eq. (21)의 해밀토니안 시스템의 특성방정식을 만족해야한다는 조건[3]에서 상태가중행렬과 페루프 근의 관계가 ρ 와 θ 의 식으로 표현된다. $c_r \pm jc_i$ 를 Eq. (21)에 대입하여 ρ 로 정리하면 2개의 Eq. (22)와 Eq. (23)이 얻어진다.

$$\rho = \frac{\rho_{dnum1}}{\rho_{dden1}} \quad (22)$$

여기서 $\rho_{dnum1} = e_{d14}$, $e_{d14} = 2(c_r^2 - c_i^2 - \lambda_d^2)$,
 $\rho_{dden1} = e_{d11} \cos^2 \theta + e_{d12} \cos \theta \sin \theta + e_{d13} \sin^2 \theta$,
 $e_{d11} = \tilde{v}_{11}$, $e_{d12} = 2\tilde{v}_{12}$, $e_{d13} = \tilde{v}_{22}$ 이다.

$$\rho = \frac{\rho_{dnum2}}{\rho_{dden2}} \quad (23)$$

여기서 $\rho_{dnum2} = e_{d24}$, $e_{d24} = (c_r^2 + c_i^2)^2 - \lambda_d^4$,
 $\rho_{dden2} = e_{d21} \cos^2 \theta + e_{d22} \cos \theta \sin \theta + e_{d23} \sin^2 \theta$,
 $e_{d21} = \lambda_d^2 \tilde{v}_{11} - 2\lambda_d \tilde{v}_{12} + \tilde{v}_{22}$,
 $e_{d22} = 2(\lambda_d^2 \tilde{v}_{12} - \lambda_d \tilde{v}_{22})$, $e_{d23} = \lambda_d^2 \tilde{v}_{22}$ 이다[12]. 또한 Eq. (22)와 Eq. (23)을 하나의 식으로 정리하면

$$e_{d31} \cos^2 \theta + e_{d32} \cos \theta \sin \theta + e_{d33} \sin^2 \theta = 0 \quad (24)$$

이다. 여기서 $e_{d31} = e_{d14} e_{d21} - e_{d24} e_{d11}$,

$$e_{d32} = e_{d14} e_{d22} - e_{d24} e_{d12},$$

$e_{d33} = e_{d14} e_{d23} - e_{d24} e_{d13}$ 이고 e 의 첨자(dxy)에서 d 는 증근(double), x 가 1이면 ρ 의 첫 번째 식, 2이면 ρ 의 두 번째 식, 3이면 합친 식, y 는 변수의 일련번호를 의미한다. 그리고 Eq. (24)의 해를 구하기 위해 $\cos \theta = 0$ 라 가정하고 식에 대입하면 $e_{d33} = 0$ 이 되는데 e_{d33} 을 전개하면

$$\begin{aligned} e_{d33} &= e_{d14} e_{d23} - e_{d24} e_{d13} \\ &= -\tilde{v}_{22} \{(\lambda_d^2 + c_r^2 - c_i^2)^2 + 4c_r^2 c_i^2\} \end{aligned} \quad (25)$$

로 $c_r \neq 0$, $c_i \neq 0$ 에 의해 e_{d33} 은 0이 될 수 없다. 고로 가정이 잘못된 것으로 $\cos \theta \neq 0$ 이다. 그리하여 Eq. (24)를 $\cos^2 \theta$ 로 나누면 $\tan \theta$ 의 2차 방정식이 되며, 이 방정식의 해를 구하는 공식에서 관계식 θ 가 구해진다[12].

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{-e_{d32} \pm \sqrt{e_{d32}^2 - 4e_{d31}e_{d33}}}{2e_{d33}} \right) \quad (26)$$

3.2 증근의 이동범위

시스템의 증근이 이동할 수 있는 페루프 복소근의 범위를 좌표평면에 표시한 것이 이동범위이다.

