

직교이방성 박판 및 후판의 해석연구

박원태* · 최재진*

Study on the Analysis of Orthotropic Thin Plates and Orthotropic Thick Plates

Weon Tae Park* and Jae Jin Choi*

요약 본 연구에서는 직교이방성 박판 및 후판의 휨문제에 대한 해석결과를 제시하였다. 수치해석방법으로는 유한요소법을 사용하였으며, 직교이방성판 휨문제에 대한 지배방정식은 Kirchhoff 가정에 의한 박판이론과 Mindlin 가정에 의한 후판이론을 이용하여 유도하였으며 판의 폭-두께비의 변화에 따른 해석결과를 비교 검토하였다.

Abstract In this study, it is presented analysis results of bending problems in the orthotropic thick plates and the orthotropic thin plates. Finite element method in this analysis was used. Both Kirchhoff's assumptions and Mindlin assumptions are used as the basic governing equations of bending problems in the orthotropic plates. The analysis results are compared between the orthotropic thick plates and the orthotropic thin plates for the variations of thickness-width ratios.

Key Words : orthotropic thick plates, orthotropic thin plates, finite element method, Kirchhoff's assumptions, Mindlin's assumptions

1. 서론

얇은 두께를 가진 등방성 탄성판의 응력해석은 고전적 박판이론에 의한 연구 이래로 많은 사람들의 연구대상이 되어 왔다[1, 2].

그러나 재질이 직교이방성이고, 전단변형의 효과를 무시할 수 없는 두꺼운 후판인 경우에는 보다 정확한 해석을 위해 엄밀한 이론이 필요하게 된다.

Kirchhoff 가정에 의한 박판이론에서는 변형전에 중면에 수직인 단면은 변형후에도 평면을 유지하고 중면에 수직이다 라고 가정하여 전단변형효과를 무시하였다. 반면에 Mindlin 가정에 의한 후판이론에서는 변형후 단면이 평면을 유지하지만 중면에 수직일 필요는 없다 라고 가정하여 전단변형효과를 고려하였다[3].

최근 국내에서 새로운 개념의 복합재료를 사용한 교량의 등장과 함께 건설분야에도 전통적 재료인 등방성 재료가 아닌 복합재료를 사용한 구조물에 대한 많은 연구가 진행되어 오고 있다[4, 5]. 본 연구에서는 재질이 직교이방성이고, 폭-두께비의 변화에 따른 후판 및 박

판이론에 의한 해석결과를 비교 검토하여, 건물의 슬래브 및 교량상판등에 새롭게 등장하는 건설재료에 대한 보다 정확한 해석기법을 제시하고자 한다.

2. 기본이론

2.1 판의 변위벡터와 변형률벡터

Figure 1과 같이 박판이론에 의한 판의 변위 벡터(δ_K), 변형률 벡터(ϵ_K)와 각각 식 (1)과 식 (2)와 같이 나타낼 수 있다.

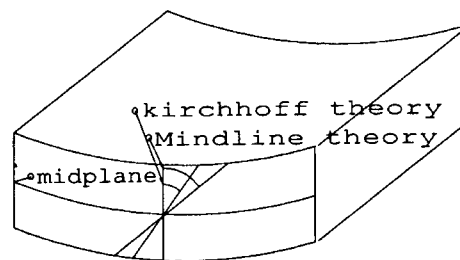


Figure 1. Cross-sectional deformation of plate.

*천안공업대학 토목과
Tel: 041-550-0355

$$\delta_K = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\varepsilon_K = \{\chi_K\} \quad (2)$$

여기서 χ_K 식 (3)과 같다.

$$\chi_K = \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{y} \\ -\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right) \end{Bmatrix} \quad (3)$$

후판이론에서의 판의 변위벡터(δ_M)와 변형률벡터(ε_M)는 각각 식 (4)와 식 (5) 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta_M = \begin{Bmatrix} w \\ \bar{\theta}_x \\ \bar{\theta}_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\varepsilon_M = \begin{Bmatrix} \chi_M \\ \phi_M \end{Bmatrix} \quad (5)$$

여기서 χ_M, ϕ_M 은 식 (6)과 식 (7)과 같다.

$$\chi_M = \begin{Bmatrix} \bar{\chi}_x \\ \bar{\chi}_y \\ \bar{\chi}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{\theta}_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{\theta}_y}{\partial y} \\ -\left(\frac{\partial \bar{\theta}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\theta}_y}{\partial x}\right) \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$\phi_M = \begin{Bmatrix} -\phi_x \\ -\phi_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{\theta}_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \bar{\theta}_y \end{Bmatrix} \quad (7)$$

박판이론과 후판이론에 의한 직교이방성 판요소의 모멘트, 전단력과 변형률과의 관계는 식 (8)과 식 (9) 및 식 (10)과 같다.

