

# LQ 제어를 이용하여 상태가중행렬을 결정하는 방법: 조단블록이 있는 다중 중근을 복소근으로 이동

박민호

충남도립대학교 전기전자공학과

## A Methods for Determining the State Weighting Matrix Using LQ Control: The Moving Multiple Poles with Jordan Block to a Complex Poles

Minho Park

Electrical & Electronics Engineering, Chungnam State University

**요약** 일반적으로 비선형 시스템은 1차 또는 2차 시스템의 곱으로 선형화되며 시스템은 1차 시스템의 실근과 2차 시스템의 중근, 서로 다른 두 실근, 복소근을 가진다. 근의 위치에 따라 시스템의 특성이 결정된다. 근의 위치를 이동하여 시스템의 응답특성과 안정성을 개선할 수 있다. 근의 위치를 이동하는 여러 방법 중에서 LQ 제어는 위상여유와 이득여유의 안정성을 보장하지만, 시행착오 방법으로 가중행렬을 선택하여 근의 위치를 정확히 설정할 수 없다. 해밀토니안 시스템을 이용하여 이 문제를 해결하려는 연구가 있었다. 이 논문은 조단블록을 가진 3개 이상의 다중 중근을 원하는 복소근으로 이동시키는 LQ 제어의 가중행렬과 제어법칙을 구하는 방법에 관한 것이다.  $\rho_{dc}$ 와  $\phi_{dc}$ 의 변수로 정의된 상태 가중행렬을 가진 해밀토니안 시스템의 특성방정식에서 가중행렬과 중근의 관계식을 유도하고, 상태가중행렬이 양의 준부호가 될 조건에서 중근이 이동할 복소근의 범위를 좌표에 그린다. 중근의 이동범위에서 복소근을 선택하고, 선택한 근과 가중행렬과 중근의 관계식에서 상태가중행렬과 제어법칙을 계산한다. 조단블록을 가진 4개의 중근(-1)을 두쌍의 복소근(-2±j, -4±j2) 또는 한쌍의 복소근(-3±j2)과 서로 다른 두 실근(-4, -6)으로 이동시키는 상태가중행렬과 제어법칙을 구하는 예제를 통해 제안한 방법의 유용성을 확인할 수 있었다.

**Abstract** In general, a nonlinear system can be linearized using the product of 1st and 2nd-order systems, and the response characteristics and the stability of a system can be improved by pole placement. Among the pole placement design methods, LQ control ensures the stability of the system. However, it is difficult to arbitrarily specify the location of a pole because the weighting matrix is obtained by trial and error. This paper deals with a method of selecting a weighting matrix for LQ control that moves multiple poles with Jordan blocks to complex poles. We derive the relational equation between double poles and a weighting matrix from the characteristic equation of a Hamiltonian system with a state weighting matrix that is represented by two variables( $\rho_{dc}$ ,  $\phi_{dc}$ ). Then, we obtain the moving range from the condition that the state weighing matrix becomes a positive semi-definite matrix. We select a closed-loop pole in the moving range and calculate the weighting matrix use the relational equation and the selected poles. In an example, the usefulness of the proposed method is confirmed through the computation process of a weighting matrix and a control law that moves four poles(-1) with a Jordan block to the desired complex Poles(-2±j, -4±j2).

**Keywords** : Pole Placement, LQ, Hamiltonian, Multiple Pole, Jordan Block, Moving-Range, Weighting Matrix

\*Corresponding Author : Minho Park(Chungnam State Univ.)

email: minhinf@gmail.com

Received June 9, 2021

Revised July 1, 2021

Accepted July 2, 2021

Published July 31, 2021

## 1. 서론

특성방정식의 근은 시스템의 응답특성과 안정성을 결정하는 요소이다. 근을 이동시키는 제어를 시스템에 추가하여 응답특성을 개선하고 안정성을 확보할 수 있다. 제어를 설계하는 극배치방법 중에서 LQ(Linear Quadratic)제어는 위상여유(60°이상)와 이득여유(1/2, ∞)의 안정성 보장하지만, 근의 위치를 결정하는 가중행렬을 시행착오 방법으로 구하는 것과 근의 위치를 정확히 설정하기 어려운 점이 있다[1,2]. 해밀토니안(Hamiltonian) 시스템으로 이 문제를 해결하려는 연구가 있었다[3-5].

