

# Chebyshev 필터 함수의 특성 개선에 관한 연구

유재훈<sup>1</sup>, 최석우<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>전북대학교 산업기술대학원, <sup>2</sup>전북대학교 전기공학과

## A Study on the Characteristics Improvement of Chebyshev Filter Function

Jae-Hoon You<sup>1</sup>, Seok-Woo Choi<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Military Manpower Administration of Jeonbuk

<sup>2</sup>Department of Electrical Engineering, Jeonbuk National University

**요약** 본 논문에서는 통과대역에서 점진적으로 감소하는 리플을 갖는 변형된 체비셰프 저역통과 필터 함수를 제안하고, 주파수 영역에서 특성을 분석하였다. 제안된 체비셰프 함수는 점진적으로 감소하는 크기 특성에 의해 기존의 체비셰프 함수보다 통과대역에서 크기 특성이 크게 개선되었다. 이러한 크기 특성의 변화로 위상 특성도 선형적인 특성을 갖고, 시간지연은 최고점과 최저점의 차이가 현저히 감소되면서 시간지연 특성이 개선되었다. 또한, 제안된 체비셰프 함수는 짝수와 홀수 차수를 포함하는 모든 차수에서 최대전력전송이 가능한 수동 복종단 제자형 회로망으로 실현이 가능하고, 모의법을 이용하면 낮은 감도 특성을 갖는 능동 RC 필터 또는 스위치드 커패시터 필터로도 구현할 수 있다. 제안된 체비셰프 필터의 특성을 고찰하기 위하여 6차 수동 복종단 제자형 저역통과 필터를 설계하였고, MATLAB과 SPICE 프로그램으로 필터 특성을 분석하였다. 제안된 체비셰프 함수는 기존의 체비셰프 함수가 갖는 문제점을 해결할 수 있으며, 각종 신호처리용 필터 설계에 사용 시 필터 크기, 위상, 시간 지연 특성 개선에 활용할 수 있다.

**Abstract** A modified Chebyshev lowpass filter function with progressively diminishing ripples in the passband is proposed and analyzed in the frequency domain. Owing to the diminishing ripples, the passband magnitude characteristic of the proposed Chebyshev function has improved compared to the classical Chebyshev function. In addition, the phase characteristics of the proposed Chebyshev function were improved considerably compared to that of the Chebyshev function, and the time delay of the proposed function was much simpler and flatter. In addition, the proposed Chebyshev filter was realizable by the passive doubly terminated ladder network delivering maximum power transfer for the order  $n$ , even or odd, thus making themselves amenable to low-sensitivity active RC or switched capacitor filters through the simulation techniques. To verify the proposed Chebyshev filter characteristics, a 6th order passive doubly terminated ladder lowpass filter was designed and analyzed using the MATLAB and SPICE program. Thus, the proposed Chebyshev function can remove the drawbacks of the classical Chebyshev function and could be applicable to the design of a filter with an improved filter size, phase, and time delay characteristics for various signal processing.

**Keywords :** Chebyshev Filter Function, Passband Ripple, Filter Characteristics, Passive Doubly-terminated Network, Maximum Power Transfer

---

\*Corresponding Author : Seok-Woo Choi(Jeonbuk Univ.)

email: swchoi@jbnu.ac.kr

Received September 9, 2019

Accepted January 3, 2020

Revised September 30, 2019

Published January 31, 2020

## 1. 서론

필터는 신호를 송수신하는 과정에서 발생하는 잡음을 제거하거나 필요로 하는 주파수만 선택하는 주파수 선택기 역할을 한다. 필터 설계는 주어진 설계명세조건을 만족하는 필터 함수를 먼저 구하기 위하여 필터 함수 근사법을 이용하여 설계한다.[1] 필터 함수는 형태에 따라서 전극점 함수(All-pole function)인 바터워스(Butterworth) 함수, 체비세프(Chebyshev) 함수와 유리함수(Rational function)인 타원(Elliptic) 함수, 역 체비세프(Inverse Chebyshev) 함수로 구분된다. 이때 주어진 동일한 설계명세 조건을 만족하기 위해서 필터 함수의 차수를 계산하면 타원 함수가 가장 낮고, 체비세프 함수(역 체비세프 함수와 동차), 바터워스 함수 순으로 높은 차수가 요구된다.[2,3]

