

# LQ 제어로 조단블록이 있는 중근을 실근으로 이동시키는 가중행렬 결정 방법

박민호

충남도립대학교 전기전자공학과

## Methods of Weighting Matrices Determination of Moving Double Poles with Jordan Block to Real Poles By LQ Control

Minho Park

Electrical & Electronics Engineering, Chungnam State University

**요약** 일반적으로 비선형 시스템은 1차와 2차 시스템의 곱으로 선형화할 수 있기 때문에 시스템은 2차 시스템의 중근, 복소근, 서로 다른 두 실근과 1차 시스템의 근을 극점으로 가진다. 이런 극점의 위치 변경으로 시스템의 안정성과 응답특성을 개선할 수 있어서 다양한 방법으로 극점을 이동시키는 제어를 설계한다. 여러 방법 중에서 LQ 제어는 이득여유와 위상여유의 안정성을 보장한다. 그런데 시행착오 방법으로 가중행렬을 선택하여 원하는 응답특성을 얻기 때문에 극점의 위치를 임의로 지정하기 어렵다. 이 논문은 조단블록을 가진 다중 중근을 원하는 실근으로 이동시키는 LQ 제어의 가중행렬을 선택하는 방법에 관한 것이다. 대각행렬 형태의 제어가중행렬과  $\rho_d$ 와  $\phi_d$ 의 2개 변수 상태가중행렬을 갖는 해밀토니안 시스템의 특성방정식에서 중근과 가중행렬의 관계식을 유도한다. 그리고 상태가중행렬이 양의 준정부호 행렬이 될 조건에서 실근으로 이동할 중근의 이동범위를 구하고, 좌표평면에 표현한다. 이 범위에서 극점을 선택하고, 관계식으로 가중행렬을 계산하는 방법을 제안한다. 그리고 예제를 통해 조단블록을 갖는 4개의 중근을 원하는 서로 다른 실근으로 이동시키는 가중행렬과 제어법칙의 계산과정을 통해 제안한 방법의 유용성을 확인하였다.

**Abstract** In general, the stability and response characteristics of the system can be improved by changing the pole position because a nonlinear system can be linearized by the product of a 1st and 2nd order system. Therefore, a controller that moves the pole can be designed in various ways. Among the other methods, LQ control ensures the stability of the system. On the other hand, it is difficult to specify the location of the pole arbitrarily because the desired response characteristic is obtained by selecting the weighting matrix by trial and error. This paper evaluated a method of selecting a weighting matrix of LQ control that moves multiple double poles with Jordan blocks to real poles. The relational equation between the double poles and weighting matrices were derived from the characteristic equation of the Hamiltonian system with a diagonal control weighting matrix and a state weighting matrix represented by two variables ( $\rho_d$ ,  $\phi_d$ ). The Moving-Range was obtained under the condition that the state-weighting matrix becomes a positive semi-definite matrix. This paper proposes a method of selecting poles in this range and calculating the weighting matrices by the relational equation. Numerical examples are presented to show the usefulness of the proposed method.

**Keywords** : Pole Placement, LQ Control, Hamiltonian, Jordan Block, Moving-Range, Weighting matrix

\*Corresponding Author : Minho Park(Chungnam State Univ.)