Solheim은 가중행렬을 대각행렬 모양으로 한정된 후 근과 가중행렬의 식을 유도하고, 1차 시스템의 근과 제한적이지만 2차 시스템의 서로 다른 두 실근과 복소근을 이동하는 방법을 제시하였다[3]. Fujinaka는 삼각함수로 표현된 상태가중행렬로 근과 가중행렬의 식을 유도하고, 시스템의 복소근을 원하는 페루프 복소근으로 이동시키는 방법을 제시하였다[5]. Solheim의 방법에 Fujinaka의 상태가중행렬을 사용하여 근의 이동범위(Moving-Range) 도시하고 근과 가중행렬의 관계식을 유도하였다. 이것을 이용하여 시스템의 근(복소근, 서로 다른 두 실근)을 페루프의 서로 다른 두 실근과 복소근으로 이동시키는 LQ 제어의 설계방법을 제시하였다[6-8]. 또한, 조단블록을 갖는 한 쌍의 중근을 이동시키는 방법도 제시하였다[9,10]. 그런데 위에서 제시한 방법은 3개 이상의 다중 중근에는 적용할 수 없다. 그래서 행렬식이 0인 2개의 변수로 정의된 새로운 상태가중행렬과 다른 접근 방식으로 다중 중근을 이동시키는 방법을 제시하였지만, 다중 중근을 서로 다른 두 실근으로만 이동되는 단점이 있다[11].

이 논문은 다중 중근을 복소근으로 이동시키는 방법으로 기존 논문의 단점을 해결하였다. 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 LQ 제어, 시스템 행렬의 대각행렬에 대해 알아보고, 3장에서는 상태가중행렬을 구하는 식과 복소근으로 이동할 중근의 이동범위에 관해서 기술한다. 다음으로 4장에서 예제를 통해 제시한 방법을 적용해 보고 5장에서 결론을 맺는다.

## 2. LQ 제어

### 2.1 LQ 제어

일반적으로 비선형 시스템은 1차 또는 2차 시스템의

다중 곱으로 선형화되며, 단일 입력의 비선형 시스템은 Eq. (1)의  $n$ 차 상태방정식으로 표현된다.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

여기서 시스템 변수  $A$ 와  $B$ 는 각각  $n \times n$ 와  $n \times 1$ , 상태변수  $x$ 는  $n \times 1$ , 제어입력  $u$ 는  $1 \times 1$  행렬이다. 그리고 이 시스템은 제어가 가능하다고 가정한다.

LQ 제어는 출력이 원하는 목표에 도달하도록 Eq. (2)의 성능지수함수를 최소화하는 Eq. (3)의 제어법칙을 설계하는 것이다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (2)$$

$$u = -Kx \quad (3)$$

$1 \times n$ 인 제어법칙  $K$ 는 라그랑지(Lagrange) 곱수 ( $\lambda_L$ )로 표현한 Eq. (4)의 성능지수함수에서 얻어지며 Eq. (5)와 같다.

$$J_{\lambda} = \int_0^{\infty} (H - \lambda_L^T \dot{x}) dt \quad (4)$$

여기서  $H = \frac{1}{2}(x^T Q x + u^T R u) + \lambda_L^T (Ax + Bu)$ 이고,  $n \times n$ 인 상태가중행렬  $Q$ 는 양의 준정부호(positive semi-definite)이고,  $1 \times 1$ 인 제어가중행렬  $R$ 은 양의 정부호(positive definite)이다.

$$K = R^{-1} B^T P \quad (5)$$

시스템이 제어가 가능하면  $P$ 는 Eq. (6)의 리카티 방정식에서 구해지고, 리카티 방정식은 Eq. (7)의 해밀토니안 시스템에서 얻어진다.

$$PA + A^T P + Q - P B R^{-1} B^T P = 0 \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -V \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서  $V = B R^{-1} B^T$ 이다.

그리고 해밀토니안 시스템은  $2n$ 개의 근을 가진다. 근의 위치는  $Q$ 와  $R$ 에 의해 결정되며,  $s$ -평면에 표시하면 허수축에 대칭이다. 또한, LQ 제어는 반복 적용이 가능하며 하나의  $K_i$ 로 1차 또는 2차 시스템의 근을 이동하는 방법으로  $k(\leq n)$ 번 적용하면 시스템의  $n$ 개 근을 이동시킬 수 있으며 제어가중행렬이 상수이면 최종적으로 구하는 제어법칙과 상태가중행렬은 각 단계에 적용된 값의 합과 같다[3].

$$K = \sum_{i=1}^k K_i, \quad Q = \sum_{i=1}^k Q_i \quad (8)$$

## 2.2 대각행렬

시스템에 따라 상태방정식의  $A$ 는 다양한 모양을 가지지만 Eq. (9)의 변환행렬( $T$ )에 의해 대각행렬( $\tilde{A} = T^{-1}AT$ )로 변환된다.

$$x = Tz \quad (9)$$

그리고 대각행렬의 모양은 근의 종류에 따라 결정이 된다. 시스템이 가질 수 있는 근의 종류는 2차 시스템에서 얻어지는 중근, 서로 다른 두 실근, 복소근과 1차 시스템에서 얻어지는 실근이다.  $n$ 차 상태방정식의 근을 Eq. (10)라 하면  $\lambda_i (i=1, \dots, n)$ 는 4개 중 하나가 된다.

