

다중율 샘플링과 가상질량을 포함한 햅틱 시스템의 안정성 분석

이경노

국립 한국교통대학교 기계자동차항공공학부

Stability Analysis for a Haptic System with Multirate Sampling and a Virtual Mass

Kyungno Lee

School of Mechanical, Automotive and Aeronautical Engineering, Korea National University of Transportation

요약 현실감이 높은 가상강체를 구현하려면 가상스프링의 강성을 최대한 크게 해야 한다. 그러나 가상스프링의 강성을 크게 하면 시스템이 불안정해질 수 있다. 따라서 시스템의 안정성을 유지하면서 가상스프링의 강성을 증가시킬 수 있는 방법이 연구 중이며, 최근 다중율 샘플링을 이용하는 방법이 제안되었다. 본 연구는 가상스프링의 안정성 영역을 크게 할 수 있도록 다중율 샘플링이 포함된 시스템에서 가상질량이 가상스프링의 안정성 영역에 미치는 영향을 분석한다. 다중율 샘플링이 포함된 시스템에서 가상질량의 크기가 작은 경우에는 안정적인 가상스프링의 영역을 영차홀드와 단일 샘플링이 포함된 시스템의 경우보다 수십 배 더 크게 할 수 있다. 또한 적절한 가상질량의 크기와 N 값을 선정하면, 안정적인 가상스프링의 영역은 가상질량이 없는 경우보다 약 3배 ~ 200배 정도 더 커질 수 있다. 본 연구에서는 가상스프링의 안정성 영역을 보다 크게 만들 수 있도록 가상질량과 N 값 선정 방향을 제안하며, 이는 보다 현실감높고 안정성이 보장된 가상강체 설계에 도움이 될 것으로 기대된다.

Abstract To implement a virtual rigid body with high fidelity, the stiffness of a virtual spring is designed to be as large as possible. However, this may make a haptic system unstable, so methods to increase the stiffness of a virtual spring have been studied to maintain the stability. A method using multirate sampling was recently presented. In this study, the effect of a virtual mass on the stability region of a virtual spring was analyzed to enhance its stability in a haptic system with multirate sampling. If the virtual mass is small, the stability region of the virtual spring can be made many times larger than that of a system with zero-order hold and single sampling. In addition, if the values of a virtual mass and N are chosen appropriately, the stability region of the virtual spring can be made 3 to 200 times larger than that without a virtual mass. We propose a design guideline to determine the values of the virtual mass and N to enhance the stability of the virtual spring, which could be helpful in designing virtual bodies with stable interaction and high fidelity.

Keywords : Haptic control, Haptic system, Multirate sampling, Stability, Virtual mass

이 논문은 2021학년도 한국교통대학교의 해외파견 연구교수지원금을 받아 수행한 연구임.

*Corresponding Author : Kyungno Lee(Korea National University of Transportation)

email: klee@ut.ac.kr

Received August 29, 2022

Revised September 29, 2022

Accepted October 7, 2022

Published October 31, 2022

1. 서론

햅틱 기술에서 중요한 것 중 하나는 햅틱 시스템의 안정성을 유지하면서, 가상스프링의 강성을 최대한 크게 증가시켜 가상물체의 현실감을 높이는 것이다. 이를 위해 다양한 연구들이 진행 중이다. 수동성 (passivity)의 측면에서 햅틱 장치의 댐퍼, 샘플링 주기, 가상강체 스프링상수 사이의 관계를 유도하여 안정적인 가상스프링의 영역을 분석하였다[1]. 루드-후르비쯔 (Routh-Hurwitz) 방법을 이용하여 샘플링 주기, 햅틱 장치의 댐퍼, 가상강체의 스프링상수와 가상댐퍼 사이의 관계를 분석하여 가상댐퍼의 역할을 명확히 하였다[2]. 샘플링속도, 양자화, 계산지연시간, 쿨롱 댐퍼 등 안정성과 관련된 구성요소를 보다 폭넓게 고려하고, 이들과 가상강체의 안정적인 상호 관계를 분석하였다[3]. 그리고 가상스프링, 가상댐퍼, 가상질량의 세 가지 햅틱 조합이 시스템의 안정성에 미치는 영향을 해석하였다[4]. 그렇지만 이런 연구들은 단일 샘플링으로 구성된 햅틱 시스템에 대한 것이었다. 최근에는 단일 샘플링 구조의 햅틱 시스템보다 안정성을 더욱 향상시키기 위해, 종래의 단일 샘플링 구조에서 벗어나 고주파 영차홀드와 외삽법이 포함된 다중율 샘플링을 이용한 제어가 제시되었으며, 가상스프링의 안정성 영역에 대해 연구가 진행되었다[5,6]. 그러나 다중율 샘플링을 포함한 제어기에서 가상질량과 가상스프링 사이의 안정적인 상호작용에 대한 연구는 아직 미흡하다.

