

# J 적분에 의한 모드 II 상태에서의 응력확대계수 해석에 관한 연구

김원범

울산과학기술대학교 조선해양시스템공학과

## Evaluation of Stress Intensity Factor at Mode II condition by J integral

Won Beom Kim

Department of Naval Architecture and Ocean Engineering, Ulsan College

**요 약** 대형 강구조물에서는 구조물의 형상에 따라서 여러 가지 하중을 받는다. 많은 경우 수직하중이 구조물에 가장 큰 영향을 미치는 주요한 하중이지만, 한편 구조물이 받는 하중에 따라 전단하중이나 복합하중이 구조물의 수명에 큰 영향을 미칠 수 있다. 본 연구에서는 피로 파괴현상에서 하중상태에 따른 모드 II 상태에서의 응력확대계수에 대해 고찰하였다. 피로 파괴와 관련된 연구에서 응력확대계수 평가는 모드 I의 경우에 대하여 많은 연구를 실시하고 있으나 상대적으로 모드 II에 대한 연구는 적다. 또한 모드 II 하중상태에서의 표준화된 시험편이나 시험방법이 정립되어 있지 않아 각 연구자별로 다양한 시험편이 사용되고 있다. 본 연구에서는 모드 II 하중상태에서의 시험편의 거동을 J 적분을 사용한 유한요소해석을 통해 응력확대계수 K를 계산한 결과를 타 연구결과와 비교하여 나타내었다. 본 연구에서 J적분에 의한 유한요소해석에는 in-house FEM 프로그램을 사용하였다. 모드 II 상태에 대한 해석을 위하여 해석대상에서 전체 모델을 사용하였다. 해석에서는 전체 모델에서 균열길이가 0.04 m 일 때 노드개수는 3905개이며 요소의 개수는 7596개이다. 계산결과는 다른 연구결과와 비교하여 계산된 구간에서 97.4 % 이상의 일치도를 확인할 수 있었다.

**Abstract** Large steel structures are exposed to several types of loads depending on the configuration of the structure or member. In many cases, the axial force primarily affects the strength of structures. On the other hand, the life of a structure can be affected depending on the type of load, for example, shear force or mixed loads. This study examined the Mode II state of the loading condition under fatigues and fractures. Mode I fatigues and fractures have been extensively studied in evaluating the stress intensity factor (SIF), but Mode II failure has seldom been studied. In addition, many types of specimens have been used because a standardized specimen or experimental procedure has not yet been established for Mode II conditions. Therefore, the behavior of the SIF of the Mode II condition was examined using the finite element method (FEM) and J integral with an in-house FEM program. The evaluation used 3905 nodes and 7596 elements of a full model specimen with a crack length of 0.04 m. The results were compared with other results, and an accuracy of more than 97.4 % was achieved with the proposed calculation.

**Keywords** : Crack, Finite Element Method, J integral, Mode II, Stress Intensity Factor

---

\*Corresponding Author : Won Beom Kim(Ulsan College)

email: wbkim@uc.ac.kr

Received October 25, 2023

Accepted January 5, 2024

Revised January 4, 2024

Published January 31, 2024

## 1. 서론

수많은 용접이음으로 이루어진 선박을 비롯한 해양구조물 또는 대형 강구조물에 작용하는 하중은 반복적으로 작용하는 경우가 많으며, 화물이나 작용하중의 방향에 따라 수직하중 또는 전단하중 등의 형태로 작용하게 된다. 이와 같은 경우 제조중 또는 사용 중의 원인에 기인하는 구조재료의 결함이나 구조적 형상에 의한 불연속부 또는 용접결합 등으로부터 균열이 자주 발생된다. 이와 같은 이유로 발생한 균열이 수직하중 또는 전단하중에 의하여 모드(Mode) I 또는 모드 II 상태의 파괴역학적 상태에 놓이게 되며, 발생한 균열의 위험성은 각각의 모드 상태에서의 응력확대계수를 구하는 것에 의하여 파악할 수 있다. 한편, 균열에 대한 피로 파괴해석에서 가장 많이 사용되는 파괴역학적 파라미터는 응력확대계수  $K$ 이며 그 중에서도 모드 I에 대한 해석을 많이 실시하고 있다.