동일한 설계명세조건에서 체비세프 필터 함수는 바터워스 필터 함수에 비해 낮은 차수로 구현이 가능하지만 체비세프 함수는 통과대역 내에서 등폭 소파상(Equal ripple) 특성으로 인해 위상 특성이 바터워스 함수에 비해 비선형적인 특성을 갖는다.[3] 이러한 비선형적인 위상 특성은 시간지연 특성에도 영향을 주어 신호 전송시 신호간섭과 왜곡이 발생하게 된다. 또한, 체비세프 함수는 수동 복종단 제자형 회로망(Passive doubly-terminated ladder network) 으로 구현하는 경우 짝수 차수인 경우 최대전력 전송이 가능한  $R_1 = R_2$ 를 실현할 수 없다는 단점을 갖는다.

본 논문에서는 기존의 체비세프 함수가 갖는 위상의 비선형적인 특성과 수동 복종단 제자형 회로망 구현시 발생하는 문제점을 개선할 수 있는 변형된 체비세프 저역통과 필터 함수를 제안하였다. 제안된 체비세프 저역통과 필터 함수는 통과대역에서 점진적으로 감소하는 파상을 갖고, 통과대역에서의 크기 특성 변화로 위상 및 시간지연 특성이 기존의 체비세프 함수보다 개선되었다. 또한, 짝수 차수를 포함한 모든 차수에서 항상  $|H(j0)| = 1$ 의 크기 특성을 갖기 때문에 수동 복종단 제자형 회로망 구현 시 모든 차수에서 최대 전력전송이 가능하다.

특히, 제안한 체비세프 함수는 극점- $Q$  값이 감소하여 기존 함수보다 극점- $Q$  감도가 감소하므로 능동 RC 필터, 스위치드 캐패시터 필터 등을 설계하면 소자값 변화에 따른 능동 필터 특성도 개선할 수 있다.[4]

## 2. 변형된 체비세프 저역통과 필터 함수

### 2.1 체비세프 저역통과 필터 함수

바터워스 함수와 체비세프 함수는 저역통과 필터 함수인 경우, 분모 다항식만 존재하는 전극점 함수로 유리 함수에 비해 함수가 간단하고, 함수를 회로로 구현하는 과정도 비교적 간단하다. 2개의 전극점 함수 중 체비세프 함수는 통과대역에서 등폭 소파상 때문에 차단 주파수 근방에서 크기 특성 곡선의 경사가 급격하게 되고, 주어진 설계명세조건을 만족시키는데 있어 차수  $n$ 이 바터워스 함수의 차수보다 항상 낮다는 장점을 갖는다. 체비세프 함수의 크기 특성은 식 (1)과 같다.

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 C_n^2(\omega)}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

여기서  $\epsilon$ 은 통과대역 내의 소파상 폭을 결정하는 파라미터이고,  $C_n(\omega)$ 는 체비세프 다항식으로 다음과 같다.

$$C_n(\omega) = \cos(ncos^{-1}\omega) \quad (2)$$

전극점 함수인 바터워스와 체비세프 함수의 크기, 위상, 시간지연 특성을 비교하기 위해 통과대역 손실  $K_p = 0.707[3dB]$ 인 6차 함수를 사용하였다.

Fig. 1은 바터워스와 체비세프 함수의 크기 특성으로 바터워스 함수는 통과대역에서 최대 평탄하기 때문에 통과대역 특성이 우수하다. 반면 체비세프 함수는 통과대역에서 등폭 소파상 특성을 보이고, 천이영역과 저지대역 특성이 우수하다.