본 연구에서는 다중율 샘플링이 포함된 햅틱 시스템에서 가상질량이 가상스프링의 안정성 영역에 어떤 영향을 미치는지를 분석하고자 한다. 이를 통해 보다 안정적이고 현실감높은 가상강체 모델 구현 방법을 제시하고자 한다.

2. 다중율 샘플링과 가상질량이 포함된 햅틱 시스템

다중율 샘플링이 포함된 햅틱 시스템은 Fig. 1과 같이 질량 (M_d)와 댐퍼 (B_d)를 이용한, 동역학 2차로 모델화된 햅틱장치 모델, 햅틱장치의 운동정보를 측정하기 위한 샘플링 주기 (T), 가상모델, 외삽법을 이용하는 고주파 샘플링주기 (T/N)의 영차홀드로 구성된다.

Fig. 1은 가상스프링 모델만으로 구성되었던 종래 연구 모델[5]을 수정한 것으로, 가상질량이 햅틱 시스템의

안정성에 미치는 영향을 살펴보기 위해 가상질량 (M_w)과 가상스프링 (K_w)모델을 포함하고 있다. 외삽법에 의한 반력 계산식은 Eq. (1)과 같으며, 여기서 F_k 는 샘플링 주기 T_k 에서의 입력정보와 가상모델의 동역학적 관계에 의해서 계산된 힘이고, $F_{k+\frac{n}{N}}$ 은 샘플링 T_k 와 T_{k+1} 사이의 시간을 N 개로 분할했을 때 n 번째에 해당하는 반력값을 의미한다[5].

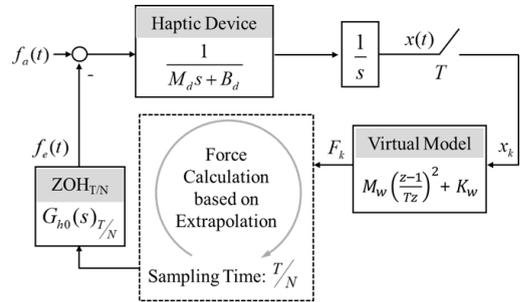


Fig. 1. Haptic system model with multirate sampling and a virtual mass-spring model[5]

$$F_{k+\frac{n}{N}} = \left(\frac{F_k - F_{k-1}}{T} \right) \frac{n}{N} T + F_k = (F_k - F_{k-1}) \frac{n}{N} + F_k$$

where $n = 0, \dots, N-1$ (1)[5]

Fig. 1에서 제시된 햅틱 시스템 모델을 토대로 Fig. 2와 같이 시뮬레이션 모델을 구성한다. 여기서 FOH_T 는 샘플링 주기가 T 인 일차홀드 모델을 의미한다. 종래연구[5]에서 외삽법을 이용하는 고주파 영차홀드 모델을 Fig. 2의 시뮬레이션 모델을 통해 구현할 수 있음을 검증하였다. Fig. 2는 종래연구 모델[5]에서 가상질량을 추가하여, 본 연구에 적합하도록 수정한 것이며, 이를 토대로 시뮬레이션 환경이 구현된다.