email: minhin@gmail.com

Received May 22, 2020

Revised June 3, 2020

Accepted June 5, 2020

Published June 30, 2020

## 1. 서론

시스템 특성방정식의 해인 극점은 시스템의 안정성과 응답특성을 정하는 중요한 인자 중의 하나이다. 극점을 적절히 배치하면 안정성과 응답특성을 확보할 수 있어서 다양한 극배치 방법으로 제어기를 설계한다. 잘 알려진 바와 같이 LQ(Linear Quadratic) 제어는 이득여유( $1/2, \infty$ )와 위상여유( $60^\circ$ 이상)의 안정성 보장하는 설계 방법 중의 하나이다[1,2]. 이 방법은 시스템이 원하는 응답특성을 가질 때까지 성능지수함수에 포함된 상태변수와 제어입력에 대한 가중행렬을 조정해야한다. 이와 같이 시행착오 방법으로 가중행렬을 설정하기 때문에 극점의 위치를 임의로 지정하기가 어렵다. 해밀토니안(Hamiltonian) 시스템의 특성방정식으로 이런 어려움을 해결하려는 연구가 있었다[3~5]. Solheim은 대각행렬 형태의 가중행렬을 이용하여 근과 가중행렬의 관계식을 유도하고, 제한적이지만 실근과 중근 그리고 복소근의 극배치 방법을 제시하였다[3]. Fujinaka는 삼각함수로 표현되는 상태가중행렬을 이용하여 복소근을 복소근으로 이동하는 방법을 제시하였다[5]. Solheim과 Fujinaka의 방법을 접목하여 복소근의 이동범위(Moving-Range)를 구하고 이 범위 안에 있는 원하는 복소근으로 이동하는 방법을 제시하였다[6]. 그리고 근의 이동범위를 이용하여 복소근을 서로 다른 두 실근으로[7], 2차 시스템의 서로 다른 실근을 복소근[8]으로 이동시켰다. 또한 조단블록을 갖는 2차 시스템의 중근의 이동방법을 제시하였다[9,10]. 그런데 이 방법은 3개 이상의 중근과 다중 입력인 경우는 고려하지 못했다. 삼각함수를 사용하지 않고 2개의 변수로 상태가중행렬을 표현하고, 대각행렬에서 이동할 근의 위치를 달리하면 조단블록을 갖는 중근을 반복적으로 이동시킬 수 있다. 이 방법으로 다중 중근을 각각의 이동범위에 있는 실근으로 극배치 할 수 있다.

논문 구성은 다음과 같다. 2장에서는 중근을 가진 행렬의 대각행렬로의 변환, 해밀토니안 방정식, 제어법칙의 특징을 알아보고, 3장에서는 중근과 가중행렬의 관계와 실근으로 이동할 중근의 이동범위에 대해서 기술한다. 또한 4장의 예제에서는 4개의 중근을 가진 시스템에 제안한 방법을 적용해 보고, 5장에서 결론을 맺는다.

## 2. LQ 제어와 대각행렬

### 2.1 LQ 제어

일반적으로 비선형 시스템은 1차와 2차 시스템의 다양한 조합으로 선형화 가능하다. Eq. (1)은 선형화된  $n$ 차 MIMO(Multi Input Multi Output) 시스템의 상태방정식이다.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

여기서  $A$ 는  $n \times n$ ,  $B$ 는  $n \times m$ 인 시스템 행렬,  $x$ 는  $n \times 1$ 인 상태변수,  $u$ 는  $m \times 1$ 인 제어입력이다.

LQ 제어는 출력이 원하는 목표에 도달하도록 성능지수함수(Eq. (2))를 최소화 하는 Eq. (3)의 제어기를 설계하는 것이다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (2)$$

$$u = -Kx \quad (3)$$

$K$ 는  $m \times n$ 인 제어법칙으로 라그랑지(Lagrange) 곱수( $\lambda_L$ )를 갖는 성능지수함수(Eq. (4))로부터 구할 수 있으면 Eq. (5)와 같다.

$$J_\lambda = \int_0^\infty (H - \lambda_L^T \dot{x}) dt \quad (4)$$

여기서  $H = \frac{1}{2}(x^T Q x + u^T R u) + \lambda_L^T (Ax + Bu)$ ,

$n \times n$ 인 상태가중행렬  $Q$ 는 양의 준정부호행렬(positive semi-definite matrix),  $m \times m$ 인 제어가중행렬  $R$ 은 양의 정부호행렬(positive definite matrix)이다.

$$K = R^{-1} B^T P \quad (5)$$

시스템이 제어가능하면  $\det(P) > 0$ 인  $P$ 는 리카티 방정식(Eq. (6))의 유일한 해이다.