3.2.1 양의 반한정대칭행렬이 될 ρ 의 조건

\tilde{Q}_{dj} 는 양의 반한정행렬이라서 행렬식과 피벗(pivot)은 음수가 될 수 없다[10]. \tilde{Q}_{dj} 의 행렬식은

$$\det(\tilde{Q}_{dj}) = |\tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22} - \tilde{q}_{12}^2| \times 0 = 0 \quad (27)$$

로 조건을 만족하고, 첫 번째 피벗인 $\tilde{q}_{11} = \rho \cos^2 \theta$ 이 조건을 만족하려면 ρ 는 양수가 되어야 한다.

Eq. (22)에서 분모 ρ_{dden1} 의 $e_{d11} \cos^2 \theta$ 와 $e_{d13} \sin^2 \theta$ 는 $\tilde{v}_{11} > 0$ 와 $\tilde{v}_{22} > 0$ 에 의해 양수이므로 산술-기하평균 부등식에 $\tilde{v}_{11} \tilde{v}_{22} - \tilde{v}_{12}^2 = 0$ 을 적용한 Eq. (28)로부터 $\rho_{dden1} \geq 0$ 임을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} 0 &\leq e_{d11} \cos^2 \theta + e_{d12} \cos \theta \sin \theta + e_{d13} \sin^2 \theta \\ &\leq 2(e_{d11} \cos^2 \theta + e_{d13} \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (28)$$

또한 ρ_{dden1} 를 $\cos \theta$ 로 묶으면 Eq. (29)가 된다.

$$\begin{aligned} \rho_{dden1} &= \cos^2 \theta (e_{d13} \tan^2 \theta + e_{d12} \tan \theta + e_{d11}) \\ &= \cos^2 \theta \rho_{d1} \end{aligned} \quad (29)$$

여기서 $\rho_{d1} = e_{d13} \tan^2 \theta + e_{d12} \tan \theta + e_{d11}$ 이다.

$\cos \theta \neq 0$ 이라서 ρ_{dden1} 의 최소는 ρ_{d1} 의 최소와 같다. 미분을 이용하면 $\theta_{\min1} = \tan^{-1}(-\tilde{v}_{11}/\tilde{v}_{22})$ 일 때 최소

가 되는데 $\theta_{\min 1}$ 이 Eq. (26)을 충족하지 못하므로 ρ_{d1} 은 0이 될 수 없다. 고로 분모 $\rho_{dden1} > 0$ 이 된다.

다음으로 Eq. (23)의 e_{d21} 은 $\lambda_d^2 \tilde{v}_{11} \geq 0$ 와 $\tilde{v}_{22} > 0$ 의 산술-기하평균 부등식과 $\tilde{v}_{11}\tilde{v}_{22} - \tilde{v}_{12}^2 = 0$ 에 의해 $e_{d21} \geq 0$ 이고, $e_{d23} \geq 0$ 이다.

같은 방법으로 Eq. (30)에 의해 $\rho_{dden2} \geq 0$ 이 된다.

$$0 \leq e_{d21} \cos^2 \theta + e_{d22} \cos \theta \sin \theta + e_{d23} \sin^2 \theta \leq 2(e_{d21} \cos^2 \theta + e_{d23} \sin^2 \theta) \quad (30)$$

ρ_{dden2} 를 $\cos \theta$ 로 묶으면 Eq. (31)가 된다.

$$\rho_{dden2} = \cos^2 \theta (e_{d23} \tan^2 \theta + e_{d22} \tan \theta + e_{d21}) = \cos^2 \theta \rho_{d2} \quad (31)$$

여기서 $\rho_{d2} = e_{d23} \tan^2 \theta + e_{d22} \tan \theta + e_{d21}$ 이다.

