

복합재료 적층 타원형 셸의 수치해석

최재진, 박원태*
공주대학교 사회환경공학과

Numerical Analysis of Composite Material laminated Ellipse Shells

Jae-Jin Choi, Weon Tae Park*
Department of Civil and Environmental Engineering, Kongju University

요 약 두가지 이상의 다양한 재료로 이루어진 복합재료는 항공기, 선박, 자동차등에 다양한 분야에 적용되어 왔으나, 최근 국내에 교량, 건물등 건설구조용 재료로 많은 관심을 받고 있다. 일반적으로 비등방성 타원형셸은 셸의 기하학적인 특성과 보강각의 변화에 따라 다양한 거동을 보인다. 따라서 복잡한 지배방정식을 형태를 갖는 비등방성 적층 셸의 경우, 유한 차분법, 유한요소법등의 수치해석기법을 사용하여 해석을 실시한다. 본 연구는 복합적층타원셸의 해석을 위해 유한 요소법에 의한 수치해석을 위해 8절점 타원형 셸요소를 사용하였으며, 전단변형효과를 무시한 이론과 1차 전단변형효과를 고려한 이론에 의한 정식화에 따른 해석결과를 비교 분석하였으며, 본연구의 수치해석 결과는 비등방성 적층 타원형 셸의 휨 거동 분석에 기여할 것으로 보이며, 또한 건설분야의 노후된 교량 및 건축물이 부분 보수등을 위해 복합재료를 이용한 교량바닥판등이 새로운 건설재료로서 자중을 획기적으로 줄일 수 있는 강도, 강성이 우수한 복합소재를 이용한 노후 건설 시설물들이 교체공사에 적극적으로 활용될 것으로 전망된다.

Abstract Composite materials consisting of two or more diverse materials have been used in various applications such as aircraft, ships, and automobiles, but have recently attracted much attention in Korea as materials for constructing structures such as bridges and buildings. In general, anisotropic ellipse shells exhibit a variety of behaviors depending on the geometric properties of the shell and the changes in the reinforcement angle. Therefore, the anisotropic laminated shells are governed by complex governing equations. In this work, we have performed the analysis of ellipse shells using numerical analysis techniques such as finite difference and finite element methods. In particular, this study deals with the numerical analysis of composite material laminated elliptical shells using the finite element method with an eight-node elliptical shell element. The analyzed results of a theoretical formulation that ignores the shear deformation effect and the results from a theory that considers the first shear deformation effect were compared. The results of this study are also expected to contribute to the analysis of the bending behavior of anisotropic laminated ellipse shells. In addition, aging bridge and building components in the construction sector such as bridge floorboards are expected to be actively replaced with new construction materials using composite materials that can drastically reduce their weight. Hence, this study on composite material laminated ellipse shells serves to understand these materials in order to use them efficiently in applications.

Keywords : Degree of Freedom, Anisotropic Laminated Thin Ellipse Shells, Anisotropic Laminated Thick Ellipse Shells, Finite Difference Method, Finite Element Method

*Corresponding Author : Weon-Tae Park(Kongju Univ.)

email: pwtai@kongju.ac.kr

Received June 10, 2021

Accepted October 1, 2021

Revised July 14, 2021

Published October 31, 2021

1. 서론

산업사회가 고도화하면서 구조물의 고층화, 장대화, 대형화로 이어지며 성능, 강도, 기능이 고도화 되고, 고품질 복합신소재의 개발과 최첨단 구조공학기술이 모두 응용되어야 한다. 환경 친화적인 복합신소재를 더욱더 활용하여 자원보존과 환경보호 측면에서 적절하게 이용할 수 있는 고도의 기술을 개발해야만 차세대 건설시장에서 성공을 기대할 수 있다. 국내 사회기반시설의 확충과 건설규모의 대형화 등으로 인한 건설 산업 규모의 증가에 따라 콘크리트용 골재의 수요가 급증하고 있고 이와 함께 최근 천연골재의 고갈 등 골재 수급에 심각한 제약을 받고 있는 상황에서 건설폐기물을 이용한 순환골재의 사용은 최적의 대안으로 평가되고 있다[1].

건설분야의 전통재료로 사용되고 있는 강재나 콘크리트는 경제성과 내구성등이 우수하여 건설재료 중 사용측면에서 가장 큰 비중을 차지하고 있는 재료로서 콘크리트의 인장부를 강재로 보강한 철근콘크리트 및 강합성 콘크리트 등은 건설분야의 혁신적인 성장을 가져왔으며, 반영구적인 구조물의 축조에 적용되어왔다. 그러나 이러한 강재-콘크리트 합성구조물은 여러 유해환경(이산화탄소, 수분등)에 의해 콘크리트가 중성화되고 강재가 부식되는 등 시간이 경과함에 따라서 구조물의 내구성이 크게 저하되고 있으며, 이러한 구조물의 성능저하는 국가 경제에 막대한 손실을 끼치고 있다. 또한 구조물이 대형화되고, 중량과 부식, 경과연수의 증가로 인한 유지보수가 중요한 문제로 대두됨에 따라 이러한 문제를 해결하기 위해 강재-콘크리트 합성구조물의 내구성을 확보할 수 있는 보수, 보강에 대한 연구와 더불어 강재 대체재로 활용할 수 있는 경량신소재 개발에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다[2].

복합소재는 비강성과, 비강도가 기존의 토목, 건축분야의 전통적인 재료인 콘크리트나 강재에 비해 상대적으로 높고, 비부식성, 경량성, 비전기성 등 재료적인 장점과 방향성을 이용하여 우수한 역학적인 성질을 얻을 수 있다. 또한 다양한 형태로 만들 수 있는 성형성을 갖고 있다. 복합재료는 단순히 기존전통재료에 대한 대체 재료로서가 아니라 비등방성 재료의 특이한 물성을 응용한 구조물의 주재료로 사용하기 위하여 이론연구 및 실험자료의 축적이 필요하다. 셸구조의 재료로서는 강재나 콘크리트가 대부분을 차지하고 있으나 최근에는 경제적이고 더 강한 대체 재료로서 복합재료가 연구, 개발되고 있다. 복합재료는 그 자체 중량에 비하여 강성, 강도 및

내구성등이 탁월한 다양한 소재로 구성되어 하나의 구조체를 형성한다[3].

저수탱크나 하수처리 탱크, 농업용사일로 혹은 액체의 대량 저장에 잘쓰이는 셸구조는 그 형상이 좋고 시공이 쉬우며 다른 형식의 구조에 비하여 역학적으로 안정되고 또한 경제적이다.

셸의 역학적 특성은 자연계에서 흔히 볼 수 있는 조개 껍질에서 찾을 수 있다. 조개껍질은 그 두께에 비하여 상당히 큰힘을 견디며 이러한 높은 내하능력은 조개껍질을 구성하는 재료의 강도뿐만 아니라, 그 구성형태에 연유되는 것임을 쉽게 알 수 있다. 특히 타원형 셸은 하중전달성이 좋고 또 축방향 압축력에 의한 방향성이 없는 등의 여러 가지 특성을 가지고 있어서 광범위하게 사용되어왔다.

