

# 회전각 측정자료의 3가지 보간법에 따른 강거더교의 처짐 산정

나용수<sup>1</sup>, 조수진<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>서울시립대학교 토목공학과, <sup>2</sup>서울시립대학교 도시빅데이터융합학과

## Calculation of deflection of steel girder bridge using three interpolation methods of rotation angle measurement data

Yongsoo Na<sup>1</sup>, Soojin Cho<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Department of Civil Engineering, University of Seoul

<sup>2</sup>Graduate School of Urban Big-data Convergence, University of Seoul

**요약** 본 논문은 일반 거더교에 몇가지 보간법을 적용하여 정확한 처짐 산정방법제시를 목적으로 한다. 거더의 처짐과 경사각 획득을 위하여 재하실험을 시행하였다. 대상 교량 형식은 4경간 연속교로 거더에 최대 하중이 재하되도록 좌·우측 편재하로 차량을 위치하였다. 처짐측정을 위하여 LVDT 1개와 경사계 9개를 이용하였다. 계산 처짐을 위한 이론은 경사각을 이용하여 거더 곡률을 산정하고 적분을 통해 처짐을 계산하였다. 처짐량 계산에 사용한 보간법은 3차 스플라인(Cubic Spline)과 라그랑주 다항식(Lagrange Polynomial) 그리고 할선법(Secant Method)이다. 실험 결과 좌측편재하시, LVDT 측정값(4.77 mm) 대비 CS, LP, SM은 각각 97.15, 99.31, 75.05 %의 정밀도를 나타냈다. 우측편재하시는 7.69 mm 대비 92.85, 93.78, 74.99 %의 정밀도를 나타냈다. 이를 통해 경사계만을 이용하여 강거더교의 처짐 산정이 가능함을 확인하였다. 본 연구는 4경간 연속교에 경사계 9개의 값을 분석한 결과이다. 따라서 다른 형식의 교량이나, 경사계의 개수 조정 때에는 추가적인 연구가 필요하다. 또한 탄성받침 교량일 경우 받침 수축량(본 실험대상의 경우 -2 mm)에 대한 보정이 필요하다.

**Abstract** This paper aims to propose an accurate method for deflection calculation by applying various interpolation techniques to a general girder bridge. Field experiments were conducted to obtain deflection and slope angles of the girder. The selected bridge type is a four-span continuous bridge, with the vehicle positioned on the left and right end portion to impose the maximum load on the girders. For deflection measurement, one LVDT and nine slope gauges were utilized. The theoretical approach for deflection calculation involved determining the girder curvature using slope angles and calculating deflection through integration. The interpolation methods used for deflection calculation are the 3rd-order spline(Cubic Spline), Lagrange Polynomial, and Secant Method. In the experimental results under the left end portion conditions, CS, LP, and SM exhibited precision rates of 97.15, 99.31, and 75.05 %, respectively, compared to the LVDT measurement(4.77 mm). Under the right end portion conditions, precision rates of 92.85, 93.78, and 74.99 % were observed, respectively, relative to an LVDT measurement of 7.69 mm. This confirms the feasibility of deflection calculation for steel girder bridges using only slope gauges. The study analyzed nine slope gauge values for a four-span continuous bridge, suggesting the need for additional research when dealing with different bridge types or adjusting the number of slope gauges. Additionally, in the case of an elastic bearing bridge, correction for bearing shrinkage (-2 mm in the case of this test subject) is required.

**Keywords** : Inclinometers, Rotational Angle, Displacement, Continuous Bridge, Cubic Spline

\*Corresponding Author : Soojin Cho(University of Seoul)

email: soojin@uos.ac.kr

Received December 11, 2023

Revised January 9, 2024

Accepted February 6, 2024

Published February 29, 2024

## 1. 서론

구조물의 사용성 분석은 처짐측정이 우선된다. 처짐은 변형률과 연계되고 변형률은 응력과 연계되기 때문이다. 정역학적 측면에서 변형률계를 이용하여 응력을 산정할 수 있다. 반면에 동역학적 측면에선 응력보다 변위가 중요한 요소이다. 동적응답은 정적하중과 무관하며 응력은 정·동적하중의 효과를 합한 변위로부터 결정되기 때문이다. 이러한 의미에서 교량의 처짐은 사용성 분석뿐만 아니라 성능평가와 유지관리기준에 활용할 수 있다.