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}_K = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_x \\ x_y \\ x_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}_M = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x}_x \\ \bar{x}_y \\ \bar{x}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix}_M = \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} \quad (10)$$

여기서,

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

$$A_{ij} = K \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (z_k - z_{k-1}) \quad (i, j = 4, 5)$$

D_{ij} 는 휨강도 그리고 A_{ij} 는 전단강도, K 는 전단보정계수를 의미한다. 또한 $[\bar{Q}_{ij}]_k$ 는 재료축에서의 재료강도를 구조축으로 좌표변환하여 구한 재료강도를 나타낸다 [3, 6, 7].

박판이론과 후판이론에 의한 판의 total potential energy는 식 (11)과 식 (12)로 나타낼 수 있다.

$$\Pi_K = \frac{1}{2} \int_A M_x \chi_x + M_y \chi_y + M_{xy} \chi_{xy} - \int_A q w dA \quad (11)$$

$$\Pi_M = \frac{1}{2} \int_A M_x \bar{\chi}_x + M_y \bar{\chi}_y + M_{xy} \bar{\chi}_{xy} + Q_x \phi_x + Q_y \phi_y dA - \int_A q w dA \quad (12)$$

2.2 요소내 변위와 형상함수

본 연구에서는 자연좌표계(r, s)를 사용하여 직각좌표계(x, y)와 요소변위를 같은 보간함수(h_i)로 나타낼 수 있는 4절점 "Iso-parametric 판요소"를 사용하였으며, 판요소내의 임의의 점(x, y)에서의 박판 및 후판이론에서의 변위는 형상함수를 이용하여 요소절점의 변위로 나타내면 식 (13)과 같다.

$$\delta_K = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 h_i(r,s) \delta_K^i, \quad \delta_M = \begin{Bmatrix} w \\ \bar{\theta}_x \\ \bar{\theta}_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 h_i(r,s) \delta_M^i \quad (13)$$

단, $h_i(r,s)$

$$= \begin{bmatrix} h_1(r,s) & 0 & 0 & \dots & h_4(r,s) & 0 & 0 \\ 0 & h_1(r,s) & 0 & \dots & 0 & h_4(r,s) & 0 \\ 0 & 0 & h_1(r,s) & \dots & 0 & 0 & h_4(r,s) \end{bmatrix} = [h_1(r,s)\Pi, \dots, h_4(r,s)\Pi] \quad (14)$$

여기서, $h_i(r,s), \Pi, \delta_K^i, \delta_M^i$ 는 식 (15)~(17)과 같다.

$$h_1(r,s) = \frac{1}{4}(1+r)(1-s), h_2(r,s) = \frac{1}{4}(1-r)(1+s)$$

$$h_3(r,s) = \frac{1}{4}(1-r)(1-s), h_4(r,s) = \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \quad (15)$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i=1, \dots, 4 \quad (16)$$

$$\delta_K^i = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix}, \quad \delta_M^i = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix}, \quad i=1, \dots, 4 \quad (17)$$

2.3 변형률 매트릭스

박판이론 의한 판의 변형률과 변위관계는 식 (18)과 같다.

$$\epsilon_K = \{\chi_K\} = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial h_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial h_i}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial h_i}{\partial y} & -\frac{\partial h_i}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{pmatrix}$$

$$= [B_K^1, \dots, B_K^4] \delta_K^i = \sum_{i=1}^4 B_K^i \delta_K^i \quad (18)$$

여기서, $B_K^i = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial h_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial h_i}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial h_i}{\partial y} & -\frac{\partial h_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (19)$

후판이론에 의한 판의 변형률과 변위관계는 식 (20)과 같다.

$$\epsilon_M = \begin{Bmatrix} \chi_M \\ \varphi_M \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial h_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial h_i}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial h_i}{\partial y} & -\frac{\partial h_i}{\partial x} \\ \frac{\partial h_i}{\partial x} & -h_i & 0 \\ \frac{\partial h_i}{\partial y} & 0 & -h_i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{pmatrix}$$

$$= [B_M^1, \dots, B_M^4] \delta_M^i = \sum_{i=1}^4 B_M^i \delta_M^i \quad (20)$$