그러나 전술한 바와 같이 다양한 하중을 받는 선박이나 해양구조물을 포함한 각종 구조물에서 전단하중이 작용하는 경우 균열에 대한 모드 II 상태에서의 균열 해석의 필요성이 있으며 이와 관련된 선행 연구결과들이 있다[1-7].

예를 들어, 비대칭 4점 굽힘 시험편에 의한 모드 II 시험 연구[1], 짧은 보 압축시험법에 의한 모드 II 시험 연구[2], 적층판 박리균열에 대한 혼합 모드 계산을 위한 J 적분을 사용한 상호 적분 접근법에 관한 연구[3], 중앙경사균열이 있는 브라질리언 디스크에 의한 모드 I 및 모드 II 시험 연구[4], 콘크리트와 같은 취성재료에 대해 미세균열 모델을 사용한 모드 II 파괴에 관한 연구[5], 혼합 모드 I/II/III에서의 파괴시험과 순수 인장, 순수 평면 내 및 평면 외 전단모드까지 모드 혼합을 생성할 수 있는 하중장치에 관한 연구[6] 그리고 CTS(Compact Tension Shear) 시험편을 사용한 모드 I + II 에 관한 연구[7] 등이 있으며 이와 같이 모드 II 및 복합 모드에 대한 다양한 연구들이 실시되고 있다.

이에 따라 본 연구에서는 모드 II 상태의 하중을 받는 균열에 대하여 파괴역학적 해석을 실시하여 그 결과를 파악하기로 하였다. 본 연구를 통하여 기존에 많은 연구가 이루어진 모드 I 보다는 특히 모드 II에 대한 평가를 주목하여 J 적분을 사용하여 평가하며, 추후 모드 I + 모드 II의 복합적 하중 상태 하에서의 응력확대계수 연구에도 적용할 수 있으며, 안전한 구조물 사용의 지침을 얻고자 하였다.

## 2. 연구방법

### 2.1 응력확대계수의 평가법

구조물의 응력집중부나 결함 등에서 발생한 균열에 대해서는 파괴역학적 파라미터를 사용하여 균열에 대한 해석을 실시하며 균열의 위험성을 판단하게 된다.

이때 파괴역학적 파라미터중 응력확대계수를 사용하는 경우 하중을 받는 양식을 Fig. 1과 같이 크게 3가지 모드 I, II, III으로 구분하여, 균열을 가진 부재가 하중을 받는 형태로부터 응력확대계수를 구분하여 해석을 실시할 수 있다[8].

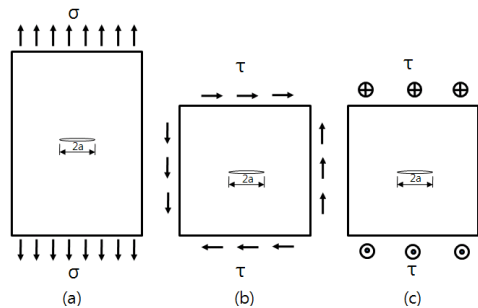


Fig. 1. The three modes of loading that can be applied to the crack. (a) Mode I (opening) (b) Mode II (In-Plane Shear) (c) Mode III (Out-of-Plane Shear)

Fig. 1 b)와 같이 전단응력이 작용하고 있는 경우, 응력확대계수  $K_{II}$ 는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$K_{II} = \Delta\tau \sqrt{\pi a} \tag{1}$$

한편, 무한 판에 대한 응력확대계수를 나타내는 Eq. (1)에서, 유한판인 경우에는 Eq. (1)에 대하여 유한 판의 형상계수(correlation factor)  $f(\beta)$ 를 구하여 곱하면 유한 판에 대한 응력확대계수를 나타낸다.