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (6)$$

이 방정식은 해밀토니안 시스템(Eq. (7))에서 얻어진 다. 또한 해밀토니안 시스템은 허수축에 대칭인  $2n$ 개의 근을 가지며[2], 근의 위치는  $Q$ 와  $R$ 에 의해 결정된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -V \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서  $V = BR^{-1}B^T$ 이다.

### 2.2 중근을 갖는 $A$ 의 대각행렬

$n$ 차 시스템이 가지는 근을

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \quad (8)$$

이라 하면,  $\lambda_i (i=1, \dots, n)$ 는 2차의 중근, 복소근, 서로 다른 두 실근 또는 1차 시스템의 근 중 하나가 된다. 시스템에 따라  $A$ 의 형태는 다양하지만

$$x = Tz \quad (9)$$

의 변환행렬( $T$ )에 의해 대각행렬( $\tilde{A}$ )이 변환된다.  $A$ 의 형태는 근의 종류와 관계가 있으며, 근이 서로 다른 실근이면

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{(n-1)}, \lambda_n) \quad (10)$$

이 된다. 그런데 일부에 중근이 있으면, 중근의 개수와 중근과 관련된 고유벡터 개수의 차이만큼 조단블록이 생긴다. 예를 들어 고유벡터가 1개인 중근( $\lambda_d$ )이  $r$  ( $\leq n$ )개이면

$$\tilde{A}_{dj} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_{n-r} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_d & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \lambda_d & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_d \end{bmatrix} \quad (11)$$

이 된다. 더불어 상태방정식(Eq. (1))과 해밀토니안 시스템(Eq. (7))도 변환행렬에 의해

$$\dot{z} = \tilde{A}_{dj}z + \tilde{B}u \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{dj} & -\tilde{V}_{dj} \\ -\tilde{Q}_{dj} & -\tilde{\Lambda}_{dj}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (13)$$

로 변경된다. 여기서 기호( $\sim$ )는 대각행렬과 관련된 변수이며,  $\tilde{B} = T^{-1}B$ ,  $\tilde{Q}_{dj} = T^TQT$ ,

$$\tilde{V}_{dj} = \tilde{B}R^{-1}\tilde{B}^T \text{이다.}$$

### 2.3 제어법칙

제어가능행렬이 대각행렬이면 제어법칙은 Fig. 1과 같이 반복적으로 적용할 수 있다. (a)는 시스템 방정식(Eq. (1))의 블록선도, (b)는 제어법칙을 적용한 것이고, 신호흐름선도에 따라 정리하면 (c), 이를 간략화하면 (d)가 된다. 이와 같이 연속적으로  $k$  ( $\leq n$ )번 반복해서 적용할 수 있으며,  $i$ 번째의 제어법칙과 리카티 방정식은 Eq. (14)와 Eq. (15)이다.

$$K_i = R^{-1}B^T P_i \quad (14)$$

$$P_i A + A_i^T P_i + Q_i - P_i B R^{-1} B^T P_i = 0 \quad (15)$$

그런데  $R$ 이 대각행렬이라 최종적으로 구하는 제어법칙은 Eq. (16)과 같이  $k$ 번째까지의 합이다.

$$K = \sum_{i=1}^k K_i = R^{-1}B^T P_s \quad (16)$$

$P_s$ 는 리카티 방정식(Eq. (17))에서 구해진다.

$$P_s A + A^T P_s + Q_s - P_s B R^{-1} B^T P_s = 0 \quad (17)$$

이다. 여기서  $P_s = \sum_{i=1}^k P_i$ ,  $Q_s = \sum_{i=1}^k Q_i$ 이다.

이와 같이 하나의 제어법칙( $K_i$ )이 1차 또는 2차 시스템의 근을 이동시키면  $k$ 번 적용하면 시스템의 모든 근을 원하는 곳으로 이동시킬 수 있다.