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{(n-1)}, \lambda_n \quad (10)$$

대각행렬의 모양은 서로 다른 실근이면 Eq. (11)이고,  $\lambda_{n-1}, \lambda_n$ 가 복소근( $\alpha \pm j\beta$ )이면 Eq. (12)이다.

$$\tilde{A} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{(n-1)}, \lambda_n) \quad (11)$$

$$\tilde{A}_{dc} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{bmatrix} \quad (12)$$

특히, 중근이 있으면 고유벡터 개수와 중근의 개수 차이만큼 조단블록이 생긴다. 예를 들면  $r (\leq n)$ 개의 중근( $\lambda_d$ )과 관련된 고유벡터가 1개이면 대각행렬의 모양은 Eq. (13)이다.

$$\tilde{A}_{dj} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_{n-r} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_d & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \lambda_d & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_d \end{bmatrix} \quad (13)$$

같은 방식으로 변환행렬을 적용하면 Eq. (1)의 상태방정식과 Eq. (7)의 해밀토니안 시스템은

$$\dot{z} = \tilde{A}_{dj}z + \tilde{B}u \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{dj} & -\tilde{V}_{dj} \\ -\tilde{Q}_{dj} & -\tilde{A}_{dj}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (15)$$

로 변환된다. 여기서  $\tilde{B} = T^{-1}B$ ,  $\tilde{Q}_{dj} = T^TQT$ ,  $\tilde{V}_{dj} = \tilde{B}R^{-1}\tilde{B}^T$ 이고, 기호( $\sim$ )는 변환행렬이 적용된 변수를 표시한다.

## 3. 다중 중근의 극배치

### 3.1 상태가중행렬을 구하는 식

단일 입력 시스템이라 Eq. (16)의  $R$ 이 양의 정부호가 될 조건은  $r_{11}$ 이 양수되는 것이고, 시스템이 제어가능하려면 Eq. (17)의  $\tilde{B}$ 는 0인 요소가 없어야 한다. 즉  $\tilde{b}_{j1} \neq 0 (j=1, 2, \dots, n)$ 이다[13].

$$R = r_{11}^{-1} \quad (16)$$

$$\tilde{B} = [\tilde{b}_{11} \ \tilde{b}_{21} \ \dots \ \tilde{b}_{(n-1)1} \ \tilde{b}_{n1}]^T \quad (17)$$

이런 조건의  $R$ 과  $\tilde{B}$ 로 Eq. (15)의  $\tilde{V}_{dj}$ 를 표현하면 Eq. (18)이 되고,  $\tilde{v}_{ij} = \tilde{v}_{ji}$ 이어서 대칭행렬이 된다.

$$\tilde{V}_{dj} = \tilde{B}R^{-1}\tilde{B}^T = \begin{bmatrix} \tilde{v}_{11} & \tilde{v}_{12} & \dots & \tilde{v}_{1(n-1)} & \tilde{v}_{1n} \\ \tilde{v}_{21} & \tilde{v}_{22} & \dots & \tilde{v}_{2(n-1)} & \tilde{v}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{v}_{(n-1)1} & \tilde{v}_{(n-1)2} & \dots & \tilde{v}_{(n-1)(n-1)} & \tilde{v}_{(n-1)n} \\ \tilde{v}_{n1} & \tilde{v}_{n2} & \dots & \tilde{v}_{n(n-1)} & \tilde{v}_{nn} \end{bmatrix} \quad (18)$$

여기서  $\tilde{v}_{kk} = r_{11}\tilde{b}_{k1}^2$ ,  $\tilde{v}_{ij} = r_{11}\tilde{b}_{i1}\tilde{b}_{j1}$ 이다.

그리고  $r_{11} > 0$ 과  $\tilde{b}_{j1} \neq 0$ 에 의해 Eq. (19)와 Eq. (20)의 조건이 얻어진다.

$$\tilde{v}_{(n-1)(n-1)} > 0, \ \tilde{v}_{nn} > 0 \quad (19)$$

$$\tilde{v}_{(n-1)(n-1)}\tilde{v}_{nn} - \tilde{v}_{(n-1)n}^2 = 0 \quad (20)$$

조단블록을 갖는  $r$ 개의 중근 중에서  $\lambda_{n-1}$ 과  $\lambda_n$ 을 이 동시킬 상태가중행렬과 이동할 복소근을 Eq. (21)과  $c_r \pm jc_i (c_r < 0, c_i \neq 0)$ 으로 각각 가정한다.

$$\tilde{Q}_{dj} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{q}_{(n-1)(n-1)} & \tilde{q}_{(n-1)n} \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{q}_{n(n-1)} & \tilde{q}_{nn} \end{bmatrix} \quad (21)$$