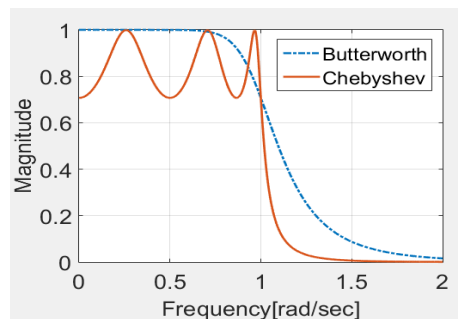


Fig. 1. Magnitude Characteristic Comparison

Fig. 2는 위상 특성 비교로 통과대역에서 최대평탄 특성을 갖는 바터워스 함수가 체비세프 함수에 비해 선형적인 위상 특성을 갖는다.

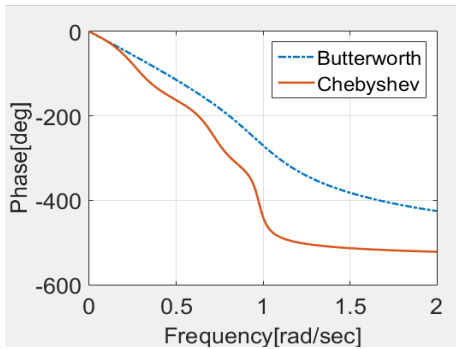


Fig. 2. Phase Characteristic Comparison

Fig. 3은 시간지연 특성으로 선형적인 위상 특성을 갖는 바터워스 함수가 체비셰프 함수에 비해 시간지연 특성이 우수하다.

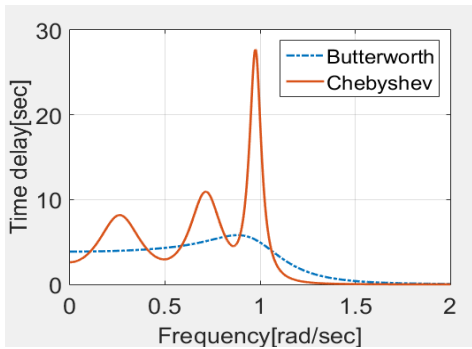


Fig. 3. Time Delay Characteristic Comparison

동일한 설계명세조건을 만족하는 필터 차수를 구하면 체비셰프 함수는 바터워스 함수에 비해 낮은 차수로 구현이 가능하지만, 위상 특성은 바터워스 함수보다 비선형적인 특성을 갖는다. 또한 바터워스 함수는  $\omega = 0$ 에서 모든 차수의 크기가  $|H(j0)| = 1$ 이므로 Fig. 4의 수동 복종단 회로망 실현 시 최대 전력전송( $R_1 = R_2$ )이 가능하다. 그러나 체비셰프 함수는 짝수 차수인 경우  $|H(j0)| = 1/\sqrt{1+\epsilon^2}$ 이 되어 수동 복종단 회로망으로 합성할 때 최대 전력전송이 가능한  $R_1 = R_2$ 인 경우에는 실현할 수 없고, 식 (3)처럼  $R_1/R_2$  비의 범위 내에서만 실현이 가능하다.[5,6]

$$\frac{R_1}{R_2} \leq 1 + 2\epsilon^2 - 2\epsilon\sqrt{1+\epsilon^2} \quad (3)$$

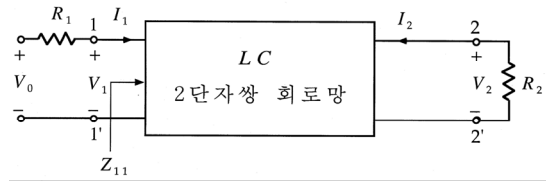


Fig. 4. Passive Doubly-Terminated Network

본 논문에서는 기존의 체비셰프 함수가 갖는 문제점을 개선하기 위한 변형된 함수를 제안한다.