여기서, $B_M^i = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial h_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial h_i}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial h_i}{\partial y} & -\frac{\partial h_i}{\partial x} \\ \frac{\partial h_i}{\partial x} & -h_i & 0 \\ \frac{\partial h_i}{\partial y} & 0 & -h_i \end{bmatrix} \quad (21)$

식 (19)과 식 (21)에서 변형률 매트릭스 B_K^i, B_M^i 에 있는 형상함수 h_i 는 자연좌표계(r,s)로 정의되어 있기 때문에 직각좌표계로 편미분하기 위해서 좌표변환을 해야 한다. 형상함수의 직교좌표계에 대한 편도함수는 Jacobian 매트릭스를 사용하여 자연좌표계에 대한 편도함수로 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial x} \\ \frac{\partial h_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial r} \\ \frac{\partial h_i}{\partial s} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

식 (22)에서 은 식 (23)과 같다.

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial x}{\partial s} \\ -\frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (23)$$

따라서 박판 및 후판이론에서의 변형률 매트릭스 B_K^i, B_M^i 은 식 (24)과 식 (25)과 같이 표시할 수 있다.

$$B_K^i = \begin{bmatrix} 0 & -\left(J_{11} \frac{\partial h_i}{\partial r} + J_{12} \frac{\partial h_i}{\partial s}\right) & 0 \\ 0 & 0 & -\left(J_{21} \frac{\partial h_i}{\partial r} + J_{22} \frac{\partial h_i}{\partial s}\right) \\ 0 & -\left(J_{21} \frac{\partial h_i}{\partial s} + J_{22} \frac{\partial h_i}{\partial r}\right) & -\left(J_{11} \frac{\partial h_i}{\partial s} + J_{12} \frac{\partial h_i}{\partial r}\right) \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$B_M^i = \begin{bmatrix} 0 & -\left(J_{11} \frac{\partial h_i}{\partial r} + J_{12} \frac{\partial h_i}{\partial s}\right) & 0 \\ 0 & 0 & -\left(J_{21} \frac{\partial h_i}{\partial r} + J_{22} \frac{\partial h_i}{\partial s}\right) \\ 0 & -\left(J_{21} \frac{\partial h_i}{\partial s} + J_{22} \frac{\partial h_i}{\partial r}\right) & -\left(J_{11} \frac{\partial h_i}{\partial s} + J_{12} \frac{\partial h_i}{\partial r}\right) \\ -\left(J_{11} \frac{\partial h_i}{\partial r} + J_{12} \frac{\partial h_i}{\partial s}\right) & -h_i & -\left(J_{21} \frac{\partial h_i}{\partial s} + J_{22} \frac{\partial h_i}{\partial r}\right) \\ 0 & 0 & -h_i \end{bmatrix} \quad (25)$$

2.4 요소강도 매트릭스

본 연구에서의 요소강도 매트릭스는 전Potential energy(=π)의 정류조건으로부터 구할 수 있다. 즉,

$$\frac{\partial \pi}{\partial \delta} = \frac{\partial \pi_e}{\partial \delta_e} = 0 \tag{26}$$

결국 박판이론 및 후판이론에서의 요소강도 매트릭스는 식 (27), (28)과 같다.

$$K_K^e = \int_{A_e} B_K^T D_K B_K dx dy = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} B_K^T D_K B_K \|J\| d\xi d\eta \tag{27}$$

$$K_M^e = \int_{A_e} B_M^T D_M B_M dx dy = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} B_M^T D_M B_M \|J\| d\xi d\eta \tag{28}$$

식 (27)과 식 (28)에서, $B_K^T D_K B_K \|J\| d\xi d\eta$, $B_M^T D_M B_M \|J\| d\xi d\eta$ 는 대단히 복잡하기 때문에 직접 적분하지 않고 수치적분을 하게 되며 일반적으로 식 (29)와 같은 Gauss-Legendre의 구적법을 사용하게 된다.

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_{+1}^{-1} \int_{+1}^{-1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= \int_{+1}^{-1} \sum_{+1}^n w_j f(\xi_i, \eta) d\eta = \int_{+1}^{-1} \phi(\eta) d\eta \\ &= \sum_{i=1}^n \phi(\eta_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j f(\xi_i, \eta_j) \end{aligned} \tag{29}$$

여기서, ξ_i, η_j 는 i, j 번째 Gauss point의 ξ, η 의 좌표이다.