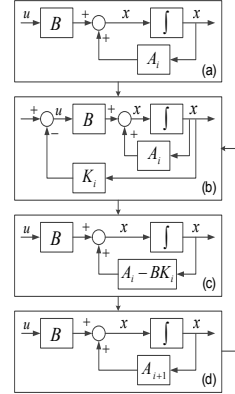


Fig. 1. Step-by-step process of LQ control

## 3. 중근의 극배치

### 3.1 중근과 가중행렬의 관계식

Eq. (18)의 제어가중행렬이 양의 정부호행렬이 될 조건은  $r_{ii} > 0$ 이다[11].

$$R = \text{diag}(r_{11}^{-1}, r_{22}^{-1}, \dots, r_{(m-1)(m-1)}^{-1}, r_{mm}^{-1}) \quad (18)$$

그리고 Eq. (19)의  $\tilde{B}$ 는 제어가능하기 때문에 0인 행행렬(row matrix)을 가질 수 없다. 즉  $\tilde{B}$ 의  $i$ 번째 행은

$$\sum_{j=1}^m |\tilde{b}_{ij}| \neq 0 \text{이다}[12].$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} & \cdots & \tilde{b}_{1(m-1)} & \tilde{b}_{1m} \\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} & \cdots & \tilde{b}_{2(m-1)} & \tilde{b}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{b}_{(n-1)1} & \tilde{b}_{(n-1)2} & \cdots & \tilde{b}_{(n-1)(m-1)} & \tilde{b}_{(n-1)m} \\ \tilde{b}_{n1} & \tilde{b}_{n2} & \cdots & \tilde{b}_{n(m-1)} & \tilde{b}_{nm} \end{bmatrix} \quad (19)$$

그리고  $\tilde{V}_{dj}$ 를 표현하면

$$\tilde{V}_{dj} = \tilde{B}R^{-1}\tilde{B}^T = \begin{bmatrix} \tilde{v}_{11} & \tilde{v}_{12} & \cdots & \tilde{v}_{1(n-1)} & \tilde{v}_{1n} \\ \tilde{v}_{21} & \tilde{v}_{22} & \ddots & \tilde{v}_{2(n-1)} & \tilde{v}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{v}_{(n-1)1} & \tilde{v}_{(n-1)2} & \cdots & \tilde{v}_{(n-1)(n-1)} & \tilde{v}_{(n-1)n} \\ \tilde{v}_{n1} & \tilde{v}_{n2} & \cdots & \tilde{v}_{n(n-1)} & \tilde{v}_{nn} \end{bmatrix} \quad (20)$$

이다. 여기서  $\tilde{v}_{ii} = \sum_{j=1}^m \tilde{b}_{ij}^2 r_{jj}$ ,  $\tilde{v}_{ik} = \sum_{j=1}^m \tilde{b}_{ij} \tilde{b}_{kj} r_{jj}$ 이다.

그런데  $\tilde{v}_{ij} = \tilde{v}_{ji}$ 라서  $\tilde{V}_{dj}$ 는 대칭행렬이다. 그리고  $r_{ii} > 0$ 과  $\sum_{i=1}^m |\tilde{b}_{ji}| \neq 0$ 에 의해

$$\tilde{v}_{(n-1)(n-1)} > 0, \tilde{v}_{nn} > 0 \quad (21)$$

이며, 또한

$$\tilde{v}_{(n-1)(n-1)}\tilde{v}_{nn} - \tilde{v}_{(n-1)n}^2 \geq 0 \quad (22)$$

이다.  $\tilde{B}$ 의  $(n-1)$ 번째와  $n$ 번째 행이 선형종속이거나 단일 입력인 경우는 Eq. (22)는 0이 된다.