### 2.2 제안된 체비셰프 지역통과 필터

기존의 체비셰프 필터 함수는 통과대역 내에서의 등폭 소파상 크기 특성 때문에 바터워스 함수와 비교해서 위상 특성과 시간지연 특성이 좋지 않다. 또한 짝수 차수는  $|H(j0)| = 1$ 이 아니기 때문에  $R_1 = R_2$ 로 구현할 수 없어 최대 전력전송이 불가능하다. 이러한 문제점들을 해결하기 위해 제안된 체비셰프의 함수에 다음과 같은 조건을 부여한다. 조건 (1)은 짝수 차수를 포함한 모든 차수에서 최대 전력전송이 가능한 수동 복종단 회로망으로 실현하기 위한 통과대역 조건이고, 조건 (2)는 기존의 체비셰프 함수와 같이 저지대역에서 동일한 특성을 갖기 위한 조건이다.

$$\text{조건 (1)} : |H(j0)| = 1, |H(j1)| = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}}$$

$$\text{조건 (2)} : |H(j\infty)| = 0, n = \text{짝수, 홀수}$$

위의 조건 (1)과 조건 (2)를 만족하기 위하여 식(1)에 식 (4)와 식(5)를 적용한다.

$$C_n^2(w) = C_{n-1}(w) \times C_{n-2}(w) \quad (4)$$

$$\epsilon^2 = \epsilon^2 \times w^3 \quad (5)$$

식 (4)와 식 (5)를 식 (1)에 대입하면 제안된 체비셰프 함수는 식 (6)과 같다.

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2\omega^3 C_{n-1}(\omega) C_{n-2}(\omega)}} \quad (6)$$

제안된 체비셰프 함수는 분모에  $w^3$ 항이 존재하여 모

든 차수에서  $w = 0$ 일 경우  $|H(j0)| = 1$ 이 되고,  $w = 1$ 에서는  $1/\sqrt{1+\epsilon^2}$ 이 되어 조건 (1)을 만족한다. 또한 통과대역에서  $\omega$ 가 커질수록 소파상은 점진적으로 증가하고, 저지대역에서  $|H(j\infty)| = 0$ 이 되어 조건 (2)를 만족한다. 필터 설계명세조건이 주어지면 차수를 계산하기 위해 제안된 체비세프 필터 함수식의 차수  $n$ 을 구하면 식 (7)과 같다.

$$n = \frac{\cosh^{-1}(2(K_p^{-2}-1)(K_s^{-2}-1)^{-1}\omega_s^{-3}-\omega_s)}{2\cosh^{-1}\omega_s} + \frac{3}{2} \quad (7)$$

### 2.3 제안된 체비세프 저역통과 필터 설계 및 분석

제안된 체비세프 필터 함수의 특성을 고찰하기 위하여, Table 1의 설계명세조건을 만족하는 기존의 체비세프 함수, 제안된 체비세프 함수의 차수  $n$ 과 전달함수  $H(s)$ 를 구하면 다음과 같다.

Table 1. Design Specification

Specification	Value
Passband Loss( $K_p$ )	0.7943
Stopband Attenuation( $K_s$ )	0.0588
Cutoff Frequency( $\omega_s$ )	1.3 [rad/sec]

기존의 체비세프 함수의 차수  $n$ 을 식 (8)로 계산하면 5.0123이고, 제안된 체비세프 함수의 차수를 식 (7)로 계산하면 5.9908로 두 함수 모두 동일한 차수 6차로 결정된다. 식 (9)와 식(10)은 설계명세조건을 만족하는 두 함수의 6차 저역통과 필터 함수식이고, 함수 특성은 MATLAB 프로그램으로 시뮬레이션 하였다.