처짐은 기상조건, 주변환경 및 특정 장애물에 관계 없이 정밀하게 측정할 필요가 있다. 일반적으로 처짐측정은 직접법과 간접법으로 구분할 수 있다. 직접법은 LVDT (Linear Variable Displacement Transducer) 변위계, GNSS(Global Navigation Satellite System) 등을 이용하는 방법이다. LVDT 변위계는 상대적으로 비용이 저렴하고 정확도가 높으나 하부에 바다나 하천 등의 장애물이 있으면 측정이 불가능할 수 있다. GNSS는 교량하부 장애물이나 기상 조건과 관계없이 적용할 수 있으나 장비가 고가이며 위성신호를 수신할 수 있어야 한다.

간접법은 레이저 처짐계, 영상기반 측정법 등이 있다. 레이저 처짐계는 구조물에 부착된 반사경의 움직임으로 변위를 측정하는 장비이다. 영상기반 변위측정 장치나 레이저 처짐계는 거리에 제한이 있고 안개, 눈, 비 등 기상조건에 영향을 받는다.

기존연구는 변위계를 이용하여 차량하중에 대한 교량의 정·동적 변위추정에 중점을 두었다. 최근 다양한 간접법을 이용한 연구가 진행되었다. 예를 들어 가속도[1], 회전각[2], 변형률[3], 이종 물리량의 융합[4,5] 등이다.

[6]은 측정된 회전각을 분석하여 온도에 의한 구조물의 장기 변위 모니터링에 적용하였다. 그리고 회전각을 이용한 구조손상추정 연구[7]가 수행되었다. 국내연구로서 [8]은 경사계만을 이용하여 현수교와 사장교 거더의 처짐측정이 가능함을 보였다.

본 논문은 일반거더교에 경사계 측정자료와 보간법을 적용하여 정확한 처짐 산정법 제시를 연구 목적으로 한다. 측정구조물은 개구체형 강거더교이며 LVDT와 경사계를 이용하여 처짐과 경사각을 측정하였다. 경사각으로부터 처짐을 산정하는 보간법은 Cubic Spline, Lagrange Polynomial, Secant Method이며 이를 CS, LP, SM으로, LVDT는 LV로 표현한다.

## 2. 보간법의 기본이론

경사계를 이용하여 샘플링 주파수  $f_s$  로 시간  $t$  동안  $p \times N$  개의 시계열자료를 획득하였다. 여기서  $p$ 는 경사계 개수,  $N=f_s \times t$ 이며  $N$ 은 경사계당 측정자료 수이다. 각 위치  $x_1, x_2, \dots, x_p$ 의 회전각 측정자료를 이용하여 시간  $t_i$  일 때 회전각 곡선  $\theta^{t_i}$ 를 결정할 수 있다. 2개의 경사계사이 회전각은 보간법을 이용하여 전체  $N$  개의 회전각 곡선을 구한다.

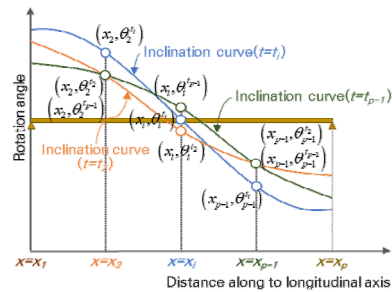


Fig. 1. Inclination curves at time step

시간  $t_i$  일 때 회전각 곡선  $\theta^{t_i}$ 를 적분하여 변위 곡선  $y^{t_i}$ 을 구할 수 있으며 전체  $N$  개의 변위곡선을 산정할 수 있다.

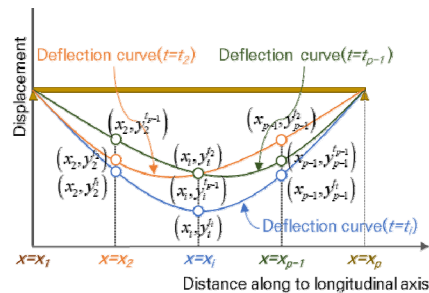


Fig. 2. Deflection curves at time step

위치  $x = x_q$ 의 변위이력  $y_q$ 는 변위곡선  $y^{t_i}$ 에서  $y_q^{t_i}$ 를 추출하며 전체  $N$  개의 시계열자료를 구성한다. 여기서  $x_q$ 는  $x_1$ 과  $x_p$  사이의 임의위치를 선정할 수 있다. 이는 경사계  $p$  개를 이용하여 경사계 설치구간 내 어느 위치에서나 변위를 구할 수 있다.