조단블록을 갖는  $r$ 개의 중근 중에서  $\lambda_{n-1}$ 과  $\lambda_n$ 에 위치한 중근( $\lambda_d$ )을 이동시킬 상태가중행렬과 이동할 페루프 근을 Eq. (23)과  $r_1, r_2$  ( $r_1 \neq \lambda_d, r_2 \neq \lambda_d$ )으로 각각 가정한다.

$$\tilde{Q}_{dj} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{q}_{(n-1)(n-1)} & \tilde{q}_{(n-1)n} \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{q}_{n(n-1)} & \tilde{q}_{nn} \end{bmatrix} \quad (23)$$

그러면 근( $r_1, r_2$ )이 해밀토니안 시스템(Eq. (13))의 특성방정식을 해가 되려면 Eq. (24)를 충족해한다.

$$\begin{vmatrix} s - \lambda_d & -1 & \tilde{v}_{(n-1)(n-1)} & \tilde{v}_{(n-1)n} \\ 0 & s - \lambda_d & \tilde{v}_{n(n-1)} & \tilde{q}_{(n-1)n} \\ \tilde{q}_{(n-1)(n-1)} & \tilde{q}_{(n-1)n} & s + \lambda_d & 0 \\ \tilde{q}_{n(n-1)} & \tilde{q}_{nn} & 1 & s + \lambda_d \end{vmatrix} = (s + r_1)(s - r_1)(s + r_2)(s - r_2) \quad (24)$$

Eq. (25)이면 이 식은 성립한다. 즉  $\tilde{Q}_{dj}$ 는 대칭행렬이어야 한다.

$$\tilde{q}_{(n-1)n} = \tilde{q}_{n(n-1)} \quad (25)$$

그러면  $\tilde{Q}_{dj}$ 의 요소를 변수로 하는 비선형 연립이차방정식이 유도되고, Eq. (26)이면 유도된 방정식은 선형 연립이차방정식이 된다.

$$\tilde{q}_{(n-1)(n-1)}\tilde{q}_{nn} = \tilde{q}_{(n-1)n}^2 \quad (26)$$

제한조건인 Eq. (25)와 Eq. (26)을 만족하는  $\tilde{Q}_{dj}$ 의 요소를 Eq. (27)로 설정하면 미지수와 방정식의 개수와 같아진다.

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{(n-1)(n-1)} &= \rho_d \\ \tilde{q}_{(n-1)n} &= \tilde{q}_{n(n-1)} = \rho_d \phi_d \\ \tilde{q}_{nn} &= \rho_d \phi_d^2 \end{aligned} \quad (27)$$

고로 이 연립이차방정식에서 중근과 가중행렬의 관계식( $\rho_d, \phi_d$ )이 구해진다.

$$\begin{aligned} \rho_d &= \frac{h_{d44}}{h_{d41} + h_{d42}\phi_d + h_{d43}\phi_d^2} = \frac{\rho_{dnum4}}{\rho_{dden4}} \\ &= \frac{h_{d54}}{h_{d51} + h_{d52}\phi_d + h_{d53}\phi_d^2} = \frac{\rho_{dnum5}}{\rho_{dden5}} \end{aligned} \quad (28)$$

여기서  $h_{d41} = \tilde{v}_{(n-1)(n-1)}$ ,  $h_{d42} = 2\tilde{v}_{(n-1)n}$ ,

$$h_{d43} = \tilde{v}_{nn}, h_{d44} = r_1^2 + r_2^2 - 2\lambda_d^2,$$

$$h_{d51} = \lambda_d^2 \tilde{v}_{(n-1)(n-1)} - 2\lambda_d \tilde{v}_{(n-1)n} + \tilde{v}_{nn},$$

$$h_{d52} = 2(\lambda_d^2 \tilde{v}_{(n-1)n} - \lambda_d \tilde{v}_{nn}), h_{d53} = \lambda_d^2 \tilde{v}_{nn}$$

$$h_{d54} = r_1^2 r_2^2 - \lambda_d^4 \text{이다.}$$

$$\phi_d = \frac{-h_{d62} \pm \sqrt{h_{d62}^2 - 4h_{d61}h_{d63}}}{2h_{d63}} \quad (29)$$

여기서  $h_{d61} = h_{d44}h_{d51} - h_{d54}h_{d41}$ ,

$$h_{d62} = h_{d44}h_{d52} - h_{d54}h_{d42}, h_{d63} = h_{d44}h_{d53} - h_{d54}h_{d43}$$

이다. 한편  $h_{d63}$ 을  $\lambda_d$ 로 정리하면

$$h_{d63} = -\tilde{v}_{nn}(\lambda_d^2 - r_1^2)(\lambda_d^2 - r_2^2) \quad (30)$$

으로  $\lambda_d \neq r_1, \lambda_d \neq r_2$ 의 조건에 의해  $h_{d63} \neq 0$ 이다.