$$n \geq \frac{\cosh^{-1}\sqrt{(K_p^{-2}-1)^{-1}(K_s^{-2}-1)}}{\cosh^{-1}\omega_s} \quad (8)$$

$$H(s) = \frac{A}{s^6 + Bs^5 + Cs^4 + Ds^3 + Es^2 + Fs + G} \quad (9)$$

$$A = 0.0408, B = 0.7012, C = 1.7459$$

$$D = 0.8670, E = 0.7715, F = 0.2103$$

$$G = 0.0514$$

$$H(s) = \frac{A}{s^6 + Bs^5 + Cs^4 + Ds^3 + Es^2 + Fs + G} \quad (10)$$

$$A = 0.1156, B = 1.6028, C = 2.4095$$

$$D = 2.1464, E = 1.3812, F = 0.5650$$

$$G = 0.1156$$

Fig. 5는 크기 특성을 비교한 것으로 기존의 체비세프 함수의 크기 특성은  $w = 0$ 에서  $1/\sqrt{1+\epsilon^2}$ 에 해당하는 0.7943부터 시작하여 등폭 소파상 특성을 갖는다.

제안된 체비세프 함수는 짝수 차수에서도  $|H(j0)| = 1$ 의 크기를 갖고, 통과대역에서  $w = 0$ 로 점진적으로 감소하는 소파상 특성을 갖는다. 이러한 크기 특성의 변화로 제안된 체비세프 함수는 통과대역에서 기존의 함수에 비해 크기 특성이 개선됨을 확인할 수 있다.

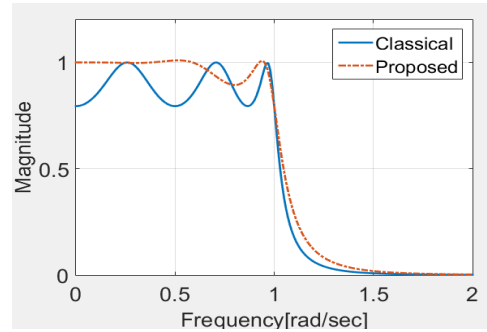


Fig. 5. Comparison of Magnitude Characteristic

Fig. 6은 위상 특성을 비교한 것으로 제안된 체비세프 함수가 기존의 체비세프 함수보다 선형적인 특성을 갖는다. 제안된 체비세프 함수식은 바터워스 함수와 같이  $\omega$ 가 분모 항에 존재하여 통과대역에서의 등폭 소파상 특성을 점진적으로 감소하는 소파상으로 변화시켜 주어 위상이 선형적으로 개선됨을 알 수 있다.

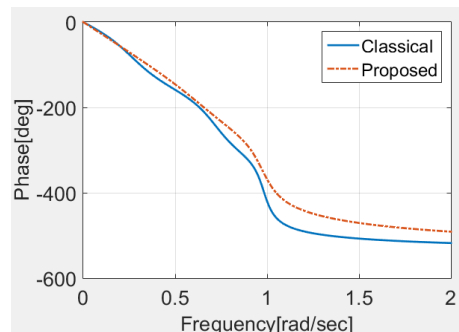


Fig. 6. Comparison of Phase Characteristic

위상 특성  $\phi(\omega)$ 와 시간지연 특성  $T(\omega)$ 는 식 (11)과 같이 밀접한 관계가 있고, 위상 특성이 선형에 가까울수록 시간지연 특성은 상수(Constant)에 가까워진다.[6]

$$|T(\omega)| = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} \quad (11)$$

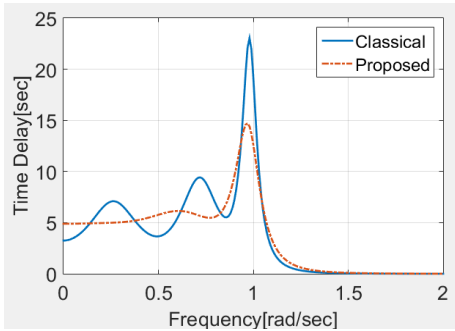


Fig. 7. Comparison of Time Delay

Fig. 7은 시간지연 특성 비교로 기존의 체비셰프 함수는 최고점 약 23.1초, 최저점 3.2초로 20.3초 차이를 보였으며, 제안된 체비셰프 함수는 최고점 14.8초, 최저점 4.9초로 9.9초 차이를 보였다. 제안된 체비셰프 함수는 기존의 체비셰프 함수와 비교하여 최고점과 최저점의 차이가 51.23% 만큼 감소하여 시간지연 특성이 개선됨을 확인하였다.