### 2.2 유한 판의 모드 II 평가법 및 연구배경

#### 2.2.1 Richard and Benitz[9]의 연구

Richard and Benitz[9]는 모드 I/II의 상태에서 실험을 실시할 수 있는 Fig. 2의 시험편, 지그(jig) 그리고 모드 I/II에서의 계산식 및 형상계수에 대한 선도를 제시하였다.

모드 II에 대해 제시된 계산식은 Eq. (2)와 같다. 형상계수에 대한 선도에서는 균열길이  $a$ 와 시험편 폭  $W$ 의 비  $a/W$ 에 따른 형상계수 및 하중각도와와의 비로 제시되어 있다.

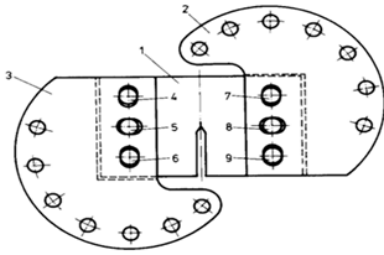


Fig. 2. Device for the application of superimposed normal and shear loads to a fracture mechanics specimen[9].

$$\Delta K_{II} = \frac{\Delta p \sqrt{\pi a}}{Wt} \times \sin \theta \frac{1}{1 - \frac{a}{W}} \sqrt{\frac{-0.23 + 1.40 \frac{a}{W}}{1 - 0.67 \frac{a}{W} + 2.08 (\frac{a}{W})^2}} \quad (2)$$

본 연구에서는 모드 II에서의 계산결과의 정도 검증을 위하여 Richard and Benitz[9]의 모드 II 식을 사용하여 비교하기로 하였다.

### 2.2.2 Dahlin and Olsson[10,11]의 연구

Dahlin and Olsson[10,11]은 Fig. 3의 시험편에 의한 실험과 유한요소해석을 실시하고 다음의 Eq. (3)을 제시하였다. 지그 형상은 Richard and Benitz[9]의 지그와 비교하여 상당히 다른 형태를 나타내고 있다. 본 연구에서는 계산정도의 검증을 위하여 계산결과를 이 식과도 함께 비교하기로 하였다.

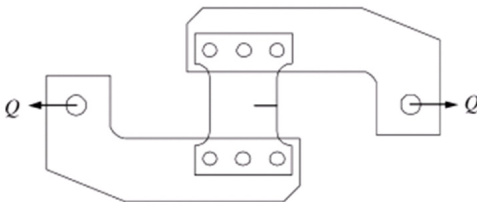


Fig. 3. The load setup generates the following loads to the specimen under mode II

$$K_{II} = \frac{Q}{Wt} \sqrt{\pi a} \cdot f_{II} \left( \frac{a}{W} \right) \\ f_{II} \left( \frac{a}{W} \right) = b_0 + b_1 \left( \frac{a}{W} \right) + b_2 \left( \frac{a}{W} \right)^2 + b_3 \left( \frac{a}{W} \right)^3 + a_4 \left( \frac{a}{W} \right)^4 \quad (3)$$

### 2.2.3 Gong and Choi[12]의 연구

Gong and Choi[12]는 혼합모드 I+II에서 피로하중에 의한 균열진전거동을 실험적으로 고찰하였다. 저자들은 혼합모드 피로균열의 거동에 대한 실험표준의 미제정, 실험방법의 다양성과 이로 인한 연구결과들의 차이 등으로 인하여 일관적이고 통일적인 평가가 어렵다고 지적하였다. 또한 변동하중 모델의 복잡한 하중조건에 관한 연구는 아직 부족한 실정이라고 지적하였다.

저자들은 응력확대계수 계산식과 실험에 사용한 시험편은 Richard and Benitz[9]의 시험편을 수정한 시험편을 사용하여 실험 연구를 진행하였다. 이 논문에서는 모드 II에 대한 응력확대계수를 구하기 위한 J 적분이나 유한요소해석은 실시하지 않았다.