그러면  $c_r \pm jc_i$ 이 Eq. (15)의 해밀토니안의 특성방정식을 근이 되려면 Eq. (22)가 성립해야 한다.

$$\begin{vmatrix} s - \lambda_d & -1 & \tilde{v}_{(n-1)(n-1)} & \tilde{v}_{(n-1)n} \\ 0 & s - \lambda_d & \tilde{v}_{n(n-1)} & \tilde{q}_{(n-1)n} \\ \tilde{q}_{(n-1)(n-1)} & \tilde{q}_{(n-1)n} & s + \lambda_d & 0 \\ \tilde{q}_{n(n-1)} & \tilde{q}_{nn} & 1 & s + \lambda_d \end{vmatrix} = (s^2 - (c_r + jc_i)^2)(s^2 - (c_r - jc_i)^2) \quad (22)$$

$\tilde{V}_{dj}$ 의 대칭성과 Eq. (19) 및 Eq. (20)으로 성립조건(Eq. (22))을 정리하면 3개의 방정식이 얻어진다.

$$\tilde{v}_{nm}(\tilde{q}_{(n-1)n} - \tilde{q}_{n(n-1)}) = 0 \quad (23)$$

$$\tilde{v}_{(n-1)(n-1)}\tilde{q}_{n(n-1)} + 2\tilde{v}_{(n-1)n}\tilde{q}_{(n-1)n} + \tilde{v}_{nn}\tilde{q}_{(n-1)(n-1)} = 2(c_r^2 - c_i^2 - \lambda_d^2) \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & (\lambda_d^2 \tilde{v}_{(n-1)(n-1)} - 2\lambda_d \tilde{v}_{(n-1)n} + \tilde{v}_{nn})\tilde{q}_{(n-1)(n-1)} \\ & + 2(\lambda_d^2 \tilde{v}_{(n-1)n} - \lambda_d \tilde{v}_{nn})\tilde{q}_{(n-1)n} + \lambda_d^2 \tilde{v}_{nn}\tilde{q}_{nn} \\ & = (c_r^2 + c_i^2)^2 - \lambda_d^4 \end{aligned} \quad (25)$$

그리고  $\tilde{v}_{nn} > 0$ 이라서 Eq. (23)이 성립할 조건은

$$\tilde{q}_{(n-1)n} = \tilde{q}_{n(n-1)} \quad (26)$$

이다. 이 조건 때문에 Eq. (24)와 Eq. (25)는  $\tilde{Q}_{dj}$ 의 요소를 변수로 하는 연립방정식이 된다. 상태방정식의 조건인  $|\tilde{Q}_{dj}| = 0$ 을 만족하는  $\tilde{Q}_{dj}$ 의 요소를

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{(n-1)(n-1)} &= \rho_{dc} \\ \tilde{q}_{(n-1)n} &= \tilde{q}_{n(n-1)} = \rho_{dc}\phi_{dc} \\ \tilde{q}_{nn} &= \rho_{dc}\phi_{dc}^2 \end{aligned} \quad (27)$$

로 설정하면 방정식과 변수의 개수가 같게 된다. 이 연립방정식에서 중근과 가중행렬의 관계식( $\rho_{dc}$ ,  $\phi_{dc}$ )이 Eq. (28)과 Eq. (29)로 유도된다.

$$\begin{aligned} \rho_{dc} &= \frac{h_{d14}}{h_{d11} + h_{d12}\phi_d + h_{d13}\phi_d^2} = \frac{\rho_{d1\_num}}{\rho_{d1\_den}} \\ &= \frac{h_{d24}}{h_{d21} + h_{d22}\phi_d + h_{d23}\phi_d^2} = \frac{\rho_{d2\_num}}{\rho_{d2\_den}} \end{aligned} \quad (28)$$

여기서  $h_{d11} = \tilde{v}_{(n-1)(n-1)}$ ,  $h_{d12} = 2\tilde{v}_{(n-1)n}$ ,

$$h_{d13} = \tilde{v}_{nn}, \quad h_{d14} = 2(c_r^2 - c_i^2 - \lambda_d^2),$$

$$h_{d21} = \lambda_d^2 \tilde{v}_{(n-1)(n-1)} - 2\lambda_d \tilde{v}_{(n-1)n} + \tilde{v}_{nn},$$

$$h_{d22} = 2(\lambda_d^2 \tilde{v}_{(n-1)n} - \lambda_d \tilde{v}_{nn}), \quad h_{d23} = \lambda_d^2 \tilde{v}_{nn}$$

$$h_{d24} = (c_r^2 + c_i^2)^2 - \lambda_d^4 \text{이다.}$$

$$\phi_{dc} = \frac{-h_{d32} \pm \sqrt{h_{d32}^2 - 4h_{d31}h_{d33}}}{2h_{d33}} \quad (29)$$

여기서  $h_{d31} = h_{d14}h_{d21} - h_{d24}h_{d11}$ ,

$$h_{d32} = h_{d14}h_{d22} - h_{d24}h_{d12},$$

$h_{d33} = h_{d14}h_{d23} - h_{d24}h_{d13}$ 이다. 여기서  $h_{d33}$ 을 정리하면

$$h_{d33} = -\tilde{v}_{nn} \{(\lambda_d^2 + c_i^2 - c_r^2)^2 + 4c_r^2 c_i^2\} \quad (30)$$

으로  $c_r \neq 0$ ,  $c_i \neq 0$ 의 조건에 의해  $h_{d33} \neq 0$ 된다.