그러나 경계조건이 단순하지 않은 타원형 셸구조물은 Navier solution, Levy solution과 같은 이중삼각함수를 이용한 급수해법과 같은 해석적인 방법으로는 그 응력을 알아낸다는 것은 극히 어렵다.

따라서 수치해석방법들이 해석에 많이 사용된다. 유한차분법은 경계조건 적용의 한계를 갖고 있으므로, 본 연구에서는 타원형 셸구조에 대하여 실용적인 견지에서 충분히 정확한 해를 얻기 위하여 유한요소법을 적용하려 한다. 또한 셸구조물은 기하학적 특성 때문에 다른 구조물에 비해 복잡한 거동을 나타내며, 복합재료를 사용함으로써 해석상의 어려움이 커지게 되었다[3].

섬유강화 복합재료는 보강섬유의 배치방향, 적층순서, 종류에 따른 역학적 성질을 갖고 있어 현장에서의 다양한 설계요구조건을 충족 할 수 있다.

본 연구에서는 각층의 재료배치가 증립축에 대하여 대칭으로 적층된 경우의 비등방성 타원형 셸인 경우로서 면내력강도와 휨강도만을 고려하여 식을 전개하였다. 거동을 분석하기 위하여 각각 동일한 두께를 갖는 4개의 층으로 구성된 타원형 셸을 기본으로 하여 해석모델을 사용하였다.

본 연구에서는 비등방성 적층 타원형 셸구조물을 모델로 하여 전단변형효과를 무시한 얇은 평면 타원형 셸요소와 1차 전단변형효과를 고려한 두꺼운 평면 타원형 셸요소에 의한 해석결과를 비교 검토하였다.

2. 본론

2.1 기본이론

복합적층 구조의 해석은 크게 세가지로 구분된다. 첫 번째는 섬유 기지를 구분하여 단층을 비균질한 재료로 보고 모델링하는 미시적 관점에 의한 해석으로 주로 미시적 기지균열, 섬유와 기지의 분리 및 섬유의 파단이나 국부좌굴들의 모델링에 사용된다.

두 번째는 단층을 거시적 관점에 의한 해석으로 단층을 균질한 재료로 보고 적층 구조 내부의 국부적인 응력장에 대한 해석을 수행하여 파손을 예측, 평가하는 것으로 복합재료 내부나 표면에 존재하는 균열문제나 단층등의 재료상수차이로 유기되는 층간분리 해석등을 들 수 있다.

세 번째는 구조물의 기계적 거동에 관심을 두는 통합적인 관점의 해석으로 고전적층판이론이 보다 고차의 이론에 의하여 주어진 하중조건에 의한 구조물의 전체적인 거동을 예측하는 것이다. 구조물의 좌굴해석 등이 이 접근방법에 의한 해석 대상으로서 좋은 예이다[4].

2.1.1 셸의 변위벡터와 변형률벡터

전단변형효과를 고려하지 않은 타원형 셸요소와 1차 전단변형효과를 고려한 Reissner-Mindlin 평판이론 근거한 8절점 평면 타원형 셸요소의 전체 좌표계에 대한 중립면에서의 변위와 회전각은 Eq.(1)과 같이 가정할 수 있으며, 복합적층 타원형 셸의 기하학적 형상, 좌표장, 변위장은 Fig. 1과 Fig. 2와 같다.

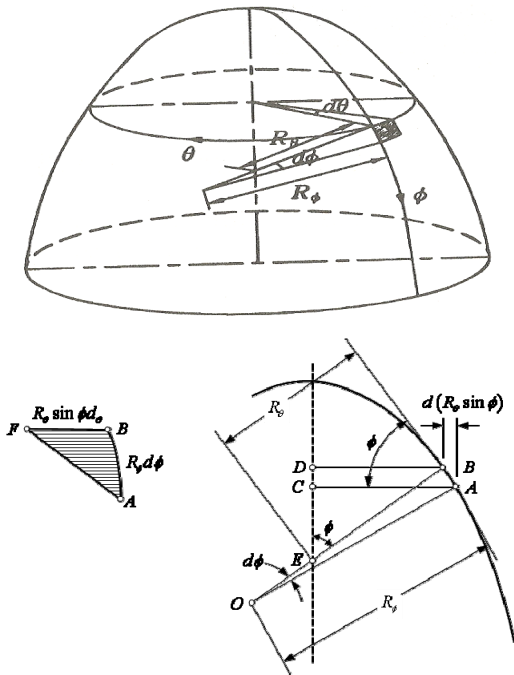


Fig. 1. Coordinate Field of Ellipse Shell[5].

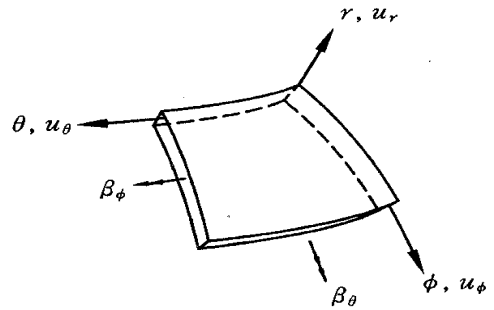


Fig. 2. Coordinate System and Displacement of Ellipse Shell Element[5].

$$u = \begin{Bmatrix} u_\phi \\ u_\theta \\ u_r \end{Bmatrix}, \quad \beta = \begin{Bmatrix} \beta_\phi \\ \beta_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta'_\phi \\ \beta'_\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \beta''_\phi \\ \beta''_\theta \end{Bmatrix} \quad (1)$$

비등방성 복합적층 타원형 셸요소의 경우 그 특성상 화이버 보강각도 변화에 따라 막거동에 해당하는 면내변형률과 휨거동에 해당하는 면의 변형률 중 휨곡률이 조합되어 나타나기 때문에 비등방성 복합적층셸에 대한 전체 변형률 매트릭스는 면내변형률과 휨변형률이 조합된 Eq.(2), Eq.(3)와 전단변형률에 대한 Eq.(4), Eq.(5)으로 나타낼 수 있다. 미소변형이론에 의한 전단변형효과를 고려한 타원형셸의 변형률-변위관계식은 Eq.(2)와 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon_\phi &= \epsilon_\phi^0 + r\chi_\phi, \\ \epsilon_\theta &= \epsilon_\theta^0 + r\chi_\theta, \\ \gamma_{\phi\theta} &= \gamma_{\phi\theta}^0 + r\chi_{\phi\theta} \\ \gamma_{\phi r} &= \gamma_{\phi r}^0, \\ \gamma_{\theta r} &= \gamma_{\theta r}^0 \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, $\epsilon_\phi^0, \epsilon_\theta^0, \gamma_{\phi\theta}^0, \gamma_{\phi r}^0, \gamma_{\theta r}^0$ 는 셸요소의 중립면에서의 수직 및 전단변형률을 의미하고, $\chi_\phi, \chi_\theta, \chi_{\phi\theta}$ 는 휨에 의한 곡률을 의미한다.