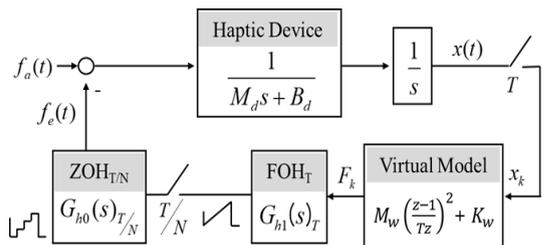


Fig. 2. Simulation for block diagram of haptic system with multirate sampling and a virtual mass-spring model[5]

3. 햅틱 시스템의 안정성영역 분석

구현된 시뮬레이션 환경을 이용하여 가상질량이 다중을 샘플링이 포함된 햅틱 시스템의 안정성에 미치는 영향을 살펴본다.

시뮬레이션 환경에서 햅틱장치의 질량 (M_d)는 0.5 kg, 햅틱장치의 댐퍼 (B_d)는 1.0 Ns/m로 가정한다. 샘플링 주기 (T)는 사람이 시각정보를 연속적인 동작으로 인지할 수 있는 최소 주기인 40 ms부터 시작해서 10 ms, 2 ms, 1 ms의 총 4개로 설정하고, 가상질량 (M_w)은 0 ~ 0.1 kg 범위에서는 0.01 kg씩 증가시키고, 0.1 kg 이상에서는 시스템이 불안정해질 때까지 0.1 kg 단위로 증가시킨다. 그리고 N 값은 1, 2, 4, 10, 20, 40, 총 6개의 크기로 가정한다.

다양한 샘플링 주기 (T), N 값에 대해 가상질량의 크기를 증가시키면서, 시스템이 불안정해질 때까지 가상스프링 최대값을 분석하여 Fig. 3에 나타내었다. Fig. 3을 살펴보면 샘플링 주기 (T)의 크기 변화에도 불구하고 몇 가지 공통적인 특징이 나타난다.

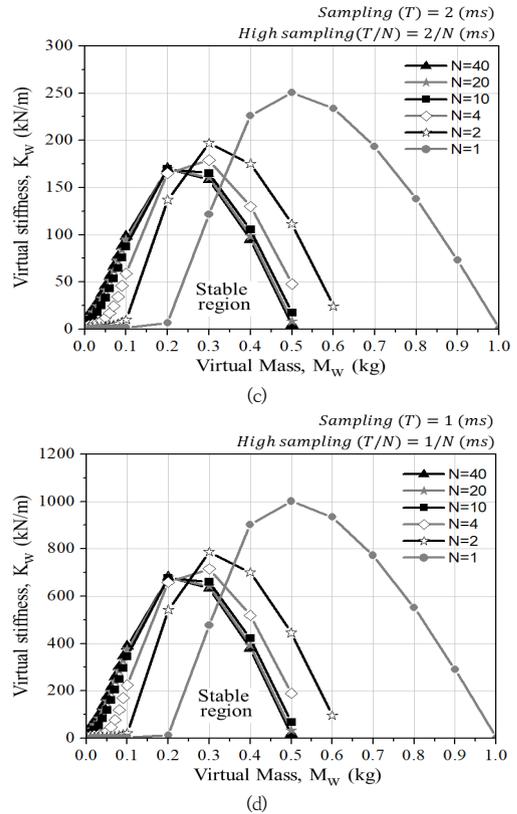
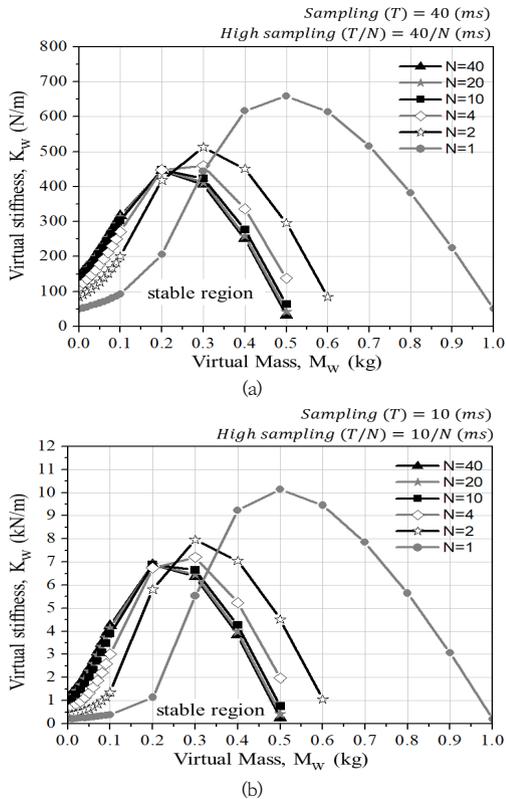