$\cos \theta \neq 0$ 이라서 $\lambda_d = 0$ 이면 $\rho_{dden2} = \tilde{v}_{22} \cos^2 \theta > 0$ 이고, $\lambda_d \neq 0$ 이면 ρ_{dden2} 의 최소는 ρ_{d2} 의 최소와 같다. 미분에 의해 $\theta_{\min 2} = \tan^{-1}(-e_{d22}/2e_{d23})$ 일 때 최소가 되는데 $\theta_{\min 2}$ 는 Eq. (26)을 충족하지 못하므로 ρ_{d2} 은 0이 될 수 없다. 그래서 분모 $\rho_{dden2} > 0$ 이 된다. 그리하여 $\rho_{dden1} > 0$ 와 $\rho_{dden2} > 0$ 라 ρ 가 양수가 될 조건은

$$c_r^2 - c_i^2 > \lambda_d^2 \quad (32)$$

$$c_r^2 + c_i^2 > \lambda_d^2 \quad (33)$$

이다[13].

3.2.2 θ 가 실수가 될 조건

Eq. (26)의 제곱근이 양수이면 θ 가 실수가 되는데 제곱근을 전개하면

$$e_{d32}^2 - 4e_{d31}e_{d33} = -4(\tilde{v}_{11}\tilde{v}_{22} - \tilde{v}_{12}^2)(\lambda_d^2 e_{d14} - e_{d24})^2 + 4\tilde{v}_{22}^2 e_{d14}e_{d24} \quad (34)$$

이고, $\tilde{v}_{11}\tilde{v}_{22} - \tilde{v}_{12}^2 = 0$ 과 $e_{d14} > 0$, $e_{d24} > 0$ 에 의해 $e_{d32}^2 - 4e_{d31}e_{d33}$ 은 항상 양수다. 즉 c_r 과 c_i 에 관계없이 θ 는 실수이다.

3.3.3 복소근으로 이동할 중근의 이동범위

중근의 이동범위는 복소근($c_r \pm jc_i$)이 안전하기 위한 $c_r < 0$ 과 $c_i \neq 0$ 과 Eq. (32)와 Eq. (33)을 동시에 만족하는 영역이다. Fig. 2는 c_r 과 c_i 의 좌표에 영역을 표시한 것으로 (a) 영역은 $c_r < 0$ 과 $c_i \neq 0$ 인 좌반면, (b) 영역

은 Eq. (32)로 표현되는 쌍곡선의 안쪽, (c) 영역은 Eq. (33)로 표현되는 원의 바깥쪽이다. 3개의 영역이 겹치는 (d) 영역이 중근이 복소근으로 이동할 수 있는 범위이다.

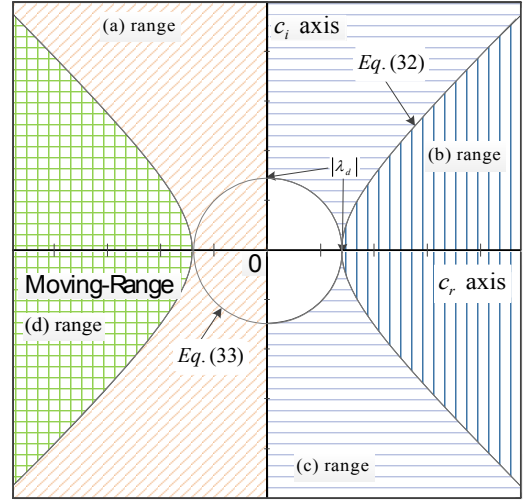


Fig. 2. Moving-Range of a double poles

4. 예제

제시한 방법을 적용할 예제로 조단블록을 갖는 중근(-2)과 실근(-3)을 가진 3차 시스템을

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

라 가정하고, 먼저 중근(-2)은 제시한 방법을 적용하고, 다음으로 실근(-3)은 Solheim 방법으로 중근과 실근을 이동시키는 제어법칙을 설계한다. 1단계($i=1$)로 $A_1 = A$ 라 하고, 중근(-2)이 대각행렬의 λ_1 과 λ_2 가 되도록 하는 변환행렬을 구하면

$$T_{1-dj} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

이 되며, A_1 은 T_{1-dj} 에 의해 대각행렬

$$A_{1-dj} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad (37)$$

로 변환된다. 그리고 제어가중행렬 R 의 $r_{11} = 2.0$ 로 설정하면 Eq. (18)의 \tilde{V}_{dj} 는 Eq. (38)이 된다.