### 3.2 다중 중근의 이동범위(Moving-Range)

행렬이 양의 준정부호가 되려면 행렬식과 피벗(pivot)

이 음수가 아니어야 한다[12]. 상태가중행렬  $\tilde{Q}_{dj}$ 의 행렬식은 Eq. (27)에 의해 0이 되며, 피벗인  $\tilde{q}_{(n-1)(n-1)} = \rho_{dc}$ 가 0이면  $\tilde{Q}_{dj}$ 가 영행렬이 되므로 피벗은 0이 될 수 없다. 즉  $\rho_{dc} > 0$ 이다.

$\rho_{dc}$ 의 분모는 산술-기하 평균 부등식과 Eq. (19)에 의해  $\rho_{d1\_den} \geq 0$ ,  $\rho_{d2\_den} \geq 0$ 이며, Eq. (31)의 조건일 때 최소값 0을 가지는데, 이것은 Eq. (29)를 충족시키지 못하기 때문에 분모는 0이 될 수 없다. 즉  $\rho_{dc}$ 의 분모는 양수이다.

$$\phi_{d1\_min} = -\frac{h_{d12}}{2h_{d13}}, \quad \phi_{d2\_min} = -\frac{h_{d22}}{2h_{d23}} \quad (31)$$

고로  $\tilde{Q}_{dj}$ 가 양의 준정부호가 될 조건은 Eq. (28)의 분자는 양수가 되는 것이다.

$$\rho_{d1\_num} > 0, \quad \rho_{d2\_num} > 0 \quad (32)$$

이동할 복소근( $c_r \pm jc_i$ )은 Eq. (32)을 만족하면서 안정한 영역에 있어야 한다. 이것을 만족하는 영역을 그린 것이 근의 이동범위이다. Fig. 1의 (a)는  $c_r < 0$ ,  $c_i \neq 0$ 인 좌표의 좌반면, (b)는  $\rho_{d1\_num} > 0$ 로 표현되는 원의 바깥 부분, (c)는  $\rho_{d2\_num} > 0$ 로 표현되는 쌍곡선의 안쪽 부분, (d)는 3개의 공통부분으로 중근이 이동할 복소근의 이동범위이다.

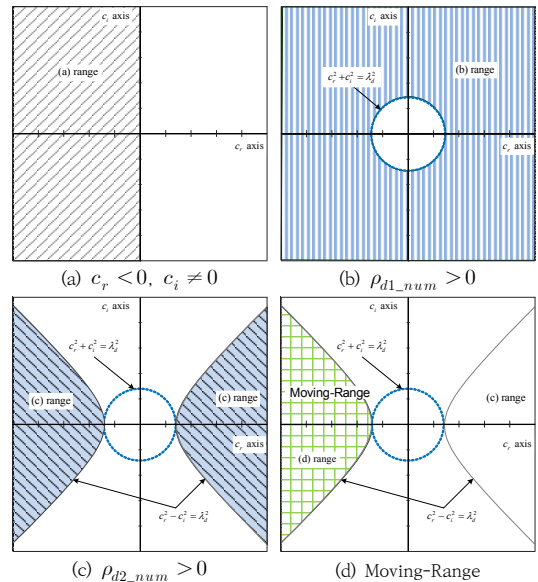


Fig. 1. Moving-Range of a double poles

### 4. 제시한 방법의 적용 예

제시한 방법을 적용할 시스템은 고유벡터가 1개인 4개의 중근(-1)을 가진 Eq. (33)로 가정한다. 그리고 A를 Eq. (34)의 대각행렬로 변환한다.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\tilde{A}_{dj} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

시스템의 중근을 ① 두 쌍의 복소근과 ② 한 쌍의 복소근과 서로 다른 두 실근으로 이동시키는 제어법칙을 제시한 방법으로 각각 구해본다. 사용할 변수의 첨자는 복소근일 때 a#\_#, 복소근과 두 실근일 때 b#\_#이다. 여기서 #은 단계와 번호를 의미한다.