Fig. 3. Stable region of a virtual stiffness according to a virtual mass, the sampling time and the ratio N
 (a) $T=40$ ms (b) $T=10$ ms (c) $T=2$ ms (d) $T=1$ ms

첫째, 안정적인 가상스프링의 영역 크기는 샘플링 주기 (T)가 작아질수록 커진다. 둘째, 가상질량이 커짐에 따라 안정적인 가상스프링의 최대값은 점차 커지다가 다시 작아지는 포물선 형태의 경향을 보인다. 시스템 안정성을 확보하기 위해 허용되는 가상질량의 범위가 존재한다. 셋째, N 값이 1일 때 시스템의 안정성이 보장될 수 있는 가상질량의 범위가 가장 크며, N 값이 증가함에 따라 그 허용범위는 점차 줄어서 N 값이 1일 때의 약 50% 정도로 감소한다. 넷째, N 값이 증가함에 따라 안정적인 가상스프링 최대값들 중에서 가장 큰 값이 점차 감소하여 수렴하며, 이 최대값들 중 최대값이 나타나는 가상질량의 크기는 0.5 kg에서 점차 감소하여 0.2 kg으로 수렴한다.

시뮬레이션 결과에서 N 값이 1인 경우가 가상질량과 영차홀드를 갖는 단일 샘플링이 포함된 햅틱시스템의 결과이다. Eq. (2)는 가상질량과 영차홀드가 포함된 단일

샘플링에서의 안정적인 가상스프링 최대값을 기준으로 다중을 샘플링에서의 안정적인 가상스프링 최대값의 비율을 나타낸 것이다. 앞서 설명한 바와 같이 샘플링 주기에 상관없이 그래프의 전반적인 경향은 비슷하게 나타나므로 샘플링 주기 40 ms와 1 ms의 결과그래프, 2개를 토대로 전반적인 경향을 분석한다. Fig. 4는 Eq. (2)를 이용하여 가상스프링의 안정성 영역이 N 값 변화에 따라 상대적으로 어떻게 변하는 지 분석한 결과이다.

$$Relative\ Ratio_N = \frac{K_{w,max}@N}{K_{w,max}@N=1} \quad (2)$$

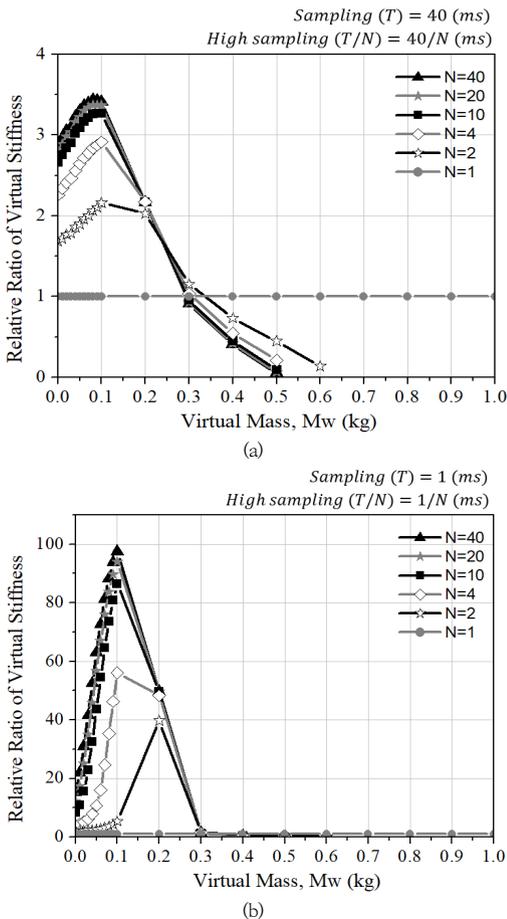


Fig. 4. Relative ratio of maximum available stiffness by Eq. (2) according to the ratio N and virtual mass
(a) $T = 40\text{ ms}$ (b) $T = 1\text{ ms}$