### 3.2 중근의 이동범위

이동할 실근( $r_1, r_2$ )은  $r_1 \leq 0, r_2 \leq 0$ 이면서  $\tilde{Q}_{dj}$ 가 양의 준정부호행렬이 되도록  $\tilde{Q}_{dj}$ 의 행렬식 값과 피벗(pivot)은 0 이상이 되게해야 한다. Eq. (27)에 의해  $|\tilde{Q}_{dj}| = 0$ 이 된다, 그리고 피벗인  $\tilde{q}_{(n-1)(n-1)}$ 가 0이면  $\tilde{Q}_{dj}$ 가 0 행렬(zero matrix)이 되기 때문에  $\rho_d > 0$ 여야 한다. 그런데 Eq. (21)과 산술-기하 평균 부등식으로부터 Eq. (28)의 분모는  $\rho_{dden4} \geq 0, \rho_{dden5} \geq 0$ 이며,

$$\phi_{dmin4} = -\frac{h_{d42}}{2h_{d43}}, \phi_{dmin5} = -\frac{h_{d52}}{2h_{d53}} \quad (31)$$

에서 분모가 0으로 최소가 되지만 이것은 Eq. (29)를 충족시키지 못하므로  $\rho_{dden4} > 0, \rho_{dden5} > 0$ 이 된다. 고로  $\rho_d > 0$  될 조건은 Eq. (32)이다.

$$\rho_{dnum4} > 0, \rho_{dnum5} > 0 \quad (32)$$

이 결과를 바탕으로  $r_1$ 과  $r_2$ 를 축으로 하는 좌표평면에 표시한 것이 Fig. 2이다. Fig. 2의 (a)는  $r_1 \leq 0$ 과  $r_2 \leq 0$ 인 영역, (b)는  $\rho_{dnum4} > 0$ 인 영역, (c)는  $\rho_{dnum5} > 0$  영역, (d)는 3개의 공통부분으로 중근의 이

동범위(Moving-Range)이다.

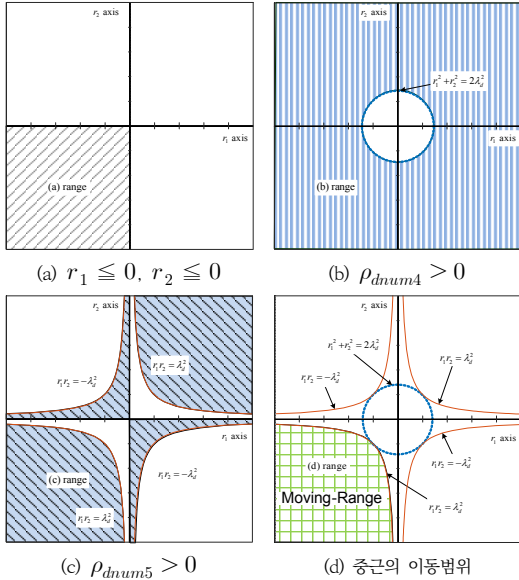


Fig. 2. Moving-Range of a double poles

### 4. 적용 방법의 적용 예

제안한 방법을 적용하기 위해 고유벡터가 하나인 4개의 중근(-1)을 가진 단일 입력 시스템을 다음과 같이 가정한다.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (33)$$

한번에 2개의 중근을 이동하는 방식으로 2번 적용한다. 먼저 단일 입력이라 R은  $r_{11} = 2.0$ 로 설정한다. 그리고 1 단계( $i=1$ )에서 중근이 대각행렬의  $\lambda_3$ 과  $\lambda_4$ 가 되도록 변환행렬로  $A_1 (=A)$ 을  $\tilde{A}_{dj,1}$ 로 변환한다.