#### 4.1 복소근으로 이동

한 번에 중근 2개를 이동시키는 방법으로 2회 적용하여 시스템의 중근을 복소근으로 이동한다. 먼저 단일 입력이라 제어이중행렬 R은 r<sub>11</sub> = 2로 설정하고, 1단계(i=1)에서 대각행렬( $\tilde{A}_{dj,a1} = \tilde{A}_{dj}$ )의 λ<sub>3</sub>과 λ<sub>4</sub>를 이동시킬 상태가중행렬을 Eq. (35)로 가정하면, 중근이 이동할 복소근의 범위는 Fig. 2와 같다.

$$\tilde{Q}_{dj,a1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{dc,a1} & \rho_{dc,a1} \phi_{dc,a1} \\ 0 & 0 & \rho_{dc,a1} \phi_{dc,a1} & \rho_{dc,a1} \phi_{dc,a1}^2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

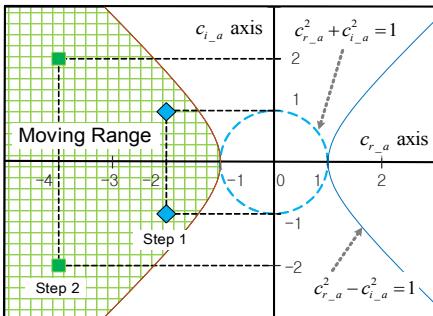


Fig. 2. Select closed-loop poles in the moving range of (-1)

근의 이동범위에서 이동할 근을 Eq. (36)으로 선택하여 Eq. (29)와 Eq. (28)에 대입하면 Eq. (37)의 φ<sub>dc,a1</sub>과

Eq. (38)의 ρ<sub>dc,a1</sub>이 계산된다.

$$c_{r,a1} \pm jc_{i,a1} = -2 \pm j \quad (36)$$

$$\phi_{dc,a1,1} = 1.0434, \phi_{dc,a1,2} = 2.0232 \quad (37)$$

$$\rho_{dc,a1,1} = 2.6442, \rho_{dc,a1,2} = 0.4669 \quad (38)$$

그리고 MATLAB으로 Eq. (39)의 제어법칙을 구할 수 있다.

$$K_{dc,a1} = [0.0000 \quad 0.0000 \quad -0.6667 \quad 0.888] \quad (39)$$

다음 2단계(i=2)에서 K<sub>dc,a1</sub>가 적용된 시스템의 A<sub>a2</sub>(= A - BK<sub>dc,a1</sub>)를  $\tilde{A}_{dj,a2}$ 로 변환하고, 근을 이동시킬 상태가중행렬은 Eq. (41)로 설정한다.

$$\tilde{A}_{dj,a2} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\tilde{Q}_{dj,a2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{dc,a2} & \rho_{dc,a2} \phi_{dc,a2} \\ 0 & 0 & \rho_{dc,a2} \phi_{dc,a2} & \rho_{dc,a2} \phi_{dc,a2}^2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

같은 방법으로 이동범위에서 복소근을 Eq. (42)로 선택하면 Eq. (43)의 φ<sub>dc,a2</sub>과 Eq. (44)의 ρ<sub>dc,a2</sub>이 계산되고, Eq. (45)의 제어법칙이 얻어진다.

$$c_{r,a2} \pm jc_{i,a2} = -4 \pm j2 \quad (42)$$

$$\phi_{dc,a2,1} = 0.6432, \phi_{dc,a2,2} = 1.1402 \quad (43)$$

$$\rho_{dc,a2,1} = 540.7840, \rho_{dc,a2,2} = 207.6605 \quad (44)$$

$$K_{dc,a2} = [-4.3333 \quad 12.1111 \quad -6.2963 \quad -2.5309] \quad (45)$$

그리하여 최종적으로 구하는 제어법칙은 각 단계에서 구한 제어법칙의 합과 같다.

$$K_{dc,a} = K_{dc,a1} + K_{dc,a2} = [-4.3333 \quad 12.1111 \quad -6.9630 \quad -1.6420] \quad (46)$$

이 제어법칙 K<sub>dc,a</sub>를 Eq. (33)의 시스템에 적용하면 Fig. 3처럼 중근은 선택한 복소근으로 이동된다.

$$eig(A - BK_{dc,a}) = -2 \pm j, -4 \pm j2 \quad (47)$$

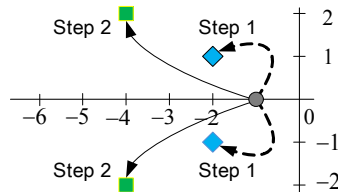


Fig. 3. Move system poles to the complex poles

#### 4.2 복소근과 서로 다른 두 실근으로 이동

처음에 증근을 복소근으로, 다음으로 증근을 서로 다른 두 실근 이동시키는 방법으로 시스템의 근을 이동한다. 먼저 단일 입력이라  $R$ 은  $r_{11} = 4$ 로 설정하고, 1단계( $i=1$ )에서 대각행렬( $\tilde{\Lambda}_{dj,b} = \tilde{\Lambda}_{dj}$ )의  $\lambda_3$ 과  $\lambda_4$ 를 이동시킬  $\tilde{Q}_{dj,b1}$ 를 Eq. (48)이라 하면, 증근이 이동할 복소근과 실근의 범위는 Fig. 4와 같다.