셸요소의 중립면에서 발생하는 변형률과 휨에 의해 발생하는 곡률을 변위에 대한 항으로 표현하면 Eq.(3)와 같다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_\phi^0 \\ \epsilon_\theta^0 \\ \gamma_{\phi\theta}^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_\phi} & \frac{1}{R_\phi} & \frac{\partial}{\partial \phi} & 0 \\ \frac{1}{R_\theta} & \frac{1}{R_\theta} & \frac{1}{\tan \phi} & \frac{1}{R_\theta} & \frac{1}{\sin \phi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{R_\theta} & \frac{1}{R_\phi} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{1}{R_\theta} & \frac{1}{\sin \phi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\phi \\ u_\theta \end{Bmatrix} \quad (3)-1$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{\phi\phi}^0 \\ \epsilon_{\theta\theta}^0 \\ \gamma_{\phi\theta}^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_\phi} & \frac{1}{R_\phi} \frac{\partial}{\partial\phi} & 0 \\ \frac{1}{R_\theta} & \frac{1}{R_\theta} \tan\phi & \frac{1}{R_\theta} \frac{1}{\sin\phi} \frac{\partial}{\partial\theta} \\ 0 & -\frac{1}{R_\phi} \tan\phi + \frac{1}{R_\phi} \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{1}{R_\theta} \frac{1}{\sin\phi} \frac{\partial}{\partial\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\phi \\ u_\theta \end{Bmatrix} \quad (3)-2$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{\phi r}^0 \\ \gamma_{\theta r}^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_\phi} \frac{\partial}{\partial\phi} & -\frac{1}{R_\phi} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sin\phi} \frac{1}{R_\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} & -\frac{1}{R_\theta} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\phi \\ u_\theta \\ \beta_\theta \end{Bmatrix} \quad (3)-3$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{\chi}_\phi \\ \bar{\chi}_\theta \\ \bar{\chi}_{\phi\theta} \end{Bmatrix} = r \begin{bmatrix} \frac{1}{R_\phi} \frac{\partial}{\partial\phi} & 0 \\ \frac{1}{R_\theta} \tan\phi & \frac{1}{R_\phi} \frac{1}{\sin\phi} \frac{\partial}{\partial\theta} \\ \frac{1}{R_\theta} \frac{1}{\sin\phi} \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{1}{R_\phi} \tan\phi + \frac{1}{R_\phi} \frac{\partial}{\partial\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta'_\phi \\ \beta'_\theta \end{Bmatrix} \quad (3)-4$$

$$\begin{Bmatrix} \chi_\phi \\ \chi_\theta \\ \chi_{\phi\theta} \end{Bmatrix} = r \begin{bmatrix} \frac{1}{R_\phi} \frac{\partial}{\partial\phi} & 0 \\ \frac{1}{R_\theta} \tan\phi & \frac{1}{R_\phi} \frac{1}{\sin\phi} \frac{\partial}{\partial\theta} \\ \frac{1}{R_\theta} \frac{1}{\sin\phi} \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{1}{R_\phi} \tan\phi + \frac{1}{R_\phi} \frac{\partial}{\partial\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_\phi \\ \beta_\theta \end{Bmatrix} \quad (3)-5$$

여기서, R_ϕ , R_θ 곡률반경을 의미한다.

얇은 타원형 셸이론과 두꺼운 타원형 셸이론에 의한 변형률-곡률 관계식은

$$\epsilon_{KES} = \begin{Bmatrix} \epsilon_\phi^0 \\ \epsilon_\theta^0 \\ \gamma_{\phi\theta}^0 \end{Bmatrix} + r \begin{Bmatrix} \bar{\chi}_\phi \\ \bar{\chi}_\theta \\ \bar{\chi}_{\phi\theta} \end{Bmatrix}_{KES} \quad (5)-1$$

$$\epsilon_{MES} = \begin{Bmatrix} \epsilon_\phi^0 \\ \epsilon_\theta^0 \\ \gamma_{\phi\theta}^0 \\ \gamma_{\phi r}^0 \\ \gamma_{\theta r}^0 \end{Bmatrix} + r \begin{Bmatrix} \chi_\phi \\ \chi_\theta \\ \chi_{\phi\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{MES} \quad (5)-2$$

여기서, ϵ_θ^0 , ϵ_ϕ^0 , $\epsilon_{\theta\phi}^0$ 는 셸의 중면에서의 발생하는 수직 및 전단변형률, $\bar{\chi}_\theta$, $\bar{\chi}_\phi$, $\bar{\chi}_{\theta\phi}$ 와 χ_θ , χ_ϕ , $\chi_{\theta\phi}$ 는 휨에 의해 발생하는 얇은 타원형 셸이론과 두꺼운 타원형 셸

이론에서의 곡률, $\gamma_{\phi r}^0$, $\gamma_{\theta r}^0$ 는 두꺼운 타원형 셸의 전단 변형률을 각각 나타낸다[6,7].

2.1.2 단면력과 변형률 관계

비등방성 적층 타원형 셸의 재료축을 화이버 방향과 화이버의 직각방향으로 1축 및 2축을 정의하면 재료축에 대한 응력-변형률 관계식은 Eq.(6), Eq.(7)과 같이 표시 할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{55} & 0 \\ 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

여기서, Q_{ij} 는 탄성상수 또는 재료좌표계에서의 k 번째의 강도행렬요소들을 나타낸다. Q_{ij} 는 화이버 보강방향이 재료축에 일치하는 경우의 강도식이다.

Q_{ij} 를 공학상수로 나타내면 Eq.(8)와 같다.

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{22} &= \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{33} &= G_{12}, & Q_{55} &= G_{23}, & Q_{66} &= G_{13} \end{aligned} \quad (8)$$

여기서, E_1 및 E_2 는 1방향과 2방향의 탄성계수이고, ν_{12} 및 ν_{21} 는 포아송비이고, G_{12} , G_{23} , G_{13} 는 전단탄성 계수이다.

비등방성 적층 타원형 셸의 구조좌표계에 대한 응력-변형률 관계식은 재료축의 강도를 좌표변환하여 Eq.(9), Eq.(10)과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_\phi \\ \sigma_\theta \\ \tau_{\phi\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_\phi \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_{\phi\theta} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{\phi r} \\ \tau_{\theta r} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{55} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{\theta r} \\ \gamma_{\phi r} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

여기서, $[\bar{Q}_{ij}]$ 는 Eq.(11)과 같으며, 비등방성 타원형 셸의 재료축에서의 재료강도를 구조축으로 좌표변환하여 구한 재료강도 행렬요소를 나타낸다[8-10].