$$\tilde{V}_{dj} = \begin{bmatrix} 4.5 & 1.5 & -4.5 \\ 1.5 & 0.5 & -1.5 \\ -4.5 & -1.5 & 4.5 \end{bmatrix} \quad (38)$$

또한 상태가중행렬은 Eq. (19)와 같이

$$\tilde{Q}_{1,dj} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_{11} & \tilde{q}_{12} & 0 \\ \tilde{q}_{12} & \tilde{q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

로 설정하면 중근의 이동범위는 ρ 의 분자가 양수가 되는 조건 Eq. (32)와 Eq. (33)에서 얻어지는

$$c_r^2 - c_i^2 > 4 \quad (40)$$

$$c_r^2 + c_i^2 > 4 \quad (41)$$

의 영역과 $c_r < 0$, $c_i \neq 0$ 의 영역이 겹치는 범위로 Fig. 3과 같다.

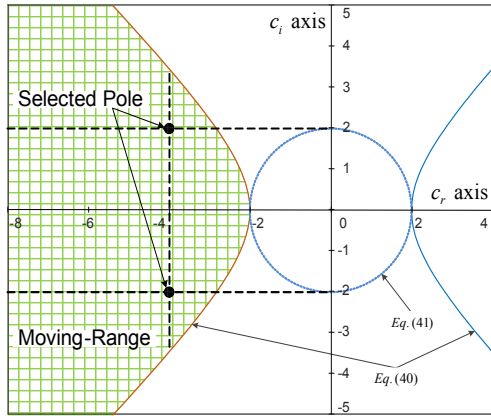


Fig. 3. Moving-Range of the double poles(-2)

이 범위에서 원하는 복소근으로 $-4 \pm j2$ 을 선택하여 Eq. (26)에 대입하면 θ 는

$$\theta_1 = -72.3609, \theta_2 = -69.3616 \quad (42)$$

와 같이 구해지고, 이를 Eq. (22) 또는 Eq. (23)에 대입하면 ρ 가 계산된다.

$$\rho_1 = 4146.8245, \rho_2 = 541.1755 \quad (43)$$

Eq. (39)을 이용하면 θ_1 과 ρ_1 로부터 $\tilde{Q}_{1,dj1}$ 가, θ_2 과 ρ_2 로부터 $\tilde{Q}_{1,dj2}$ 가 계산된다.

$$\tilde{Q}_{1,dj1} = \begin{bmatrix} 380.7673 & -1197.4939 & 0.0 \\ -1197.4939 & 3766.0571 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$\tilde{Q}_{1,dj2} = \begin{bmatrix} 67.2327 & -178.5061 & 0.0 \\ -178.5061 & 473.9429 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

그리고 $T_{1,dj}$ 에 의해 $Q_{1,dj} = T_{1,dj}^{-T} \tilde{Q}_{1,dj} T_{1,dj}^{-1}$ 로부

터 $Q_{1,dj1}$ 와 $Q_{1,dj2}$ 가 구해진다.

$$Q_{1,dj1} = \begin{bmatrix} 380.7673 & -435.9592 & 0.0 \\ -435.9592 & 499.1510 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$Q_{1,dj2} = \begin{bmatrix} 67.2327 & -44.0408 & 0.0 \\ -44.0408 & 28.8490 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \quad (47)$$

그런데 상태가중행렬이 달라도 제어법칙은 동일하게

$$K_1 = [8.0 \quad -4.0 \quad 0.0] \quad (48)$$

이 된다. 이 제어법칙이 적용된 시스템의 근은

$$\text{eig}(A_1 - BK_1) = -4 \pm j2, -3 \quad (49)$$

로, Fig. 4처럼 중근이 복소근으로 이동 된 것을 확인할 수 있다. 다음 2단계($i=2$)로 A_2 를 계산하면

$$A_2 = A_1 - BK_1 = \begin{bmatrix} -10 & 5 & 0 \\ -8 & 2 & 0 \\ -9 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad (50)$$