### 2.2.4 Hong and Song[13]의 연구

Hong and Song[13]은 하중모드 측면에서 순수 모드 I 하중상태 하에서의 연구는 활발히 이루어졌으나, 실제 구조물에서 대부분 발생하는 혼합모드 하중상태 하에서의 연구는 아직 부족한 실정이라고 지적하였으며, 균열발생단계와 균열전파단계에서의 모드 II의 영향을 고찰하였다. 사용한 시험편은 Richard and Benitz[9]의 시험편을 수정한 시험편을 사용하여 실험 연구를 실시하였다.

또한 저자들은 일반적인 실험에 의해 모드 II 하중의 영향에 대한 고찰은 어려우므로 혼합모드 I+II 하중에 의해 모드 I 상태의 피로균열 전파거동을 통해 모드 II 성분에 의한 영향을 파악하였다.

이 논문에서 저자들은 모드 II에 대한 응력확대계수 계산은 Richard and Benitz[9]가 제안한 식을 사용하였고 응력확대계수를 구하기 위한 별도의 유한요소계산은 실시하지 않았다.

### 2.2.5 Antunes et al.[14]의 연구

Antunes et al.[14]은 혼합모드 I/II 하중상태에서의 피로 파괴연구를 위해 Compact Tension Shear(CTS) 시험편을 사용하여 고찰하였다. 저자들은 Richard and Benitz[9]의 모델과 동등한 모델을 사용하였다. 저자들은 유한요소해석을 통하여 모드 II 상태의 응력확대계수를 구하기 위한 유한요소모델에서 시험편의 강체운동을 일으키지 않도록 경계조건을 부여하여 모드 II에 대한 해석을 실시하였다. 저자들이 사용한 시험편은 Fig. 4와 같다.

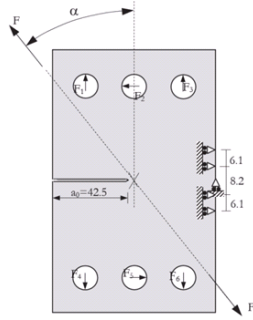


Fig. 4. Configuration of the specimen used by Antunes et al.[14] for FEM calculation

### 3. 결과 및 고찰

#### 3.1 J 적분 계산법

본 연구에서는 모드 II 상태에서의 균열거동 파악을 위한 응력확대계수 K를 계산하기 위하여 유한요소해석에 의한 J 적분 계산을 실시하였다. J 적분의 적분경로는 Fig. 5와 같으며, J 적분 계산과정은 다음과 같다.

$$J = \int_{\Gamma} (Wdy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x}) ds \quad (4)$$

여기서

- W: strain energy density
- T: components of the traction vector
- u: displacement vector components
- ds: length increment along the contour  $\Gamma$

여기서

$$W = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$$

$$T_i = \sigma_{ij} n_j$$

$n_j$ : components of the unit vector normal to  $\Gamma$

여기에서 구한 J값은 평면응력상태일 때 Eq. (5)가 성립하는 것으로부터 K값을 구할 수 있다.

$$J = \frac{K_I^2}{E} \quad (5)$$

또한, 평면변형률상태일 때는 Eq. (6)이 성립하는 것으로부터 K값을 구할 수 있다.

$$J = \frac{K_I^2(1-\nu^2)}{E} \quad (6)$$

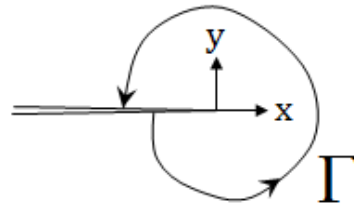


Fig. 5. Contour for J integral calculation

#### 3.2 시험편의 J 적분 계산

지금까지 상대적으로 모드 I에 대한 연구는 많이 이루어졌다. 따라서 본 연구에서는 모드 II에 대한 연구를 중점적으로 수행하였다.