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2\theta \cos^2\theta \\ &\quad + Q_{22} \sin^4\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})\sin^2\theta \cos^2\theta \\
 &\quad + Q_{12}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \\
 \bar{Q}_{22} &= Q_{11}\sin^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta \cos^2\theta \\
 &\quad + Q_{22}\cos^4\theta \\
 \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin\theta \cos^3\theta \\
 &\quad + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin^3\theta \cos\theta \\
 \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin^3\theta \cos\theta \\
 &\quad + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin\theta \cos^3\theta \\
 \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})\sin^2\theta \cos^2\theta \\
 &\quad + Q_{66}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \\
 \bar{Q}_{44} &= Q_{44}\cos^2\theta + Q_{55}\sin^2\theta \\
 \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44})\sin\theta \cos\theta \\
 \bar{Q}_{55} &= Q_{55}\cos^2\theta + Q_{44}\sin^2\theta
 \end{aligned} \tag{11}$$

Fig. 3의 을 얇은 타원형 셸이론과 두꺼운 타원형 셸이론에 의한 타원형 셸의 단면력 Eq.(12), Eq.(13)와 같다.

$$\begin{Bmatrix} N_\phi \\ N_\theta \\ N_{\phi\theta} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z^k}^{z^{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_\phi \\ \sigma_\theta \\ \tau_{\phi\theta} \end{Bmatrix} dz \tag{12}$$

$$\begin{Bmatrix} M_\phi \\ M_\theta \\ M_{\phi\theta} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z^k}^{z^{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_\phi \\ \sigma_\theta \\ \tau_{\phi\theta} \end{Bmatrix} z dz \tag{13}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{\phi r} \\ Q_{\theta r} \end{Bmatrix}_{MSE} = \sum_{k=1}^N \int_{z^k}^{z^{k+1}} \begin{Bmatrix} \tau_{\phi r} \\ \tau_{\theta r} \end{Bmatrix} dz \tag{14}$$

Fig. 3의 타원형 셸의 단면력을 얇은 타원형 셸이론과 두꺼운 타원형 셸이론에 의한 변형률과의 관계는 Eq.(14), Eq.(15)와 같다.

$$\begin{Bmatrix} N_\phi \\ N_\theta \\ N_{\phi\theta} \end{Bmatrix}_{KES} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_\phi \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_{\phi\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & D_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\chi}_\phi \\ \bar{\chi}_\theta \\ \bar{\chi}_{\phi\theta} \end{Bmatrix} \tag{14} - 1$$

$$\begin{Bmatrix} N_\phi \\ N_\theta \\ N_{\phi\theta} \end{Bmatrix}_{MES} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_\phi \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_{\phi\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & D_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_\phi \\ \chi_\theta \\ \chi_{\phi\theta} \end{Bmatrix} \tag{14} - 2$$

$$\begin{Bmatrix} M_\phi \\ M_\theta \\ M_{\phi\theta} \end{Bmatrix}_{KES} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & D_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_\phi \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_{\phi\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\chi}_\phi \\ \bar{\chi}_\theta \\ \bar{\chi}_{\phi\theta} \end{Bmatrix} \tag{14} - 3$$

$$\begin{Bmatrix} M_\phi \\ M_\theta \\ M_{\phi\theta} \end{Bmatrix}_{MSE} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & A_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_\phi \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_{\phi\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_\phi \\ \chi_\theta \\ \chi_{\phi\theta} \end{Bmatrix} \tag{14} - 4$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{\phi r} \\ Q_{\theta r} \end{Bmatrix}_{MSE} = \sum_{k=1}^N \int_{z^k}^{z^{k+1}} \begin{Bmatrix} \tau_{\phi r} \\ \tau_{\theta r} \end{Bmatrix} dz = \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{\phi r} \\ \gamma_{\theta r} \end{Bmatrix}_{MSE} \tag{15}$$

여기서, 비등방성재료에 대한 A_{ij} 는 비등방성재료에 대한 면내력강도, B_{ij} 는 비등방성재료에 대한 휨-면내력강도, D_{ij} 는 비등방성재료에 대한 휨강도, K 는 전단보정계수를 의미하며 각각 Eq.(16), Eq.(17)과 같다[11,12].

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{+h/2} [\bar{Q}_{ij}]_k (1, r, r^2) dr \tag{16}$$

$$(i, j = 1, 2, 6) \tag{16}$$

$$A_{ij} = K \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (r_k - r_{k-1}) \tag{17}$$

$$(i, j = 4, 5) \tag{17}$$

등방성 재료에 대한 D_{ij} 는 Eq.(18)와 같다.

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{E^3}{12(1-\nu^2)} & \frac{E^3}{12(1-\nu^2)}\nu & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E^3}{12(1-\nu^2)}\nu & \frac{E^3}{12(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E^3}{12(1-\nu^2)}\frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)\alpha} \end{bmatrix} \tag{18}$$

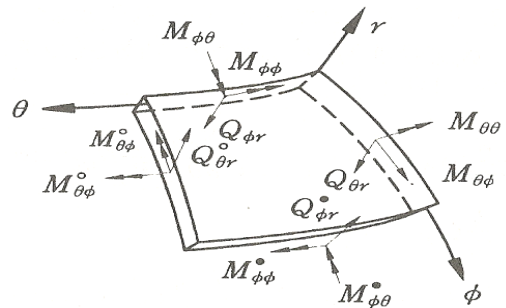


Fig. 3. Out of Plane Forces on Deformed Ellipse Shell Element.

2.1.3 요소내의 임의점의 변위와 절점변위관계

곡선좌표계로 이루어진 곡선형식은 사각형 형식과 비교할 때 유사한 거동을 가지나 사각형 형식보다 더 일반적인 경우라고 볼 수 있다. 본 연구에서는 자연좌표계 (ξ, η) 를 사용하여 곡선좌표계 (r, θ, ϕ) 와 요소변위를 같

은 등매개변수(H_i)로 나타낼 수 있는 8절점 “등매개변수 요소”를 사용하였으며, 타원형 셸요소내의 임의 점 (r, θ, ϕ) 에서의 변위는 형상함수를 이용하여 요소절점의 변위로 나타내면 Eq.(19)와 같다.

$$\begin{aligned}
 u_r &= \sum_{i=1}^8 H_i u_r^i, \\
 u_\phi &= \sum_{i=1}^8 H_i u_\phi^i, \\
 u_\theta &= \sum_{i=1}^8 H_i u_\theta^i, \\
 \beta_\phi &= \sum_{i=1}^8 H_i \beta_\phi^i, \\
 \beta_\theta &= \sum_{i=1}^8 H_i \beta_\theta^i
 \end{aligned} \tag{19}$$

타원형 셸요소내의 임의 점 (r, θ, ϕ) 에서의 얇은 타원형 셸이론과 두꺼운 타원형 셸이론에 의한 변위를 매트릭스로 표현하면 Eq.(20)과 같다.