SM은 Fig. 3과 같이 수평선상 2점의 기울기를 측정하고, 삼각함수로 처짐을 결정하는 방법이다.

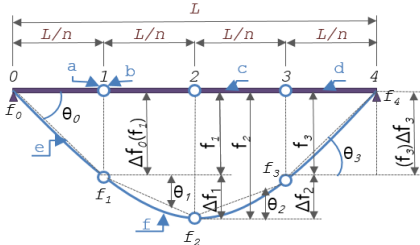


Fig. 3. Principle of deflection measurement by secant inclination method.

거더가 처진 후 경사각  $\theta_i$ 는  $i+1$ 번째와  $i$ 번째 측정점 연결선의 경사각이다.  $i+1$ 번째 측정점의  $i$ 번째에 대한 처짐값은 Eq. (2.1 a)과 같다.  $i$ 번째 측정점의 처짐은 Eq. (2.1 b)과 같이 된다. 초기 측정점의 처짐  $f_0$ 은 지점 변위계에 의해 직접 측정될 수 있다.

$$\Delta f_i = \Delta x \cdot \tan \theta_i \quad (2.1 \text{ a})$$

$$f_i = f_{i-1} + \Delta f_{i-1} \quad (2.1 \text{ b})$$

LP는  $(n+1)$  개 절점좌표  $(x_i, f_i)$ 가 주어졌을 때 이 절점들을 통과하는  $n$  차 다항식이며 Eq. (2.2)과 같이 나타낼 수 있다.

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n L_{n,k}(x) f_k \quad (2.2 \text{ a})$$

$$L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ (i \neq k)}}^n \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)} \quad (2.2 \text{ b})$$

주어진 임의의 좌표값을 추정할 때 LP는 매우 간편하다. 반면에 좌표점이 많아지면 고차다항식이 되며 고차다항식은 큰 오차를 나타낸다. 이러한 현상을 룬계 현상(Runge phenomenon)이라고 한다. 따라서 고차 LP는 이론적으로 정해에 빠른 수렴성을 나타내어도 주의하여 사용할 필요가 있다.

### 3. 경사각 측정

실험대상 교량은 연장 180 m의 4경간 연속교(4@45

m)로 바닥판 폭은 12.1 m(3차선)이고 58°의 사교로 건설되었다. 거더는 개구제형 강합성 2주형이며 거더별로 2개의 탄성받침이 설치되어있다. 센서는 교량 하부 차량통행에 지장이 없는 곳을 선정하여 Fig. 4와 같이 우측거더측에 설치하였다. 구간 S4(P3~A2)에 LVDT 1개를 거더 중앙부(1/2지점)에 설치하고 경사계는 등간격으로 9개를 설치하였다.

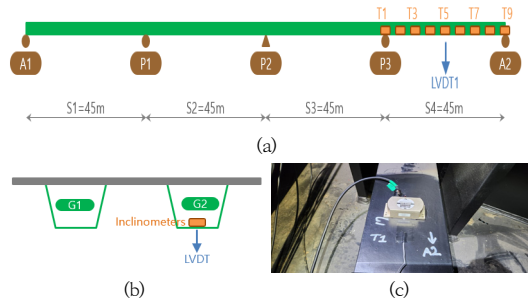


Fig. 4. Instrument Installation Location  
(a) Instrument profile (b) Instrument cross-section (c) the inclinometer

LVDT 측정 용량 50 mm, 주파수 10 Hz, 민감도 200  $\mu\epsilon/\text{mm}$ , 허용온도범위  $-10 \sim +80^\circ\text{C}$ 에서 측정할 수 있다. 또 경사계는 각도범위  $\pm 10^\circ$ , 정밀도 0.001°, 온도계수  $\pm 0.002^\circ/\text{C}$ , 허용온도범위  $-55 \sim 100^\circ\text{C}$ 에서 사용할 수 있다. 트럭의 총중량은 362.4 KN 1대와 370.8 KN 1대를 사용하였다. 바퀴폭은 2대 모두 2.4 m로 동일하고 트럭 바퀴간 거리(운거)는 3.2, 2.8, 2.0 m, 와 2.4, 3.0, 2.0 m로 측정되었다.