$$\tilde{Q}_{dj,b1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{dc,b1} & \rho_{dc,b1} \phi_{dc,b1} \\ 0 & 0 & \rho_{dc,b1} \phi_{dc,b1} & \rho_{dc,b1} \phi_{dc,b1}^2 \end{bmatrix} \quad (48)$$

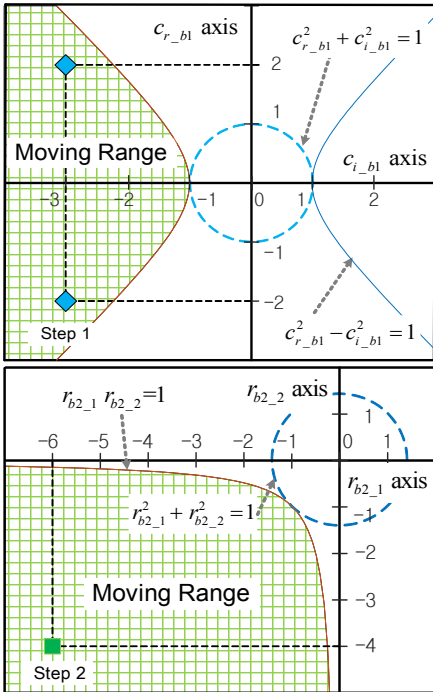


Fig. 4. Select a closed-loop poles in the moving range of (-)

이 범위에서 근을 Eq. (49)로 선택하여 Eq. (29)와 Eq. (28)에 대입하면 Eq. (50)의  $\phi_{dc,b1}$ 과 Eq. (51)의  $\rho_{dc,b1}$ 이 계산된다.

$$c_{r,b1} \pm jc_{i,b1} = -3 \pm j2 \quad (49)$$

$$\phi_{dc,b1_1} = 1.1542, \quad \phi_{dc,b1_2} = 1.6125 \quad (50)$$

$$\rho_{dc,b1_1} = 6.9256, \quad \rho_{dc,b1_2} = 2.8522 \quad (51)$$

그리고 MATLAB을 이용해 Eq. (52)의 제어법칙을 구

할 수 있다.

$$K_{dc,b1} = [0.0000 \quad 0.0000 \quad 2.6667 \quad 4.8889] \quad (52)$$

다음으로 2단계( $i=2$ )에서  $K_{dc,b1}$ 가 적용된 시스템의  $A_{b2} = (A - BK_{dc,b1})$ 를  $\tilde{\Lambda}_{dj,b2}$ 로 변환하고, 근을 이동시킬 상태가중행렬은 Eq. (54)로 설정한다.

$$\tilde{\Lambda}_{dj,b2} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$\tilde{Q}_{dj,b2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{dc,b2} & \rho_{dc,b2} \phi_{dc,b2} \\ 0 & 0 & \rho_{dc,b2} \phi_{dc,b2} & \rho_{dc,b2} \phi_{dc,b2}^2 \end{bmatrix} \quad (54)$$

그리고 이동범위에서 서로 다른 두 실근을 Eq. (55)로 선택하면 Eq. (56)의  $\phi_{dc,b2}$ 과 Eq. (57)의  $\rho_{dc,b2}$ 이 계산된다[11]. 그리고 MATLAB으로 Eq. (58)의 제어법칙이 구해진다.

$$r_{b2,1} = -6, \quad r_{b2,2} = -4 \quad (55)$$

$$\phi_{dc,b2,1} = -2.3111, \quad \phi_{dc,b2,2} = -1.6651 \quad (56)$$

$$\rho_{dc,b2,1} = 428.4962, \quad \rho_{dc,b2,2} = 127.0593 \quad (57)$$

$$K_{dc,b2} = [-20.0000 \quad 47.3333 \quad -0.5556 \quad -22.0370] \quad (58)$$

그리하여 최종적으로 구하는 제어법칙은 각 단계에서 구한 제어법칙의 합과 같다.

$$K_{dc,b} = K_{dc,b1} + K_{dc,b2} = [-20.0000 \quad 47.3333 \quad -3.2222 \quad -19.814] \quad (59)$$

이 제어법칙  $K_{dc,b}$ 를 Eq. (33)의 시스템에 적용하면 Fig. 5처럼 증근은 선택한 복소근으로 이동된다.

$$\text{eig}(A - BK_{dc,b}) = -3 \pm j2, -4, -6 \quad (60)$$

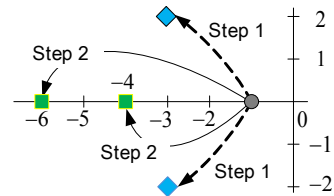


Fig. 5. Move system poles to the complex and the real poles

## 5. 결론

이 논문은 3개 이상의 다중 증근을 복소근으로 이동시

키는 LQ 제어의 상태가증행렬과 제어법칙 구하는 방법에 관한 것으로, 다중 중근을 서로 다른 두 실근으로 이동시킨 기존 논문의 개념을 확장한 것이다.