식 (12)는 체비셰프 함수의 특성을 개선하는 방법으로 분모항에  $\omega^2$ 항을 이용한 변형된 체비셰프 함수이다.[7] 본 논문에서 제안한 함수와 비교하기 위하여 기존의 체비셰프, 변형된 체비셰프( $\omega^2$ ), 제안된 체비셰프( $\omega^3$ )의 필터 특성을 Fig. 8과 9에서 비교하였다.

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \omega^2 C_{n-1}^2(\omega)}} \quad (12)$$

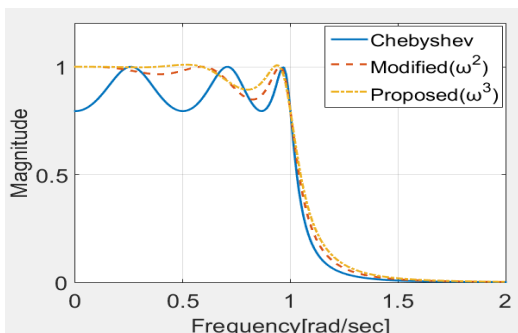


Fig. 8. Magnitude Characteristic of Chebyshev Functions

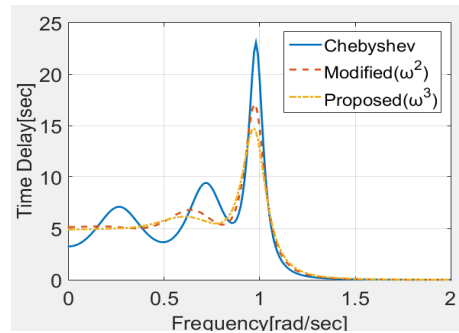


Fig. 9. Time Delay of Chebyshev Functions

Fig. 8과 같이  $\omega^3$ 을 이용한 제안된 체비셰프 필터 함수의 크기 특성이 통과대역에서 가장 우수하고, 이에 따라서 시간지연 특성도 기존 함수와  $\omega^2$ 을 이용한 함수보다 최고점과 최저점 차이가 가장 적어 본 논문에서 제안한 함수가 가장 우수함을 확인하였다.

### 3. 수동 복중단 회로망 구현

앞 장에서 구한 제안된 체비셰프 저역통과 필터 함수의 전달함수 식 (10)을 이용하여 Fig. 10의 수동 복중단 회로망으로 구현하기 위해 먼저 입력단의 구동점 임피던스  $Z_{11}(s)$ 를 구하면 식 (13)과 같다. 식 (13)으로 제1 카우어 형태인 수동 복중단 저역통과 회로망의 소자값을 구하기 위해서는 연분수 전개법을 적용한다.

$$Z_{11}(s) = \frac{gs^6 + hs^5 + is^4 + js^3 + ks^2 + ls + m}{as^5 + bs^4 + cs^3 + ds^2 + es + f} \quad (13)$$

$$a = 1.6037, b = 1.2694, c = 2.1478, d = 1.1693$$

$$e = 0.5652, f = 0.1155, g = 2.0000, h = 1.6037$$

$$i = 3.5519, j = 2.1478, k = 1.6096, l = 0.5652$$

$$m = 0.1155$$

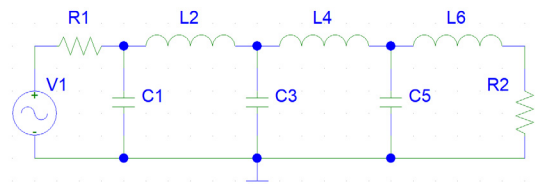


Fig. 10. Passive Doubly-Terminated Network

Table 2는 식 (10)의 저역통과 함수로부터 정규화된 수동 소자 값을 구한 후 차단주파수를 음성신호 처리 대역인 3,400Hz로 주파수 스케일링한 소자 값이다.