본 연구에서는 모드 II 하중상태에서의 응력확대계수를 구하기 위하여 Fig. 6의 모델에 대하여 모드 II 조건 하에서의 응력확대계수 K를 구하기 위한 계산을 실시하였다. 본 모델은 Fig. 6과 같이 폭 W는 0.07 m, 높이 H는 0.085 m, 두께 t는 0.003 m이다. 하중은 2940.3 MPa의 전단하중을 가하였다. 영률 E=206 GPa, 프와송비  $\nu$ 는 0.3으로 하였다.

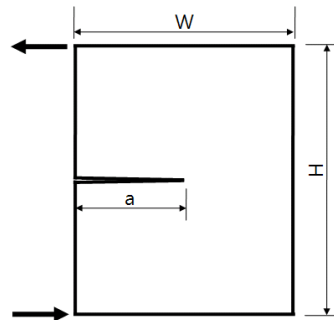


Fig. 6. Configuration of the used model

Fig. 7은 유한요소계산을 하기 위한 요소분할을 나타낸 그림이다. 모드 II의 계산에는 전체(full)모델을 사용하였다. 전체모델에서 균열길이가 0.04 m일 때, 노드(node)개수는 3905개이며, 요소(element)의 개수는 7596개이다. 요소분할시 가장 조밀한 곳은 전체 폭을 70등분하였다. 본 연구의 전체모델에서는 균열길이가 증가함에 따라, 요소의 개수는 변하지 않으나 노드의 개수는 증가한다. 유한요소해석에는 in-house FEM 프로그램을 사용하였다.

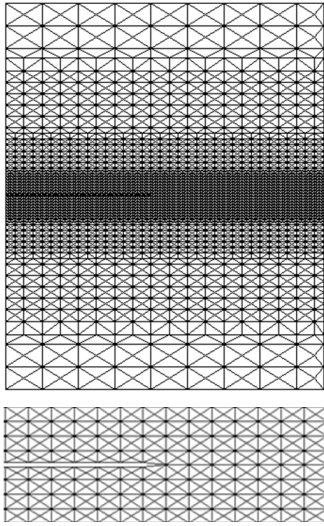


Fig. 7. Configuration of full model and mesh generation near crack for Mode II calculation

계산결과는 Richard and Benitz[9]와 Dahlin and Olsson[10,11]의 식과 비교하기 위하여 평면 변형률조건으로 계산하였다. 본 연구에서는 모드 II 상태의 해석에서 Fig. 6과 같이 전체모델에 의해 시험편에 직접적으로 전단하중을 가하는 방식으로 해석을 실시하였다. 본 연구에서는 모델의 해석에 있어서 시험편의 강제운동효과를 피하기 위한 경계조건을 부여하였다. 계산결과의 정도검증은 Dahlin and Olsson [10,11]이 제안한 식과 비교하여 실시하였다.

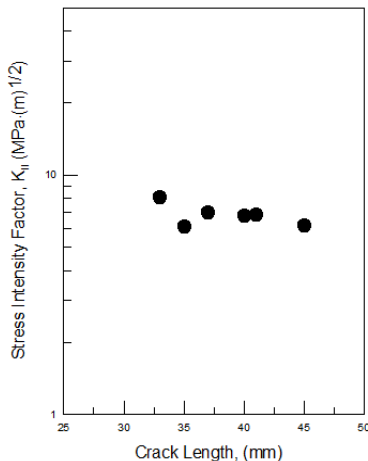


Fig. 8. Calculation results of Stress Intensity Factor  $K_{II}$  in Mode II condition by J integral and FEM in this study

Fig. 8은 본 연구에서 J 적분을 이용하여 실시한 모드 II에서의  $K_{II}$ 에 대한 유한요소 해석결과를 나타내고 있다.

Fig. 9는 Eq. (2) 및 (3)의 Richard and Benitz[9] 및 Dahlin and Olsson[10,11]의 모드 II에 대한 계산식의 결과를 Fig. 8의 해석결과와 함께 나타낸 그림이다.