Fig. 4를 보면, 본 논문에서 제시한 다중을 샘플링을 통해 가상스프링의 안정성 영역이 단일 샘플링으로 구성

된 종래 방법보다 가상질량의 크기가 작은 영역 ($0 \sim 0.3\text{ kg}$)에서 수 배 ~ 수십 배 더 크게 나타나는 것을 볼 수 있다. 즉, 다중을 샘플링 방법은 가상질량을 작게 모델화할 때 유리하다. 가상질량 0.1 kg 근처에서 최대비가 나타나며, N 값이 커질수록 그 비율은 더 커진다. Table 1은 샘플링 주기별, N 값별로 Eq. (2)를 통해 분석한 후 최대비율을 산출한 결과이다. 샘플링 주기가 작아질수록, N 값이 커질수록 상대비율은 더 커지며, 이 결과는 가상질량과 N 값을 적절하게 선택하여 시스템을 모델화하면 가상스프링의 크기를 안정적으로 최대 97배 더 크게 할 수 있음을 의미한다.

Table 1. Maximum value of Eq. (2) according to sampling time and the ratio N

Sampling Time (ms)	Ratio N					
	1	2	4	10	20	40
1	1	39.7	56.1	86.4	94.0	97.4
2	1	20.5	29.5	44.0	47.7	49.4
10	1	5.1	7.7	9.9	10.5	10.8
40	1	2.2	2.9	3.3	3.4	3.4

가상질량의 추가가 다중을 샘플링이 포함된 햅틱 시스템의 안정성 영역에 어떤 영향을 미치는지를 살펴본다. 이에 N 값이 1인 경우는 분석에서 제외한다.

가상질량을 제외한 샘플링 주기 (T), N 값 등의 물성치가 동일한 환경에서 가상질량이 없을 때의 안정적인 가상스프링의 최대값에 대한 가상질량 증가에 따른 가상스프링의 최대값의 비율을 구하는 식이 Eq. (3)이며, 샘플링 주기 40 ms와 1 ms에 대한 결과가 Fig. 5이다. 이 결과를 통해 전반적인 경향을 분석한다.

Fig. 5를 보면 샘플링 주기가 작아질수록 Eq. (3)의 계산값이 커진다. 그리고 N 값이 커짐에 따라 그 값이 점차 작아지면서 수렴한다. 이는 가상질량이 없을 때는 N 값 증가에 따라 안정적인 가상스프링 영역이 증가하며, 반면에 가상질량이 존재할 때는 N 값 증가에 따라 안정적인 가상스프링의 최대값들 중 최대값은 감소하며 수렴하기 때문이다.