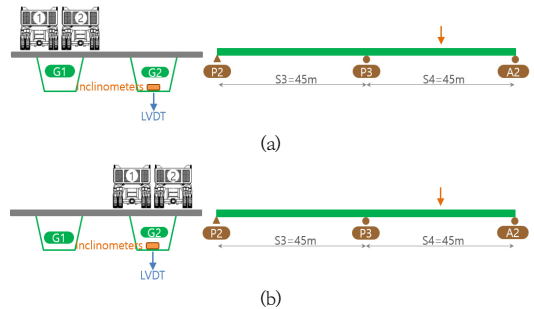


Fig. 5. Car load position  
(a) Load combination for The Left sided (b) Load combination for The Right sided

실험조건에 S1과 S2의 중앙부에 차량을 재하하고 S4 중앙지점의 처짐을 측정하였으나, 영향이 크지 않아 배제하였다. 또한 S3 중앙부에 차량이 재하되었을때 S4에

상부 처짐이 발생하였으나 본 연구의 취지와 달라 배제하였다. 따라서, 재하위치는 Fig. 5와 같이 경간 S4의 중앙지점만을 선정하였다. 여기서 S4는 4번째 경간을 G1은 차량이 좌측 편재하시를 나타낸다. 따라서 S4G2은 네번째 경간 우측 편재하시의 처짐량을 표현한다.

경사계를 이용하여 측정된 경사각은 Table 1과 같이 축약 정리하였다. 여기서 time은 계측 시간이며 1초에 100개의 데이터를 기록하였다. tilt1~9는 9개의 경사계에서 계측된 경사각이다. 기록된 경사각은 Python의 보간법을 이용하여 처짐을 산정하였다.

Table 1. Inclinations result (Units : x0.001degree)

time (sec)	tilt1	tilt2	tilt3	tilt4	tilt5	tilt6	tilt7	tilt8	tilt9
0	-0.21	0.71	0.05	0.05	-0.56	-0.15	-0.12	0.69	-0.23
0.01	-0.87	-0.02	-1.25	-1.01	-0.47	-0.75	-0.25	1.11	0.16
0.02	-0.63	0.67	-0.60	-0.40	-0.17	-0.37	-0.19	-0.27	-0.29
0.03	-0.79	0.84	-1.12	-0.72	-0.43	0.79	-0.42	0.28	0.06
0.04	-0.87	0.62	-1.13	-0.26	0.41	-0.52	0.73	0.83	-0.33
0.05	-0.73	-0.08	-1.25	-0.79	0.08	-0.14	-0.19	0.67	-0.89
0.06	-0.09	0.45	-0.67	-0.11	-0.22	0.83	-0.54	0.05	-0.99
0.07	-0.40	0.35	0.11	0.10	0.20	-0.42	0.18	0.83	-0.51
0.08	-0.57	0.78	-1.17	-0.18	-0.14	0.30	-0.60	0.40	-0.04
0.09	-0.64	0.82	-0.27	-0.07	0.38	-0.38	-0.46	1.09	-0.43
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

### 4. 보간법을 이용한 처짐산정

#### 4.1 처짐결과 분석

Fig. 6과 같이 좌·우측 편재하에 따른 결과를 그래프로 나타내었다. 좌측간은 좌측편재하시 결과, 우측간은 우측편재하시의 결과이다. (1)번의 결과는 LV로 측정된 처짐량이며, (2)번은 CS, (3)번은 LP, (4)번은 SM으로 계산된 처짐 그래프이다.

Table 2. G1 AND G2 S4 Comparison

Category		Displacement [mm]	Difference [mm]	Ratio [%]	note
The Left sided (G1)	LV	-4.78	-	-	
	CS	-4.62	-0.16	96.65	
	LP	-4.74	-0.04	99.16	
	SM	-3.58	-1.20	74.90	
The Right sided (G2)	LV	-7.91	-	-	
	CS	-6.92	-0.99	87.48	
	LP	-6.91	-1.00	87.36	
	SM	-5.48	-2.43	69.28	

좌측 편재하시(a1~4)에 대한 결과는 Fig. 6.에서 시간 75~200초 평균값 -4.78, -4.62, -4.74, -3.58 mm로 계산되었다. LV를 기준으로 비교하면 CS는 96.65, LP는 99.16, SM은 74.90 %의 정밀도를 보였다.