이 된다. 실근(-3)이 대각행렬의 λ_1 이 되도록 하는 변환행렬을 구하면

$$T_2 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.1631 & -0.2466 \\ 0.0 & 0.2943 & -0.2307 \\ 1.0 & 0.8790 & 0.0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

이 되고, A_2 는 대각행렬

$$A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \quad (52)$$

로 변환되고, Solheim 방법에 따라 상태가중행렬을

$$\tilde{Q}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{q}_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (53)$$

라하고 이동할 근으로 -6 을 선택하면 \tilde{q}_r 은 37.5이되

어, \tilde{Q}_2 는 Eq. (54)가 된다[2].

$$\tilde{Q}_2 = \begin{bmatrix} 37.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \quad (54)$$

그리고 T_2 에 의해 $Q_2 (= T_2^{-T} \tilde{Q}_2 T_2^{-1})$ 가

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1261.500 & -1348.500 & 217.500 \\ -1348.500 & 1441.500 & -232.500 \\ 217.500 & -232.500 & 37.500 \end{bmatrix} \quad (55)$$

구해지고, 제어법칙은

$$K_2 = [29.0 \quad -31.0 \quad 5.0] \quad (56)$$

이 된다. K_2 가 적용된 시스템의 근은

$$\text{eig}(A_2 - BK_2) = -4 \pm j2, -6 \quad (57)$$

로 Fig. 4처럼 실근이 이동된 것을 확인할 수 있다.

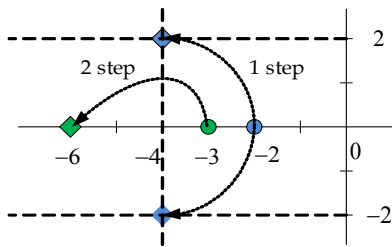


Fig. 4. Move system poles to closed-loop poles

그리하여 구하는 Q 는 2개로 Q_{1st} 와 Q_{2nd} 는 각 단계에서 얻는 상태가중행렬의 합이 된다.

$$Q_{1st} = Q_{1,dj1} + Q_2 = \begin{bmatrix} 1642.2673 & -1784.4592 & 217.5000 \\ -1784.4592 & 1940.6510 & -232.5000 \\ 217.5000 & -232.5000 & 37.5000 \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$Q_{2nd} = Q_{1,dj2} + Q_2 = \begin{bmatrix} 1328.7327 & -1392.5408 & 217.5000 \\ -1392.5408 & 1470.3490 & -232.5000 \\ 217.5000 & -232.5000 & 37.5000 \end{bmatrix} \quad (59)$$

또한 제어법칙 K 도

$$K = K_1 + K_2 = [37.000 \quad -35.000 \quad 5.000] \quad (60)$$

이 된다. 위와 같은 과정으로 설계된 제어법칙(K)은 시스템의 중근과 실근을 원하는 페루프 근으로 이동시킨다.

$$eig(A - BK) = -4 \pm j2, -6 \quad (61)$$

5. 결론

일반적으로 LQ 제어는 시스템을 안정화하면서 극배치 기능을 가진 제어기 설계방법이지만 시행착오 방법으로 가중행렬을 설정하고, 극배치 위치를 임의로 지정하기가 어렵다.

본 논문에서 제안한 방법은 해밀토니안 시스템의 특성 방정식에서 조단블록을 갖는 중근과 상태가중행렬의 관계식(ρ, θ)을 유도하고, 상태가중행렬의 제한 조건에서 중근의 이동범위를 좌표에 표현하고, 이 범위에서 복소근을 선택하여, 관계식에서 대입하여 상태가중행렬과 제어법칙을 설계함으로써 이동할 복소근을 임의로 설정하고 관계식으로 가중행렬을 계산한다. 그리고 간단한 3차 시스템의 예제로 조단블록을 가진 중근을 이동시키는 가중행렬과 제어법칙 설계과정을 통해 제안한 방법의 적용 가능성과 기존 방법을 함께 사용할 수 있음을 확인하였다.