$$Relative\ Ratio_M_w = \frac{K_{w,max}@M_w}{K_{w,max}@M_w=0} \quad (3)$$

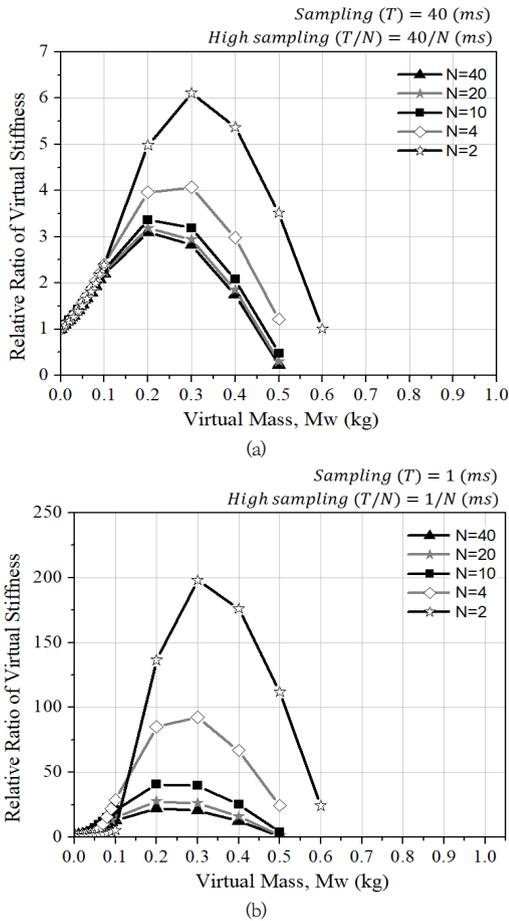


Fig. 5. Relative ratio of maximum available stiffness by Eq. (3) according to the ratio N and virtual mass
(a) T = 40 ms (b) T = 1 ms

Table 2는 샘플링 주기별, N값별로 Eq. (3)에 의해 계산된 값들 중 최대값을 보여준다. 최대값이 나타날 때의 가상질량은, Fig. 5에서 보듯이 0.2 kg ~ 0.3 kg이다. Table 2를 보면, 시스템을 모델화할 때 적절한 가상 질량의 크기와 N값을 선정하면, 가상질량이 없는 경우의 안정적인 가상스프링의 영역보다 약 3배 ~ 200배 정도 더 크게 안정적인 영역을 확장할 수 있음을 알 수 있다. 즉 다중율 샘플링이 포함된 시스템에서도 가상질량의 추가는 시스템의 안정성을 수 배에서 수백 배 향상시킬 수 있다.

Table 2. Max. Relative Ratio of Eq. (3) according to sampling time and the ratio N

Sampling Time (ms)	N				
	2	4	10	20	40
1	198.0	92.3	40.8	27.7	22.2
2	99.6	47.5	23.1	17.2	14.7
10	20.9	11.4	7.4	6.5	6.1
40	6.1	4.1	3.4	3.2	3.1

샘플링 주기 (T)가 작아짐에 따라 가상스프링의 안정성 영역이 더 커짐은 Fig. 3을 통해 알 수 있다. 여기서는 그 관계를 좀 더 살펴본다. 샘플링 주기를 제외한 나머지 변수인 가상질량, N값 등을 동일하게 하고 샘플링 주기가 40 ms일 때의 안정적인 가상스프링의 최대값을 기준으로 다른 샘플링 주기에서 안정적인 가상스프링의 최대값과의 비율을 구하는 식이 Eq. (4)이다.

$$Relative\ Ratio_T = \frac{K_{w,max}@T}{K_{w,max}@T=40ms} \quad (4)$$

Table 3. Values computed by Eq. (4) according to sampling time and the ratio N

N	Virtual Mass	Sampling Time (ms)			
		40	10	2	1
2	0.3 kg	1.0	15.5	384.2	1535.2
4	0.3 kg	1.0	15.7	389.2	1555.8
10	0.2 kg	1.0	15.4	378.8	1512.8
20	0.2 kg	1.0	15.4	380.5	1519.9
40	0.2 kg	1.0	15.4	381.5	1523.8

Fig. 3을 보면 가상질량이 커짐에 따라 안정적인 가상스프링의 최대값은 포물선 개형을 보이며, N값이 2이상인 경우는 가상질량 0.2 kg ~ 0.3 kg에서 최대값들 중에서 최대값이 나타난다. 이 가상질량의 범위를 중심으로 Eq. (4)를 이용하여 샘플링 주기 증가에 따른 안정적인 가상스프링 최대값의 비율을 분석한 것이 Table 3이다. Table 3을 보면, 샘플링 주기가 40 ms에서 10 ms로 1/4 배되면 가상스프링의 안정성 영역의 비율이 약 16 배가 되며, 샘플링 주기를 1/40 배인 1 ms로 줄이면 가상스프링의 안정성 영역은 약 1600 배에 근접해가는 것을 볼 수 있다. 따라서 특정 가상질량에 대해서는 안정적인 가상스프링의 최대값이 샘플링 주기 크기의 제곱에 반비례한다는 것을 알 수 있다.

4. 결론

다중을 샘플링이 포함된 햅틱 시스템에서 가상질량이 가상스프링의 안정성 영역에 미치는 영향을 분석하였으며, 그 결과는 다음과 같다.