$$\delta_{KSE} = \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\phi \\ u_\theta \\ \beta'_\phi \\ \beta'_\theta \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 H_i(\xi, \eta) \delta_{CSK}^i \tag{20} -1$$

$$\delta_{MSE} = \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\phi \\ \beta_\phi \\ \beta_\theta \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 H_i(\xi, \eta) \delta_{MSE}^i \tag{20} -2$$

요소내의 각 sampling point 에서 형상함수의 자연좌표계에 대한 편도함수는 식(21)와 같다.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial \xi}(\xi_p, \eta_p), \dots, \frac{\partial H_8}{\partial \xi}(\xi_p, \eta_p) \\ \frac{\partial H_1}{\partial \eta}(\xi_p, \eta_p), \dots, \frac{\partial H_8}{\partial \eta}(\xi_p, \eta_p) \end{Bmatrix} \tag{21}$$

2.1.4 등매개변수

본 연구에서는 Fig. 4의 자연좌표계 (ξ, η) 를 사용하여 곡선좌표계 (ϕ, θ) 와 요소변위를 같은 등매개변수(H_i)로 나타낼 수 있는 8절점 “등매개변수 요소”를 사용하였다.

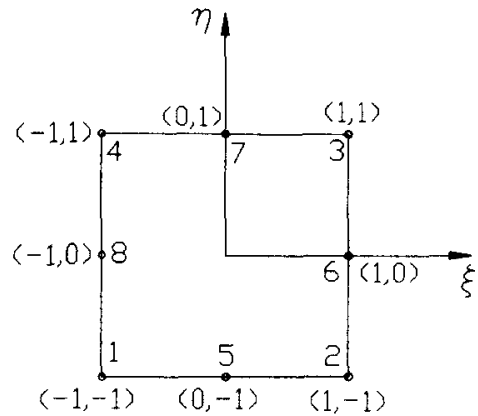


Fig. 4. Two-dimensional Isoparametric Element.

요소내의 임의점 자연좌표계 (ξ, η) 에서의 좌표값을 요소의 절점에의 좌표값으로 나타내면 Eq.(22)와 같다.

$$\begin{Bmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 H_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{Bmatrix}_i \tag{22}$$

2.1.5 변형률 매트릭스

전단변형효과를 무시한 얇은 타원형 셸이론과 전단변형효과를 고려한 두꺼운 타원형 셸이론에 의한 비등방성 타원형 셸의 요소내의 변형률과 절점변위관계는 Eq.(23)과 같다.

$$\epsilon_{KES} = [B_K^1, \dots, B_K^8] \begin{Bmatrix} u_r(\xi, \eta) \\ u_\phi(\xi, \eta) \\ u_\theta(\xi, \eta) \\ \beta'_\phi(\xi, \eta) \\ \beta'_\theta(\xi, \eta) \end{Bmatrix} \tag{23} -1$$

$$= \sum_{i=1}^8 B_K^i \delta_{KES}^i$$

$$\epsilon_{MES} = [B_M^1, \dots, B_M^8] \begin{Bmatrix} u_r(\xi, \eta) \\ u_\phi(\xi, \eta) \\ u_\theta(\xi, \eta) \\ \beta_\phi(\xi, \eta) \\ \beta_\theta(\xi, \eta) \end{Bmatrix} \tag{23} -2$$

$$= \sum_{i=1}^8 B_M^i \delta_{MES}^i$$

여기서,

$$B_{KES} = \begin{bmatrix} \frac{N_i}{R_\phi} & \frac{1}{R_\phi} \frac{\partial N_i}{\partial \phi} & 0 & r N_i & 0 \\ \frac{N_i}{R_\theta} & \frac{N_i}{R_\theta} \frac{1}{\tan \phi} & \frac{N_i}{R_\theta} \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial N_i}{\partial \theta} & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_\theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial N_i}{\partial \theta} & -\frac{1}{R_\phi} \frac{\partial N_i}{\partial \phi} & -\frac{1}{R_\phi} \frac{\partial N_i}{\partial \phi} & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial \phi} & -\frac{N_i}{R_\phi} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sin \phi} \frac{1}{R_\theta} \frac{\partial N_i}{\partial \theta} & -\frac{N_i}{R_\theta} & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{cases} u_r \\ u_\phi \\ u_\theta \\ \beta' \\ \beta \end{cases} \quad (24)-1$$

$$B_{MES} = \begin{bmatrix} \frac{N_i}{R_\phi} & \frac{1}{R_\phi} \frac{\partial N_i}{\partial \phi} & 0 & r N_i & 0 \\ \frac{N_i}{R_\theta} & \frac{N_i}{R_\theta} \frac{1}{\tan \phi} & \frac{N_i}{R_\theta} \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial N_i}{\partial \theta} & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_\theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial N_i}{\partial \theta} & -\frac{1}{R_\phi} \frac{\partial N_i}{\partial \phi} & -\frac{1}{R_\phi} \frac{\partial N_i}{\partial \phi} & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial \phi} & -\frac{N_i}{R_\phi} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sin \phi} \frac{1}{R_\theta} \frac{\partial N_i}{\partial \theta} & -\frac{N_i}{R_\theta} & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{cases} u_r \\ u_\phi \\ u_\theta \\ \beta' \\ \beta \end{cases} \quad (24)-2$$

변형률 매트릭스 B^i 에 있는 등대개변수 H_i 는 자연 좌표계 (ξ, η) 로 정의되어 있기 때문에 곡선좌표계 (θ, ϕ) 편미분하기 위해서 좌표변환을 해야 한다. 등대개변수의 곡선좌표계 (θ, ϕ) 에 대한 편도함수는 Jacobian 매트릭스를 사용하여 자연좌표계에 대한 편도함수로 Eq.(25)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial \phi} \\ \frac{\partial H_i}{\partial \theta} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial H_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

Eq.(25)에서 $[J]^{-1}$ 은 Eq.(26)과 같다.