우측 편재하시(b1~4)에 대한 결과는 Fig. 6.에서 시간 425~500초 평균값 -7.91, -6.92, -6.91, -5.48 mm로 계산되었다. LV를 기준으로 CS는 87.48, LP는 87.36, SM은 69.28 %의 정밀도를 보였다.

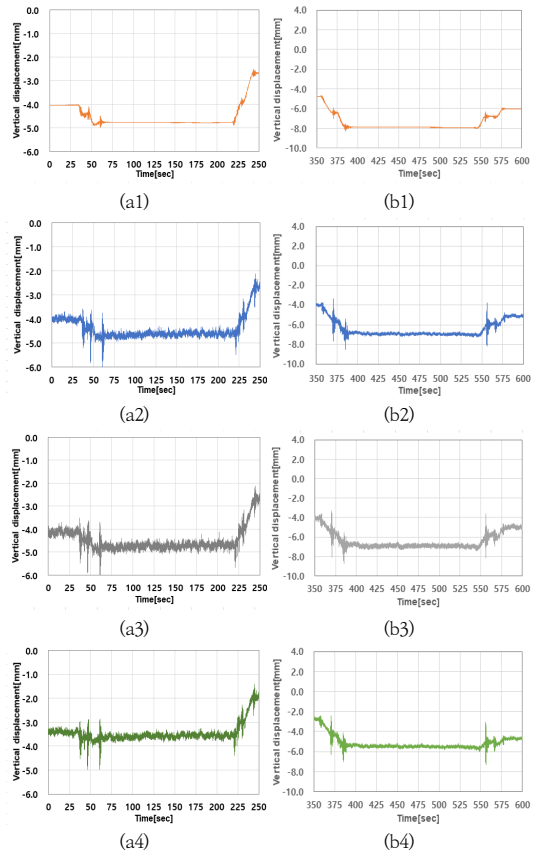


Fig. 6. The Left and Right Inclination result

- (a1) The Left sided - LV (b1) The Right sided - LV
- (a2) The Left sided - CS (b2) The Right sided - CS
- (a3) The Left sided - LP (b3) The Right sided - LP
- (a4) The Left sided - SM (b4) The Right sided - SM

Table 2와 Fig. 6으로 확인된 결과 좌측편재하시는 SM을 제외하면 97 %이상의 정밀도를 나타내고 있으나 우측편재하시에는 87 %로 10 % 이상 정밀도 차이가 발생하고 있다. SM은 편재하시에 대한 정밀도의 변화가 75에서 69로 6 %로 나타났다.

원인은 연대교의 받침 탄성력에 따른 압축변형이다.

[9]에 따르면 국내에서 생산된 탄성받침의 실제 측정된 압축탄성계수는 형상계수에 따라 차이가 매우 커지는 것으로 나타났다. 따라서 연대교에 설치된 받침의 수직 탄성계수로 수직처짐량을 계산하는 것보다 실제 측정하는 것이 정확하다고 판단되었다.

#### 4.2 탄성받침을 고려한 처짐 비교

Fig. 7과 같이 받침의 수축량 측정을 위하여 받침옆에 LVDT1(P3)과 LVDT3(A2)을 거더중앙부(1/2)에 LVDT2를 설치하였다. 또한 좌측 편재하시는 받침 수축량이 미미하여 우측편재하시만 실험을 하였다.

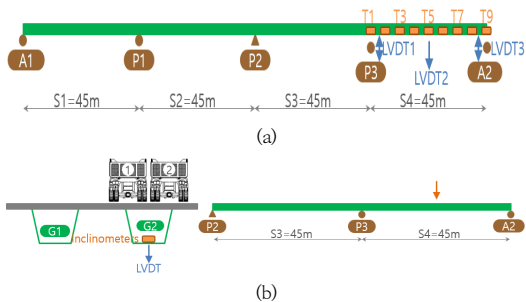


Fig. 7. Instrument Installation Location+Car load position  
(a) Instrument Installation Location  
(b) Car load position

실험결과 LVDT 1와 3의 수축량은 차량 위치에 따라 조금씩 차이는 있으나 평균 -0.18, -0.23 mm가 발생하였다. 따라서 이를 고려하여 LVDT 2의 측정값을 보정하였다. 측정 결과를 Table 3에 정리하였다.