Fig. 9로 부터 모드 II에서 Richard and Benitz[9] 및 Dahlin and Olsson[10,11]의 계산식이 상호 일치하고 있으며 이 계산식의 결과와 Fig. 8의 본 연구결과는 계산된 구간에서 97.4 % 이상의 일치도를 나타내고 있음을 확인할 수 있었다.

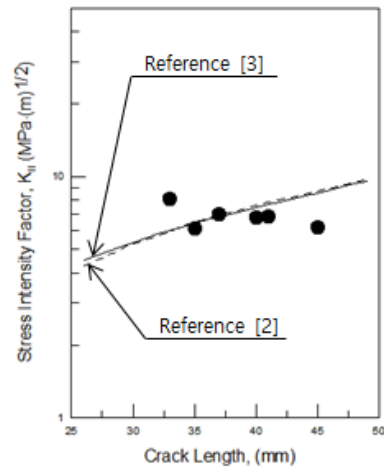


Fig. 9. Comparison of the results of this study with the calculation results of Dahlin and Olsson[10] and Richard and Benitz[9]

### 3.3 고찰

본 연구에서는 모드 II에 대한 연구를 중점적으로 수행하였다. 본 연구에서의 모드 II에 대한 응력확대계수 K의 계산결과는 계산된 구간에서 97.4 % 이상의 일치도를 확인할 수 있었다. 모드 I의 일반적인 계산결과와 달리 모드 II에서는 균열길이의 증가에 따라 K치가 크게 증가하지 않는 경향을 나타내었다. 모드 II에 대한 다른 연구 결과와의 비교는 시험편 형상의 차이, 계산한 파라미터의 차이, 부하 하중의 크기 등으로 간단히 비교하기는 어려움이 있으나 계산결과가 식으로 주어진 Richard and Benitz[9]와 Dahlin and Olsson[10,11]의 계산식은 용이하게 계산결과와의 비교가능하다. Antunes et al.[14]도 상용 유한요소 패키지의 J적분을 사용하여 균열의 모드 II 해석을 실시하고 Richard and Benitz[9]의 결과와 비교하여 2 % 이하의 차이를 나타내었다고 보

고하고 있다.

본 연구에서는 균열의 길이가 커짐에 따라 K치가 시험편의 중앙부에서는 Richard and Benitz[9]와 Dahlin and Olsson[10,11]의 계산식과 잘 일치하였으나, 균열 길이가 33 mm보다 작거나 45 mm보다 큰 구간에서는 오차가 발생하였다. Richard의 연구에서도 식의 유효구간을  $0.5 \leq a/W \leq 0.7$ 으로 제시하고 있다.

모드 II에 대한 본 연구는 추후 모드 I + 모드 II의 복합적 하중 상태하에서의 응력확대계수 계산을 위한 연구에 사용할 수 있다.

#### 4. 결론

본 연구에서는 모드 II 상태에서의 균열거동 파악을 위한 응력확대계수 K를 계산하기 위하여 J 적분에 의한 유한요소해석을 통하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. 균열이 있는 전단하중을 받는 시험편에서 모드 II 하중에 대한 응력확대계수를 구하였다.
2. 모드 II 하중에 대해서 시험편은 전체 형상에 대해서 유한요소해석을 위한 모델링을 실시하여 해석에 적용하였다.
3. 본 연구의 계산결과를 Richard and Benitz[9] 및 Dahlin and Olsson[10,11]이 제시한 식과 비교하였고, 계산결과는 97.4 % 이상의 일치도로 서로 잘 일치하는 것을 확인하였다.
4. 본 연구는 모드 I + 모드 II의 복합하중하의 균열거동의 연구에 활용할 수 있다.