Table 2. Element Values [ohm,  $\mu$ H,  $\mu$ F]

$C_1$	58.377846	$L_2$	85.949942
$C_3$	84.029831	$L_4$	84.183369
$C_5$	97.931842	$L_6$	58.967562
$R_1, R_2$	1		

Fig. 11 ~ Fig. 13은 구현된 수동 복종단 회로망의 SPICE 시뮬레이션 결과이다.

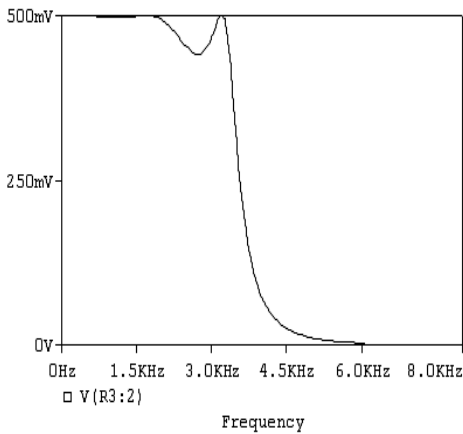


Fig. 11. Magnitude Characteristic of Proposed Chebyshev Function

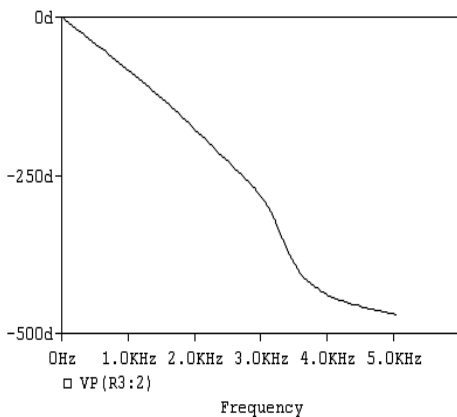


Fig. 12. Phase Characteristic of Proposed Chebyshev Function

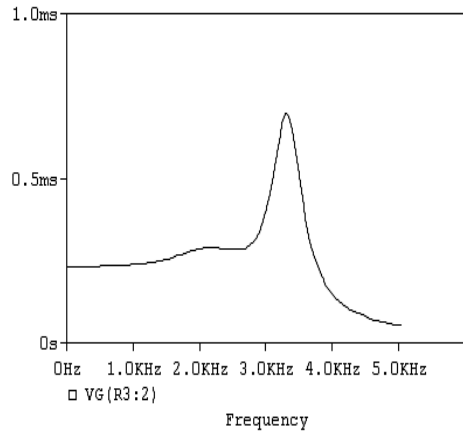


Fig. 13. Time delay Characteristic of Proposed Chebyshev Function

이때  $\omega = 0$ 에서의 크기는 수동 복종단 제자형 회로의 특성 때문에 Fig. 11과 같이 입력단 전압(1V)의 1/2로 감소된다. 제안된 체비세프 저역통과 필터 회로는 2장의 MATLAB 함수 시뮬레이션과 같이 통과대역에서 점진적으로 감소하는 크기 특성을 갖고, 위상 특성과 시간지연 특성도 기존의 체비세프 필터 함수에 비해 개선된 특성을 갖는다.

#### 4. 결론

본 논문에서는 기존의 체비세프 함수의 문제점을 개선하기 위하여 체비세프 필터 함수를 제안하였다.