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} & -\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial \theta}{\partial \xi} & \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (26)$$

2.1.6 전체포텐셜에너지

얇은 타원형 셸이론과 두꺼운 타원형 셸이론에 의한 비등방성 적층 타원형 셸의 전체포텐셜에너지는 Eq.(27)으로 나타낼 수 있다[13,14].

$$\Pi_{KSE} = \frac{1}{2} \int_A [M_\phi \bar{\chi}_\phi + M_\theta \bar{\chi}_\theta + M_{\phi\theta} \bar{\chi}_{\phi\theta}] dA \quad (27)-1$$

$$\begin{aligned} \Pi_{MSE} = & \frac{1}{2} \int_A [M_\phi \chi_\phi + M_\theta \chi_\theta + M_{\phi\theta} \chi_{\phi\theta} \\ & + Q_{r\phi} \chi_{r\phi} + Q_{r\theta} \chi_{r\theta}] dA - \int_A q w dA \end{aligned} \quad (27)-2$$

2.1.7 요소강도 매트릭스

본 연구에서의 비등방성 적층 타원형 셸요소 강도 매트릭스는 전체 포텐셜 에너지의 정류조건, Eq.(28)으로부터 구할 수 있다. 즉.

$$\frac{\partial \pi}{\partial \delta} = \frac{\partial \pi_e}{\partial \delta_e} = 0 \quad (28)$$

결국 전단변형효과를 무시한 타원형 셸이론과 1차 전단변형효과를 고려한 타원형 셸이론에 의한 비등방성 적층 타원형 셸요소의 자연좌표계 (ξ, η) 에 대한 강도 매트릭스는 Eq.(29)와 같다.

$$K_{KSE} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} B_{KES}^T D_{KES} B_{KES} \|J\| d\xi d\eta \quad (29)-1$$

$$K_{MKS} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} B_{MSE}^T D_{MES} B_{MES} \|J\| d\xi d\eta \quad (29)-2$$

Eq.(29)에서 $B_{KSE}^T D_{KSE} B_{KSE} \|J\| d\xi d\eta$,

$B_{MSE}^T D_{MES} B_{MES} \|J\| d\xi d\eta$ 는 대단히 복잡하기 때문에 직접 적분하지 않고 수치적분을 하게 되며 일반적으로 Eq.(30)과 같은 3-point rule(3점법칙) 사용한 Gauss-Legendre의 구적법을 사용하게 된다.

$$\begin{aligned} I_{3,3} &= \int_{+1}^{-1} \int_{+1}^{-1} \phi(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{+1}^{-1} \left\{ \int_{+1}^{-1} \phi(\xi, \eta) d\xi \right\} d\eta \\ &= \int_{+1}^{-1} [w_1 \phi(\xi_1, \eta) + w_2 \phi(\xi_2, \eta) + w_3 \phi(\xi_3, \eta)] d\eta \\ &= w_1 [w_1 \phi(\xi_1, \eta_1) + w_2 \phi(\xi_1, \eta_2) + w_3 \phi(\xi_1, \eta_3)] \\ &\quad + w_2 [w_1 \phi(\xi_2, \eta_1) + w_2 \phi(\xi_2, \eta_2) + w_3 \phi(\xi_2, \eta_3)] \\ &\quad + w_3 [w_1 \phi(\xi_3, \eta_1) + w_2 \phi(\xi_3, \eta_2) + w_3 \phi(\xi_3, \eta_3)] \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 w_i w_j \phi(\xi_i, \eta_j) \end{aligned} \quad (30)$$

여기서, ξ_i, η_j 는 i, j 번째 Gauss point의 ξ, η 의 좌표이고, w_i 는 가중치이다.

따라서 요소강도 매트릭스는 Eq.(31)과 같이 수치적분으로 수행된다.

$$(K_{KES})_{ij}^e = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 (B_{KES})_i^T(\xi_l, \eta_m) (D_{KES})_{ij} (B_{KES})_j(\xi_l, \eta_m) w_l w_m \quad (31)-1$$

$$(K_{MES})_{ij}^e = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 (B_{MES})_i^T(\xi_l, \eta_m) (D_{MES})_{ij} (B_{MES})_j(\xi_l, \eta_m) w_l w_m \quad (32)-2$$

2-point rule(2점법칙)과 3-point rule(3점법칙)에 대한 “Gauss point”와 “가중치(Weight)”는 Fig. 5 와 Table 1과 같다.

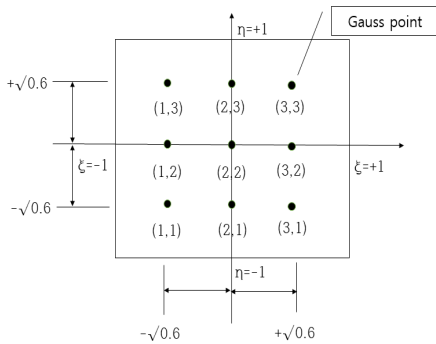


Fig. 5. Gauss Point

Table 1. Gauss Point(2-Point Rule, 3-Point Rule)

	2 point	3 point
Gauss point	± 0.5177	± 0.5177
Weight	1.0	0.55 0.88

2.1.8 응력 매트릭스

전단변형효과를 무시한 타원형 셸이론과 1차 전단변형효과를 고려한 타원형 셸이론에 의한 비등방성 적층 타원형 셸요소의 응력매트릭스는 Eq.(33)과 같다.

$$\sigma_{KES} = D_{KES} B_{KES} \delta_{KES}^e = S \delta_{KES}^e \quad (33)-1$$

$$\sigma_{MES} = D_{MES} B_{MES} \delta_{MES}^e = S \delta_{MES}^e \quad (33)-2$$

2.2 해석 예 및 결과분석

본 연구의 해석방법에 의한 수치해석을 위해 타원형 셸 구조물을 Fig. 6와 같이 모델링을 하여, Table 2 에 서와 같은 재료의 물성치를 사용하여 해석하였다.

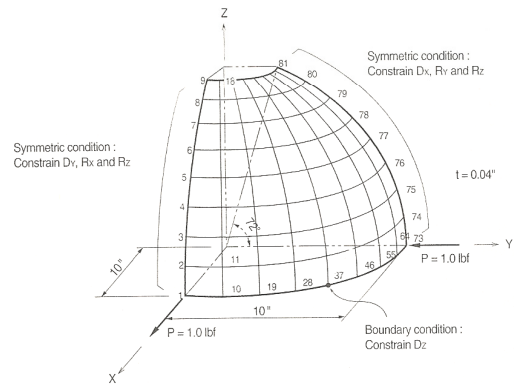


Fig. 6. Analysis Model.

Table 2. Material properties

	engineering constants
anisotropic materials	$R_\phi = 10, R_\theta = 100, t = 2.5,$
	$E_1 = 20.83 \times 10^6, E_2 = 10.94 \times 10^6$
	$G_{13} = 3.71 \times 10^6, G_{12} = 6.10 \times 10^6$
	$G_{23} = 6.9 \times 10^6, \nu_{12} = 0.44, \nu_{21} = 0.23$

Table 3은 전단변형 효과를 무시한 얇은 타원형 셸 이론과 1차 전단변형 효과를 고려한 타원형 셸 이론에 의한 셸의 폭-두께비에 따른 최대수직변위의 해석결과를 나타내었다. 폭-두께비가 0.02이하에서는 1.6%이상의 차이를 보이고 있다. 따라서 폭-두께비가 0.02이하의 타원형 셸의 해석에서는 1차전단변형효과를 고려한 셸이론을 적용하는 것이 보다 정확한 해석결과를 기대할 수 있다.