$$\tilde{A}_{dj,1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Fig. 3은 이동할 두 실근  $r_1$ 과  $r_2$ 를 축으로 한 좌표 평면에 그린 근의 이동범위이다. 이 범위에서

$$r_{1,1} = -2, r_{2,1} = -3 \quad (35)$$

를 원하는 근으로 선택하여 식에 대입하면  $\phi_{d1}$ 과  $\rho_{d1}$ 은 다음과 같이 2개씩 구해진다.

$$\phi_{d1,1} = 0.9741, \phi_{d1,2} = 2.6092 \quad (36)$$

$$\rho_{d1,1} = 4.7357, \rho_{d1,2} = 0.3754 \quad (37)$$

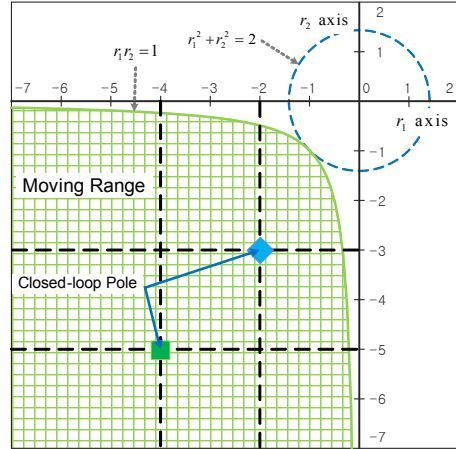


Fig. 3. Select a closed-loop poles in the Moving-Range

또한 MATLAB의 LQR 함수를 이용하면 첫 번째 제어 법칙  $K_1$ 이 다음과 같이 구해진다.

$$K_1 = [0.0 \quad 0.0 \quad -0.6667 \quad 1.2222] \quad (38)$$

2 단계( $i=2$ )에서도  $A_2 (=A - BK_1)$ 를 대각행렬

$$\tilde{A}_{dj,2} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

로 변환하고, 근의 이동범위에서 근을

$$r_{2,1} = -4, r_{2,2} = -5 \quad (40)$$

으로 택하면  $\phi_{d2}$ ,  $\rho_{d2}$ ,  $K_2$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\phi_{d2,1} = 0.6285, \phi_{d2,2} = 1.3215 \quad (41)$$

$$\rho_{d2,1} = 954.8437, \rho_{d2,2} = 21.8230 \quad (42)$$

$$K_2 = [-4.0 \quad 13.6667 \quad -10.7778 \quad -1.8519] \quad (43)$$

그리하여 최종적으로 구하는 제어법칙은 각 단계에서 구한 제어법칙의 합으로 표현된다.

$$K = K_1 + K_2 = [-4.0 \quad 13.6667 \quad -11.4444 \quad -0.6296] \quad (44)$$

이 제어법칙  $K$ 를 Eq. (34)의 시스템에 적용하면 Fig. 4처럼 중근은 선택한 실근으로 이동한다.

$$eig(A - BK) = -2, -3, -4, -5 \quad (45)$$

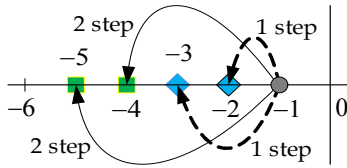


Fig. 4. Move system poles to closed-loop poles

### 5. 결론

본 논문은 한 쌍의 중근을 실근으로 이동시키는 기존 논문의 한계점을 개선하기 위하여 3개 이상의 다중 중근의 이동과 다중 입력의 측면에서 새로이 제안하였다.

조단블록을 갖는 다중 중근의 이동과 가중행렬의 상관관계는 해밀토니안 시스템의 특성방정식으로부터  $\rho_d$ 와  $\phi_d$  식으로 유도하고, 좌표에 그려진 중근이 이동할 실근의 이동범위는 상태가중행렬이 양의 준정부호행렬이 될 조건에서 얻어진다. 이 범위에서 근을 선택하고 식에 대입하여 가중행렬을 계산한다. 이를 반복함으로써 모든 중근을 원하는 근으로 이동시키는 LQ제어의 가중행렬을 구하는 방법을 제시하였다.