해밀토니안 시스템의 특성방정식에서 다중 중근과 상태가증행렬의 관계식을 유도하고, 상태가증행렬이 양의 준정부호가 될 조건에서 중근이 이동할 복소근의 이동범위를 구한다. 좌표에 그려진 근의 이동범위에서 복소근을 선택하고 관계식에 대입하여 제어법칙을 계산한다. 그리고 이것을 반복 적용하면 모든 중근을 원하는 근으로 이동시킬 수 있다.

조단블록을 가진 4개의 다중 중근을 원하는 근으로 이동시키는 제어법칙을 구하는 예제로 제시한 방법의 적용 가능성과 기존 논문의 한계를 개선할 수 있음을 확인하였다.

MIMO(Multi Input Multi Output) 시스템과 칼만필터 설계 등의 실제 예제에 적용하는 것은 다음 연구 과제로 다룰 가치가 있을 것 같다.

## References

- [1] B. D. O. Anderson, J. B. Moore, Optimal Control, Prentice-Hall, 1989. pp.7-138
- [2] J. B. Burl, Linear Optimal Control:  $H_2$  and  $H_\infty$  Methods, Addison Wesley Longman, 1999. pp.179-230
- [3] O. A. Solheim, "Design of optimal control systems with prescribed eigenvalues," *Int. J. Control*, vol. 15, no. 1, pp. 143-160, 1972.  
DOI: <https://doi.org/10.1080/00207177208932136>
- [4] Y. Ochi, K. Kanai, "Pole Placement in Optimal Regulator by Continuous Pole-Shifting," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 18, No.6, pp. 1253~1258, 1995.  
DOI: <https://doi.org/10.2514/3.21538>
- [5] T. Fujinaka and S. Omatu, "Pole placement using optimal regulators," *T.IEE japan*, vol. 121-C, no. 1, pp. 240-245, 2001.
- [6] M. Park, S.K. Hong, S.H. Lee, "Design of an LQR Controller Considering Pole's Moving-Range", *Journal of Control, Automation and System Engineering* Vol 11, No. 10, pp. 864-869, 2005.  
DOI: <https://doi.org/10.5302/J.ICROS.2005.11.10.864>
- [7] M. Park, M.S. Park, D. Park, S.K. Hong, S.H. Lee, "LQR Controller Design with Pole-Placement," *Journal of Control, Automation and System Engineering* Vol 13, No 6, pp. 574-580, 2007.  
DOI: <https://doi.org/10.5302/J.ICROS.2007.13.6.574>
- [8] M. Park , "Pole Placement by an LQ Controller,"

*Journal of Control, Automation and System Engineering* Vol 15, No 3, pp. 249-254, 2009.

DOI: <https://doi.org/10.5302/J.ICROS.2009.15.3.249>

- [9] M. Park , "Pole Placement Method to Move a Eual Poles with Jordan Block to Two Real Poles Using LQ Control and Pole's Moving-Range," *Journal of the KAS* Vol 19, No 2, pp. 608-616, 2018.  
DOI: <https://doi.org/10.5762/KAS.2018.19.2.608>
- [10] M. Park , "Pole Placement Method of a Double Poles Using LQ Control and Pole's Moving-Range," *Journal of the KAS* Vol 21, No 1, pp. 20-27, 2020.  
DOI: <https://doi.org/10.5762/KAS.2020.21.1.20>
- [11] M. Park , "Methods of Weighing Matrices Determination of Moving Double Poles with Jordan Block to Real Poles By LQ control," *Journal of the KAS* Vol 21, No 6, pp. 634-639, 2020.  
DOI: <https://doi.org/10.5762/KAS.2020.21.6.634>
- [12] G. Strang, Linear Algebra and its applications, 3rd Ed., Harcourt Brace & Company, 1988, pp.330-337
- [13] C. Chen, Linear System Theory and Deign, Holt-Saunders International Editions, 1984, pp.168-227

박 민 호(Minho Park)

[중신회원]



- 1993년 2월 : 아주대학교 대학원 제어계측공학과 (공학석사)
- 1993년 3월 ~ 1998년 6월 : (현) 미반도체
- 2007년 8월 : 아주대학교 대학원 전자공학과 (공학박사)
- 2008년 3월 ~ 현재 : 충남도립대학교 전기전자공학과 부교수

<관심분야>

최적제어, Robust Control, 공장자동화