다중근과 MIMO(Multi Input Multi Output) 시스템

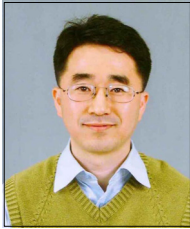
에 대해서는 이 논문에서 다루지 못했다. 이 문제는 추후 연구가 필요할 것 같다.

References

- [1] B. D. O. Anderson, J. B. Moore, Optimal Control, Prentice-Hall, 1989. pp.7-138
- [2] J. B. Burl, Linear Optimal Control: H_2 and H_∞ Methods, Addison Wesley Longman, 1999, pp.179-230
- [3] O. A. Solheim, "Design of optimal control systems with prescribed eigenvalues," *Int. J. Control*, vol. 15, no. 1, pp. 143-160, 1972. DOI: <https://doi.org/10.1080/00207177208932136>
- [4] Y. Ochi, K. Kanai, "Pole Placement in Optimal Regulator by Continuous Pole-Shifting," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 18, No.6, pp. 1253~1258, 1995. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.21538>
- [5] T. Fujinaka and S. Omatu, "Pole placement using optimal regulators," *T.IEE japan*, vol. 121-C, no. 1, pp. 240-245, 2001.
- [6] M. Park, S.K. Hong, S.H. Lee, "Design of an LQR Controller Considering Pole's Moving-Range", *Journal of Control, Automation and System Engineering* Vol 11, No. 10, pp. 864-869, 2005. DOI: <https://doi.org/10.5302/J.ICROS.2005.11.10.864>
- [7] M. Park, M.S. Park, D. Park, S.K. Hong, S.H. Lee, "LQR Controller Design with Pole-Placement," *Journal of Control, Automation and System Engineering* Vol 13, No 6, pp. 574-580, 2007. DOI: <https://doi.org/10.5302/J.ICROS.2007.13.6.574>
- [8] M. Park, "Pole Placement by an LQ Controller," *Journal of Control, Automation and System Engineering* Vol 15, No 3, pp. 249-254, 2009. DOI: <https://doi.org/10.5302/J.ICROS.2009.15.3.249>
- [9] M. Park, "Pole Placement Method to Move a Equal Poles with Jordan Block to Two Real Poles Using LQ Control and Pole's Moving-Range," *Journal of the KAIS* Vol 19, No 2, pp. 608-616, 2018. DOI: <https://doi.org/10.5762/KAIS.2018.19.2.608>
- [10] G. Strang, Linear Algebra and its applications, 3rd Ed., Harcourt Brace & Company, 1988, pp.330-337
- [11] C. Chen, Linear System Theory and Deign, Holt-Saunders International Editions, 1984, pp.168-227
- [12] M. Park, "Pole Placement Method of a System having a Jordan Block by Optimal Control: Shifting a Double Poles to Complex Poles," *Proc. of the KAIS Fall Conference of KAIS* pp. 45-47, 2015.
- [13] M. Park, "Pole Placement Method of a System having a Jordan Block Using LQ Optimal Control: Complex Pole's Moving Range," *Proc. of the KAIS Fall Conference of KAIS* pp. 622-624, 2016.

박 민 호(Minho Park)

[종신회원]



- 1993년 2월 : 아주대학교 대학원 제어계측공학과 (공학석사)
- 1993년 3월 ~ 1998년 6월 : ㈜한미반도체 연구원
- 2007년 8월 : 아주대학교 대학원 전자공학과 (공학박사)
- 2008년 3월 ~ 현재 : 충남도립대학교 전기전자공학과 부교수

〈관심분야〉

최적제어, Robust Control, 공장자동화