Table 3. Effect of Side to Thickness Ratio on The Maximum Displacement of Anisotropic Laminated Elliptical Shells

side to thickness ratio (t/L)	Thick Shell theory	Thin shell theory	difference (%)
0.001	28188.299631	19148.0761987	32.07
0.01	28.946875	27.8082305	3.93
0.02	3.626163	3.568099	1.60
0.04	0.455949	0.453766	0.48
0.05	0.234235	0.233504	0.31
0.07	0.085947	0.085812	0.16
0.08	0.057769	0.057701	0.12
0.10	0.029765	0.029745	0.07
0.2	0.004268	0.004266	0.04

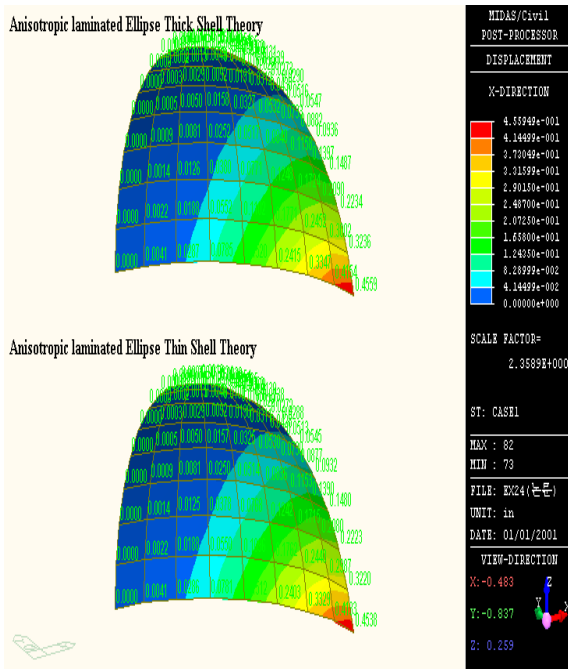


Fig. 7. Vertical displacement for anisotropic laminated ellipse shells(u_r)

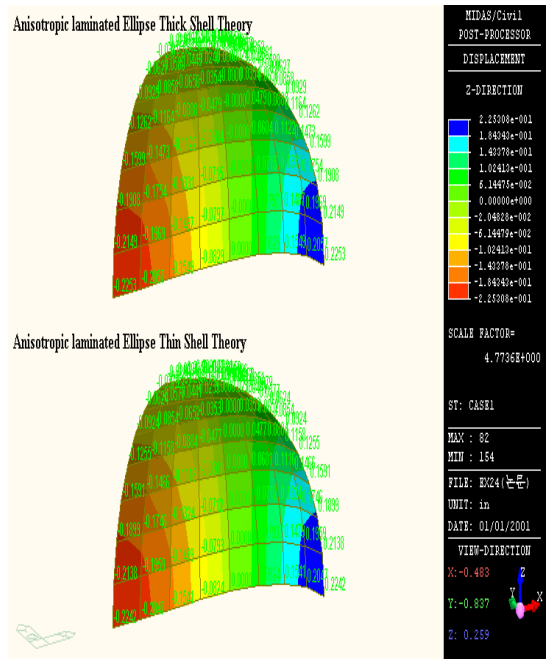


Fig. 9. Vertical displacement for anisotropic laminated ellipse shells(u_θ)

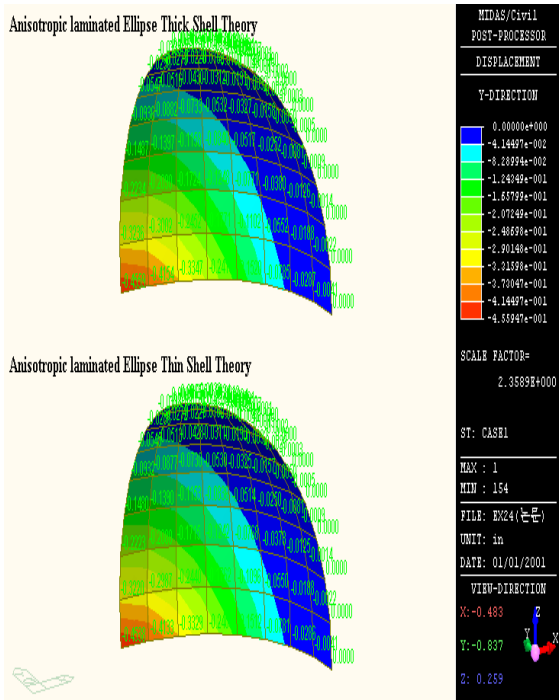


Fig. 8. Vertical displacement for anisotropic laminated ellipse shells(u_ϕ)

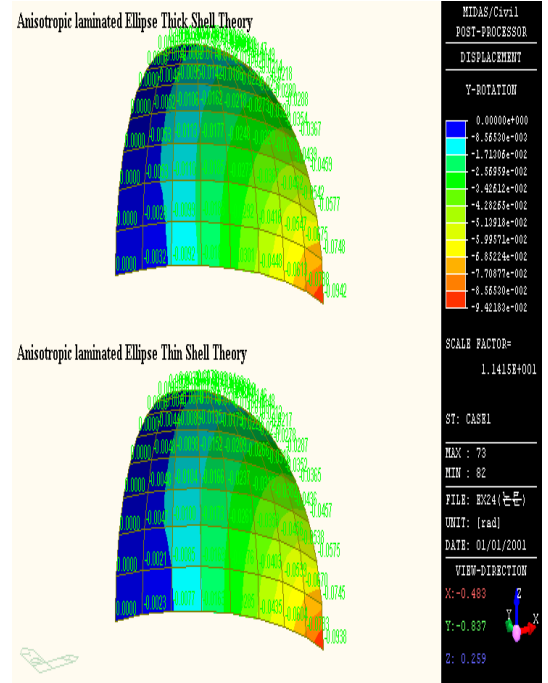


Fig. 10. Rotational displacement for anisotropic laminated ellipse shells(β_ϕ)

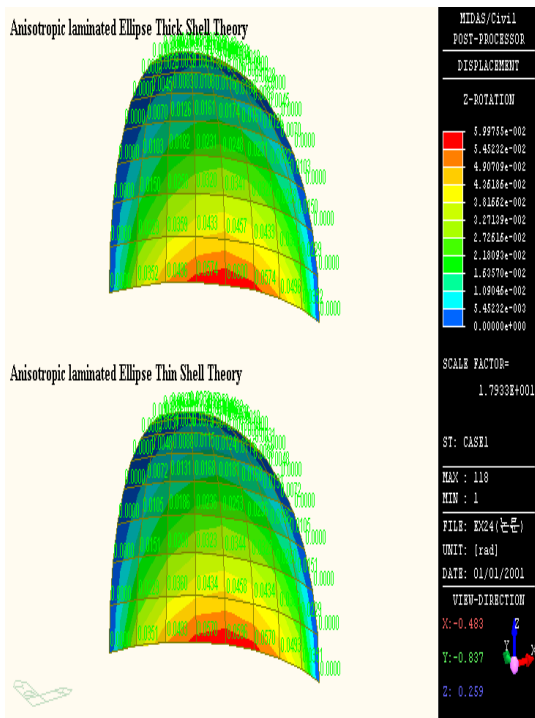


Fig. 11. Rotational displacement for anisotropic laminated ellipse shells(β_θ)

본 연구는 Fig. 7에서 Fig. 11까지와 타원형 셸의 수직변위와 각변위의 해석결과이다. Fig. 7는 비등방성 적층 타원형 셸의 수직변위(u_r)로서 해석결과 최대변위에서 전단변형효과를 무시한 이론(0.4538)과 1차 전단변형을 고려한 타원형 셸 이론(0.4559)에 의한 해석결과에서 약 0.48%차이를 보이며, Fig. 8은 비등방성 적층 타원형 셸의 수직변위(u_θ)는 전단변형효과를 무시한 타원형 셸 이론(0.3427)과 1차 전단변형 효과를 고려한 타원형 셸 이론(0.3442)에 의한 해석결과가 최대변위에서 약 0.44% 차이를 보였다.