첫째, 샘플링 주기(T)가 작아질수록 안정적인 가상스프링의 영역 크기는 커진다. 특히 안정적인 가상스프링의 최대값들 중 최대값이 나타나는 가상질량의 범위에서는 샘플링 주기 크기의 제곱에 반비례하여 가상스프링의 안정성영역이 증가한다.

둘째, 햅틱 시스템의 안정성을 보장하기 위해 가상질량의 크기에는 그 한계가 존재한다. 다중을 샘플링이 포함된 시스템에서는 활용가능한 가상질량의 범위가 N 값이 커짐에 따라 영차홀드와 단일 샘플링으로 구성된 햅틱 시스템에서 허용되는 가상질량 범위의 50 %수준으로 감소한다. 그렇지만, 가상질량의 크기가 작은 영역 ($0 \sim 0.3$ kg)에서 N 값을 적절하게 선택하면 안정적인 가상스프링의 영역을 영차홀드와 단일 샘플링이 포함된 시스템의 경우보다 최대 97.4배 더 크게 할 수 있다.

셋째, 적절한 가상질량의 크기와 N 값을 선정하면, 안정적인 가상스프링의 영역을 가상질량이 없는 경우보다 보다 약 3배 ~ 200배 정도 더 크게 만들 수 있다.

본 연구를 통해 가상스프링의 안정성 영역을 보다 크게 만들 수 있도록 가상질량과 다중을 샘플링의 N 값 선정 방향을 제안하였으며, 이는 보다 현실감높고 안정성이 보장된 가상강체 설계에 이바지할 것이다.

References

- [1] J. E. Colgate and G. Schenkel, "Passivity of a class of sampled-data systems: Application to Haptic Interfaces," *Journal of Robotic Systems*, vol.14, no. 1, pp.37-47, 1997.
DOI: [http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-4563\(199701\)14:1%3C37::AID-ROB4%3E3.0.CO;2-V](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1097-4563(199701)14:1%3C37::AID-ROB4%3E3.0.CO;2-V)
- [2] J. J. Gil, A. Avello, A. Rubio, and J. Florez, "Stability analysis of a 1 DOF haptic interface using the Routh-Hurwitz criterion," *IEEE Trans. on control systems technology*, vol. 12, no. 4, pp. 583-588, July 2004.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/TCST.2004.825134>
- [3] N. Diolaiti, G. Niemeyer, F. Barbagli, and J. K. Salisbury, "Stability of haptic rendering: discretization, quantization, time delay, and coulomb effects," *IEEE Trans. on Robotics*, vol. 22, no. 2, pp. 256-268, Apr. 2006.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/TRO.2005.862487>

- [4] J. J. Gil, A. Ugartemendia, and I. Diaz, "Stability analysis and user perception of haptic rendering combining virtual elastic, viscous and inertial effects," *Applied Sciences*, vol 10, no. 24:8807, 2020.
DOI: <https://doi.org/10.3390/app10248807>
- [5] K. Lee, "Stability analysis for a virtual spring model with an extrapolation and high-frequency ZOH," *Journal of the Korea Academia-Industrial cooperation Society*, vol. 19, no. 1, pp. 12-17, 2018.
DOI: <https://doi.org/10.5762/KAIS.2018.19.1.12>
- [6] K. Lee, "Effect of the sampling time of high-frequency ZOH and a physical damper on stable haptic interaction," *Journal of the Korea Academia-Industrial cooperation Society*, vol. 20, no. 2, pp. 649-654, 2019.
DOI: <https://doi.org/10.5762/KAIS.2019.20.2.649>

이 경 노(Kyungno Lee)

[정회원]



- 1996년 2월 : 연세대학교 기계공학과 졸업 (학사)
- 1998년 2월 : KAIST 기계공학과 졸업 (석사)
- 2007년 2월 : KAIST 기계공학과 졸업 (박사)
- 2019년 10월 ~ 현재 : 한국교통대학교 자동차공학전공 교수

<관심분야>

가상현실, 햅틱 인터페이스, 원격제어