#### References

- [1] H. Yoshihara, "Mode II Critical Stress Intensity Factor of Medium Density Fiberboard Measured by Asymmetric Four-Point Bending Tests and Analyses of Kink Crack Formation", *BioResources*, Vol.8, No.2, pp.1771-1789, 2013.  
DOI: <https://doi.org/10.15376/BIORES.8.2.1771-1789>
- [2] T. Y. Ko and J. Kemeny, "Mode II fracture toughness determination of rocks using short beam compression test", *Journal of Korean Tunnelling and Underground Space Association*, Vol.15, No.6, pp.547-557, 2013.  
DOI: <https://doi.org/10.9711/KTAJ.2013.15.6.547>
- [3] W. T. Chow and S. N. Atluri, "Stress intensity factors as the fracture parameters for delamination crack growth in composite laminates", *Computational Mechanics*, Vol.21, pp.1-10, 1998.
- [4] M. M. I. Hammouda, "Mixed-mode Stress Intensity Factors via Centrally Cracked Brazilian Disc with Wide-Range Controlling Parameters", *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, Vol.45, Issue 3, pp.713-724, 2022.  
DOI: <https://doi.org/10.1111/ffe.13628>
- [5] G. L. Golewski, P. Golewski and T. Sadowski, "Numerical Modelling Crack Propagation under Mode II Fracture in Plain Concretes Containing Siliceous Fly-Ash Additive Using XFEM Method", *Computational Materials Science*, Vol.62, pp.75-78, 2012.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2012.05.009>
- [6] N. Razavi and F. Berto, "A New Fixture for Fracture Tests under Mixed Mode I/II/III Loading", *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, Vol.42, Issue 9, pp.1874-1888, 2019.  
DOI: <https://doi.org/10.1111/ffe.13033>
- [7] D. Rozumek, Z. Marciniak, G. Lesiuk and J. A. F. O. Correia, "Mixed Mode I/II/III Fatigue Crack Growth in S355 Steel", *Procedia Structural Integrity*, Vol.5, pp.896-903, 2017.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2017.07.125>
- [8] M. Shiratori, Y. Miyoshi and H. Matsushita, *Computational Fracture Mechanics*, Jikyo Publishers, 1980, pp.12.
- [9] H. A. Richard and K. Benitz, "A Loading Device for the Criterion of Mixed Mode in Fracture Mechanics", *International Journal of Fracture*, Vol.22, pp.R55-R58, 1983.  
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00942726>
- [10] P. Dahlin and M. Olsson, "Reduction of Mode I Fatigue Crack Growth Rate due to Occasional Mode II Loading", *International Journal of Fatigue*, Vol.26, pp. 1083-1093, 2004.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2004.03.003>
- [11] P. Dahlin, M. Olsson, "Mode I Fatigue Crack Growth Reduction Mechanisms after a Single Mode II Load Cycle", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.73, pp. 1833-1848, 2006.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2006.02.015>
- [12] B. C. Gong and S. D. Choi, "Crack Growth Behavior by Fatigue Load under Mixed Mode(I+II)", *Journal of the Korean Society of Manufacturing Technology Engineers*, Vol.21, No.2, pp.276-282, 2012.
- [13] S. P. Hong and S. H. Song, "Effect of Mode II in the Crack Initiation Step and Crack Propagation Step", *Proceedings of the KSME 2006 Spring Annual Meeting*, pp.1234-1239, 2006.
- [14] F.V.Antunes, R.Branco, J.A.M.Ferrira, L.P.Borrego, "Stress Intensity Factor Solutions for CTS Mixed Mode Specimen", *Frattura ed Integrita Strutturale*, Vol. 48, pp.676-692, 2019.  
DOI: <https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.48.64>

김 원 범(Won Beom Kim)

[정회원]



- 1993년 2월 : 부산대학교 공과대학원 조선공학과 (공학석사)
- 1997년 6월 : Hiroshima University 대학원 공학연구과 조선구조공학전공 (Dr. Eng.)
- 1998년 8월 ~ 2003년 12월 : American Bureau of Shipping, Engineer
- 2010년 3월 ~ 현재 : 울산과학기술대학교 교수

〈관심분야〉

파괴역학, 부식피로강도, 용접구조강도, 해상풍력, AI