Fig. 9은 비등방성 적층 타원형 셸의 수직변위(u_θ)로 전단변형효과를 무시한 타원형 셸 이론(0.2253)과 1차 전단변형을 고려한 두꺼운 타원형 셸 이론(0.2242)에 의한 해석결과가 약 0.49% 차이를 보였으며, 비등방성 적층 타원형 셸의 각변위(β_θ, β_ϕ)는 Fig. 10에서 Fig. 11까지와 같이 전단변형효과를 무시한 타원형 셸 이론과 1차 전단변형을 고려한 타원형 셸 이론에 의한 해석결과에서는 최대회전변위가 각각 약 0.44% ~ 0.49%차이를 보였다.

3. 결론

본 연구는 비등방성 재료로 구성된 적층 타원형 셸의 거동을 분석하였다. 비등방성 적층 타원형 셸에서 전단 변형효과를 무시한 이론과 1차 전단변형효과를 고려한 셸이론에 의한 셸의 폭-두께비에 따른 해석결과에서 폭-두께비가 0.02이하에서 최대수직변위가 약 1.6%이상의 차이를 보이고 있어, 폭-두께비가 0.02이하의 셸의 해석에서는 1차 전단변형효과를 셸이론을 적용하는 것보다 정확한 해석결과를 얻을 수 있다.

다양한 재료의 비등방성으로 구성된 타원형 셸의 경우 1차전단변형효과를 고려한 본 논문에서 제시한 셸이론을 적용하는 것이 더 정확한 해를 기대할 수 있으며, 따라서 비등방성 적층 타원형 셸구조물의 해석 및 설계에 본 연구에서의 해석기법이 적용될 수 있을 것으로 본다. 건설 분야의 노후된 교량 및 건축물이 부분 보수등을 위해 복합재료를 이용한 교량바닥판등에 새로운 건설재료로서 자중을 획기적으로 줄일 수 있는 강도, 강성이 우수한 복합소재를 이용한 노후 건설 시설물들의 교체공사에 적극적으로 활용될 것으로 전망된다.

References

- [1] W. S. Kim, Y. K. Kwak, "A Case Study of the Performance Evaluation for Recycled Aggregate Concrete Strengthened with Advance Composite Fibers," *The Magazine of the Korean Society for Advanced Composite Structures*, Vol. 6, No. 2, pp. 31 ~ pp. 39, Jun. 2015.
- [2] S. J. Yoon, "Development and Application of Composite Material," *The Magazine of the Korean Society for Advanced Composite Structures*, vol. 1, No 1, pp. 31 ~ pp. 37, Mar. 2010.
- [3] G. S. Lee, W. T. Park, "Technology of Advanced Composite in Construction," *The Magazine of the Korean Society for Advanced Composite Structures*, vol. 1, No. 1, pp. 56 ~ pp. 61, Mar. 2010.
- [4] C. S. Hong, "Mechanical Properties of Composite Materials Laminated Structure," *Journal of the Korean Society of Mechanical Engineering*, Vol. 32, No. 1, pp. 4 ~ pp. 17, Jan. 1992.
- [5] S. Y. Lee, H. G. Park, S. Y. Chang, "Finite Difference Analysis of Anisotropic General Shells with Free Boundary Conditions," *Journal of the Korean Society of Civil Engineering A*, Vol. 22, No. 4-A, pp. 939 ~ pp. 950, jul. 2002.
- [6] J. N. Reddy, "Mechanics of Laminated Composite

Plates and shells," CRC press, USA, pp. 449-485, 2004.

- [7] W. Flugge, "Stresses in Shells," Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, USA, pp. 317 ~ pp. 424, 1973.
- [8] W. T. Park, S. C. Han, W. Y. Jung, W. H. Lee, "Dynamic instability analysis for S-FGM plates embedded in Pasternak elastic medium using the modified couple stress theory," *Steel and Composite Structure*, vol. 22, No 6, pp. 1239 ~ pp. 1259, Nov. 2016.
DOI:<http://dx.doi.org/10.12989/scs.2016.22.6.1239>
- [9] W. T. Park, "Structural Stability and Dynamics of FGM Plates Using an Improved 8-ANS Finite Element," *Advances in Materials Science and Engineering*, vol. 2016, Article ID 2821473, pp. 1 ~ pp. 9, Jun. 2016.
DOI:<http://dx.doi.org/10.1155/2016/2821473>
- [10] W. Y. Jung, S. C. Han, W. H. Lee, W. T. Park, "Postbuckling analysis of laminated composite shells under shear loads," *Techno-Press*, vol. 21, no. 2, pp. 373 ~ pp. 394, Jun. 2016.
DOI:<http://dx.doi.org/10.12989/scs.2016.21.2.373>
- [11] M. J. Robert, "Mechanics of Composite Materials", McGraw-Hill, USA, pp. 15-40, 1975.
- [12] I. H. MARSHALL, "Composite Structures," Applied Science Publishers LTD, UK, pp. 531 ~ pp. 544, 1981.
- [13] E. Hinton, D. R. J. Owen, "Finite Element Programming," Academic Press, UK, pp. 123 ~ pp. 141, 1977.
- [14] O. C. Zienkiewicz, "The Finite Element Method," McGraw-Hill, UK, pp. 135 ~ pp. 210, 1975.

박 원 태(Weon-Tae Park)

[정회원]



- 1983년 2월 : 부산대학교 대학원 토목공학과 (공학석사)
- 1993년 3월 : 서울시립대학교 대학원 토목공학과 (공학박사)
- 2005년 3월 ~ 현재 : 공주대학교 사회환경공학과 교수

<관심분야>

토목구조, 복합재료

최 재 진(Jae-Jin Choi)

[정회원]



- 1984년 2월 : 한양대학교 대학원 토목공학과 (공학석사)
- 1987년 8월 : 한양대학교 대학원 토목공학과 (공학박사)
- 2005년 3월 ~ 현재 : 공주대학교 사회환경공학과 교수

<관심분야>

토목구조, 토목재료