Table 3. G2S4 Comparison

Category		Displacement[mm]	Difference [mm]	Ratio [%]	note
The Right sided (G2)	LV	-7.69	-	-	
	CS	-7.14	-0.55	92.85	
	LP	-7.21	-0.48	93.76	
	SM	-5.77	-1.92	75.03	

우측 편재하시(c1~4)에 대한 결과는 Fig. 8.에서 시간 75~150초 사이 평균값으로 -7.69, -7.14, -7.21, -5.77 mm로 계산되었다. LV를 기준으로 CS는 92.85, LP는 93.76, SM은 75.03 %의 정밀도를 나타내었다.

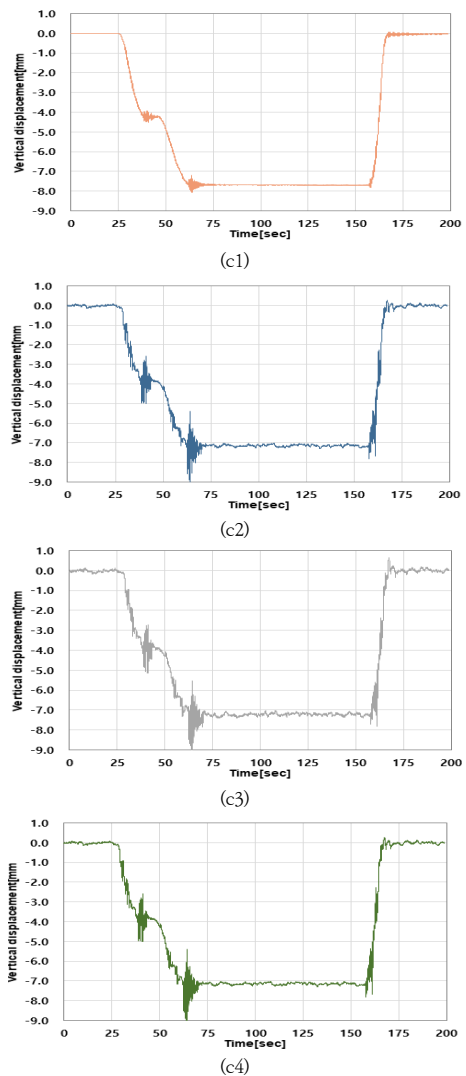


Fig. 8. Left one-sided Inclination result(LV+CS+SM+LP)  
(c1) The Left sided - LV (c2) The Left sided - CS (c3) The Left sided - LP (c4) The Left sided - SM

보간법을 이용한 처짐산정결과 좌-우측 편재하 결과 LV 측정값 대비 CS는 97.15, 92.85 %, LP는 99.31, 93.78 %, SM은 75.05, 74.99 %로 나타났다. 따라서 연속교 형식의 강거더교에서 경사계만을 이용한 처짐 산정 시 CS나 LP 보간법을 이용하여 90 %이상의 정밀도 확보가 가능할 것으로 판단된다.

## 5. 결론

본 연구는 연속 강거더교에 대하여 LVDT와 경사계를

이용하여 처짐과 경사각 측정자료를 획득하였다. 경사각 으로부터 처짐을 결정하기 위한 보간법은 Cubic Spline (CS), Lagrange Polynomial(LP), Secant Method(SM) 등 3가지를 사용하였다.

좌측편재하시, LVDT 측정값대비 CS, LP, SM은 각각 96.65, 99.16, 74.90 %의 정밀도를 나타냈다. 우측편재 하시 92.85, 93.76, 75.03 %의 정밀도를 나타냈다. 위 와 같은 결과로 세가지 결론을 도출할 수 있다.

첫째, 경사계만을 이용하여 경사각을 획득하고, 보간 법을 이용하면 연속 거더교에서 90 % 이상의 정밀도를 가진 처짐을 산정할 수 있다.

둘째, 연속 거더교에서 SM보다 CS나 LP 보간법이 더 높은 정밀도를 보여주고 있다. 따라서, 단순교 이외의 교 량에서는 CS나 LP 보간법을 우선 적용하는 것을 추천한다.

셋째, 탄성받침이 설치된 교량의 거더 처짐은 받침수 축량을 고려하여 오차를 보정하여야 한다. 탄성받침의 수축량이 경우에 따라 다양하게 나타남으로 이에대한 대 응이 필요하다.