기존의 체비세프 함수는 짝수 차수에서 수동 복종단 회로망으로 실현하는 경우 입력단과 출력단의 저항비에 영향을 받아 최대 전력전송이 불가능하였지만, 제안된 체비세프 저역통과 함수는 통과대역  $\omega = 0$ 에서 함수 크기가 항상 1이 되어 짝수 차수를 포함한 모든 차수에서 수동 복종단 회로망으로 실현이 가능하다.

또한, 저지대역에서 기존 체비세프 함수의 등폭 소파상 특성 대신 점진적으로 감소하는 크기 특성을 갖게 되어 기존의 함수보다 크기 특성이 개선되었다. 이러한 크기 특성의 변화로 제안된 체비세프 함수는 위상이 선형적인 특성을 갖는다. 위상 특성과 밀접한 관계가 있는 시간 지연 특성은 최고점과 최저점의 차이가 현저히 감소하여 시간지연 특성도 개선됨을 확인하였고, 기존의 선형 연구와의 특성 비교에서도 본 연구에서 제안된 체비세프 함수( $\omega^3$ )의 필터 특성이 가장 우수함을 확인하였다.

제안된 체비셰프 저역통과 필터 함수는 6차 수동 복중단 회로망으로 구현한 후, SPICE 프로그램으로 동작 특성을 시뮬레이션 하였다. 필터의 동작 특성은 설계명세조건과 일치하였다.

따라서 제안된 체비셰프 필터 함수는 기존의 체비셰프 필터 함수가 갖는 문제점을 해결할 수 있으며, 각종 신호 처리용 필터 설계에 사용하면 크기, 위상, 시간지연 특성 등을 개선할 수 있다.

## References

- [1] D. B. Kang, and S. S. Shin, "A Study on the Cascading Chebyshev Filter for Ripple Cancellation", *The Transaction of the Korean Institute of Electrical Engineers*, vol.61, no.1, pp.168-172, Jan. 2012.  
DOI: <https://doi.org/10.5370/kiee.2012.61.1.168>
- [2] R. Schaumann, M. S. Ghausi, and K. R. Laker, Design of Analog Filters, p. 608, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1990, pp.350-399.
- [3] Gabor C. Temes and Sanjit K. Mirta, Modern Filter Theory and Design, p.566, John Wiley & Sons, 1973, pp.120-185.
- [4] Chang-Hun Yun, and Seok-Woo Choi, "A Study on the POLE-Q Reduction of Chebyshev Function Using Trade-off", *The Journal of the Acoustical Society of Korea*, vol.19, no.5, pp.79-83, 2000.
- [5] H. K. Kim, Network Analysis and Synthesis: Electrical and Electronic Filter Design, p.470, KAEE, 1992, pp.202-218.
- [6] Adel S. Sedra, and Peter O. Brackett, Filter Theory and Design: Active and Passive, p.785, Matrix Publishers, 1981, pp15-120.
- [7] S. W. Choi, D. Y. Kim, and H. K. Kim, "A Modified Low-pass Filter with Diminishing Ripples", *Analog Intergrated Circuits and Signal Processing*, vol. 6, no. 2, pp. 95-103, Sep. 1994.  
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01239244>

유 재 훈(Jae-Hoon You)

[정회원]



- 2016년 2월 : 전북대학교 전기공학과 (공학사)
- 2019년 2월 : 전북대학교 산업기송대학원 전기및시스템공학(전기공학석사)
- 2015년 10월 ~ 현재 : 전북지방병무청 운영지원과 주무관

<관심분야>

전기공학, 회로망합성

최 석 우(Seok-Woo Choi)

[정회원]



- 1990년 2월 : 전북대학교 대학원 전기공학과 (공학석사)
- 1994년 8월 : 전북대학교 대학원 전기공학과 (공학박사)
- 1996년 2월 ~ 현재 : 전북대학교 전기공학과 교수

<관심분야>

회로망 합성, 아날로그 집적회로