조단블록을 갖는 4개의 중근을 근의 이동범위에 있는 실근으로 이동시키는 가중행렬과 제어법칙을 구하는 예제를 통해 한 쌍의 중근만 이동시킨 기존 논문의 한계점 개선과 제안한 방법의 적용 가능성을 확인하였다.

다중 중근을 복소근으로 이동하는 방법에 대해서는 이 논문에서 다루지 못했다. 이 문제는 추후 연구가 필요할 것 같다.

### References

[1] B. D. O. Anderson, J. B. Moore, Optimal Control, Prentice-Hall, 1989. pp.7-138  
 [2] J. B. Burl, Linear Optimal Control:  $H_2$  and  $H_\infty$  Methods, Addison Wesley Longman, 1999. pp.179-230  
 [3] O. A. Solheim, "Design of optimal control systems with prescribed eigenvalues," *Int. J. Control*, vol. 15, no. 1, pp. 143-160, 1972. DOI: <https://doi.org/10.1080/00207177208932136>  
 [4] Y. Ochi, K. Kanai, "Pole Placement in Optimal Regulator by Continuous Pole-Shifting," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 18, No.6, pp.

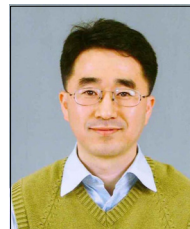
1253~1258, 1995.

DOI: <https://doi.org/10.2514/3.21538>

[5] T. Fujinaka and S. Omatu, "Pole placement using optimal regulators," *T.IEE japan*, vol. 121-C, no. 1, pp. 240-245, 2001.  
 [6] M. Park, S.K. Hong, S.H. Lee, "Design of an LQR Controller Considering Pole's Moving-Range", *Journal of Control, Automation and System Engineering* Vol 11, No. 10, pp. 864-869, 2005. DOI: <https://doi.org/10.5302/J.ICROS.2005.11.10.864>  
 [7] M. Park, M.S. Park, D. Park, S.K. Hong, S.H. Lee, "LQR Controller Design with Pole-Placement," *Journal of Control, Automation and System Engineering* Vol 13, No 6, pp. 574-580, 2007. DOI: <https://doi.org/10.5302/J.ICROS.2007.13.6.574>  
 [8] M. Park, "Pole Placement by an LQ Controller," *Journal of Control, Automation and System Engineering* Vol 15, No 3, pp. 249-254, 2009. DOI: <https://doi.org/10.5302/J.ICROS.2009.15.3.249>  
 [9] M. Park, "Pole Placement Method to Move a Eual Poles with Jordan Block to Two Real Poles Using LQ Control and Pole's Moving-Range," *Journal of the KAIS* Vol 19, No 2, pp. 608-616, 2018. DOI: <https://doi.org/10.5762/KAIS.2018.19.2.608>  
 [10] M. Park, "Pole Placement Method of a Double Poles Using LQ Control and Pole's Moving-Range," *Journal of the KAIS* Vol 21, No 1, pp. 20-27, 2020. DOI: <https://doi.org/10.5762/KAIS.2020.21.1.20>  
 [11] G. Strang, Linear Algebra and its applications, 3rd Ed., Harcourt Brace & Company, 1988, pp.330-337  
 [12] C. Chen, Linear System Theory and Deign, Holt-Saunders International Editions, 1984, pp.168-227

박민호(Minho Park)

[중신회원]



- 1993년 2월 : 아주대학교 대학원 제어계측공학과 (공학석사)
- 1993년 3월 ~ 1998년 6월 : (주)한미반도체
- 2007년 8월 : 아주대학교 대학원 전자공학과 (공학박사)
- 2008년 3월 ~ 현재 : 충남도립대학교 전기전자공학과 부교수

<관심분야>

최적제어, Robust Control, 공장자동화