본 논문은 연속교를 해석 대상으로 선택하였으나 향후 다른 형식 교량에 대한 추가연구가 필요하다. 또한 본 경 사계 9개를 사용하였으나 경사계 개수를 변경할 때는 추 가분석이 요구되며, 계측 정확도를 높이기 위해 첫째, 사 전답사를 통한 계측계획이 우선시되고 둘째, 일률적인 전력 공급 장치와 셋째, 결과를 즉시 확인할 수 있는 프 로그램을 준비한다면 실험에서 양질의 효과를 얻을 수 있을 것으로 판단된다.

## References

- [1] J. W. Park, S. H. Sim, Jung, H. J. jung and Billie F.Spencer, "Development of a wireless displacement measurement system using acceleration responses", *Journal of Sensors*, Vol. 13, pp. 8377-8392, 2013. DOI: <https://doi.org/10.3390/s130708377>
- [2] Wu, Yi, Jing, Li, "Deflection Measurement for Bridges Based on Secant Inclination", *Open Journal of Civil Engineering*, v.11, no.04, pp. 427-433, 2021. DOI: <https://doi.org/10.4236/ojce.2021.114025>
- [3] J. C. Jeon and H. H. Lee, "Development of displacement estimation method of girder bridges using measured strain signal induced by vehicular loads", *Engineering Structures*, Vol. 186, pp. 203-215. 2019. DOI: <https://doi.org/10.1016/i.engstruct.2019.01.107>
- [4] S. J. Cho, J. W. Park, Rajendra P. Palanisamy and S. H. Sim, "Reference-free displacement estimation of bridges using Kalman filter-based multimetric data

fusion", *Journal of Sensors*, Vol. 2016:3791856. 2016. DOI: <https://doi.org/10.1155/2016/3791856>

- [5] J. B. Won, J. W. Park, J. Y. Park, J. S. Shin and M. Y. Park, "Development of a reference-free indirect bridge displacement sensing system", *Journal of Sensors*, Vol. 21, No. 16: 5647. 2021. DOI: <https://doi.org/10.3390/s21165647>
- [6] O. Burdet and J. L. Zanella, "Automatic monitoring of bridges using electronic inclinometers", *IABSE Congress: Structural Engineering for Meeting Urban Transportation Challenges*, Lucerne, Switzerland, 18-21 Sep. 2000. DOI: <https://doi.org/10.2749/222137900796314284>
- [7] A. J. Ferguson, D. Hester and R. Woods, "A direct method to detect and localise damage using longitudinal data of ends-of-span rotations under live traffic loading." *Journal of Civil Structural Health Monitoring*, Vol. 12, pp. 141-162. 2022. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13349-021-00533-5>
- [8] M. J. Kong, J. H. Yun, S. I. Kang, H. B. Gil, "Displacement Evaluation of Cable Supported Bridges Using Inclinometers", *KSCE Journal of Civil and Environmental Engineering Research*, v.43, no.3, pp. 297-308, 2023. DOI: <https://doi.org/10.12652/KSCE.2023.43.3.0297>
- [9] H. J. Yoon, Y. J. Kim, C. B. Cho, I. J. Kwahk, "A Experimental Study on the Stiffness Characteristics of Elastomeric Bearings", *Journal of the Korean Society of Civil Engineering*, A. v.28 no.4A, pp. 475-485, 2008. DOI: <https://doi.org/10.12652/KSCE.2008.28.4A.475>

나 용 수(Yongsoo Na)

[정회원]



- 2002년 2월 : 서울과학기술대학교 토목공학과 (공학사)
- 2018년 8월 : 서울시립대학교 공과대학원 토목공학과 (공학석사)
- 2015년 3월 ~ 현재 : 서울특별시 교량안전과 주무관

• 2019년 3월 ~ 현재 : 서울시립대학교 공과대학원 토목공학과 (공학박사과정)

<관심분야>

구조물 유지관리, 교량 계측관리

조 수 진(Soojin Cho)

[정회원]



- 2004년 2월 : 한국과학기술원  
건설및환경공학과 (공학사)
- 2005년 8월 : 한국과학기술원  
건설및환경공학과 (공학석사)
- 2011년 2월 : 한국과학기술원  
건설및환경공학과 (공학박사)
- 2016년 3월 ~ 2020년 2월 : 서울  
시립대학교 토목공학과 조교수
- 2020년 3월 ~ 현재 : 서울시립대학교 토목공학과 부교수

〈관심분야〉

구조물 유지관리, 영상처리, 딥러닝