3. 수치해석의 적용

본 연구의 해석방법에 의한 수치해석을 위해 MIDAS/CIVIL 5.8 프로그램을 사용하였으며, 해석결과의 타당성의 확인을 위해 Table 1에서의 같은 등방성재료의 물성치를 사용하여 네변($a = b = 8$ m)이 단순지지된 사각형판에 등분포하중 $q = 1,000$ N/m²을 재하시켰을 때 전

Table 1. Engineering constants of isotropic material and orthotropic materials

	engineering constants
isotropic material	$E = 2.1 \times 10^{11}$ N/m ² , $\nu = 0.3$
orthotropic materials	$E_1 = 20.83 \times 10^6$ N/m ² , $E_2 = 10.94 \times 10^6$ N/m ² $G_{13} = 3.71 \times 10^6$ N/m ² , $G_{12} = 6.10 \times 10^6$ N/m ² $G_{23} = 6.9 \times 10^6$ N/m ² , $\nu_{12} = 0.44$, $\nu_{21} = 0.23$

단변형효과를 고려한 Reddy 이론과 본 연구에서의 후판이론 및 전단변형효과를 무시한 고전적인 판이론과 본 연구에서의 박판이론에 의한 해석결과와 비교 검토하였다.

Table 2에서의 같이 판의 폭-두께비를 5~100으로 변화시켰을 때에 판의 중앙점의 처짐값은 전단변형에 의한 효과를 고려하는 경우 차이가 발생하게 된다. 전단변형효과로 인한 판의 처짐은 판의 폭-두께비가 감소할수록 전단변형효과를 무시한 판이론에 의한 값과 차이를 보이게 된다. 판의 폭-두께비가 작을수록, 즉 판의 두께가 두꺼울수록 전단변형효과를 고려한 처짐값이 증가하며, 폭-두께비가 클수록 처짐이 감소하여 일정한 값을 가짐을 알 수 있다.

직교이방성인 재질 경우에는 Table 1과 같은 직교이방성 재료의 물성치를 사용하여 네변($a = b = 8$ m) 단순지지로 구속된 사각형판에 등분포하중($\theta = 1,000$ N/m²)을 재하시켰을 때, Reddy이론과 본 연구에서의 박판이론과 후판이론에 의한 해석결과를 Table 3에 제시하였다.

재질이 직교이방성인 경우, 등방성인 경우보다 동일한 두께-폭비에 대해 훨씬 전단변형효과가 크게 나타남을 알 수 있다.

Figure 2는 판의 두께-폭비가 0.1이고 네변 단순지지로 구속된 경우 판 전체의 처짐값에 대해 박판이론과 후판이론에 의해 해석한 예를 보인 것이다.

Table 2. Deflections of uniformly loaded isotropic square plates at the center according to the classical plate theory, Reddy plate theory, thin plate theory and thick plate theory [2], [8, 9]

a/t		5	10	20	100
전단변형무시	고전이론	2.1660×10 ⁻⁷	1.6928×10 ⁻⁶	1.3542×10 ⁻⁵	1.6928×10 ⁻³
	박판이론	2.1117×10 ⁻⁷	1.6893×10 ⁻⁶	1.3515×10 ⁻⁵	1.6874×10 ⁻³
전단변형고려	Reddy이론	2.5503×10 ⁻⁷	1.7775×10 ⁻⁶	1.3695×10 ⁻⁵	1.6929×10 ⁻³
	후판이론	2.5449×10 ⁻⁷	1.7723×10 ⁻⁶	1.3666×10 ⁻⁵	1.6900×10 ⁻³

Table 3. Deflections of uniformly loaded orthotropic square plates at the center according to the Reddy plate theory, thin plate theory and thick plate theory [2], [8, 9]

t/a		0.05	0.10	0.14
전단변형 무시	박판 이론	17.6727×10^{-2}	2.2091×10^{-2}	8.0510×10^{-3}
전단변형 고려	Reddy 이론	18.0012×10^{-2}	2.3744×10^{-2}	9.2241×10^{-3}
	후판 이론	17.9307×10^{-2}	2.3574×10^{-2}	9.1560×10^{-3}

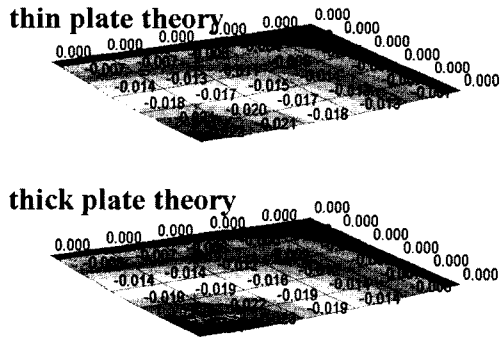


Figure 2. Deflections in uniformly loaded orthotropic square plates with all edges simply supported.

5. 결 론

본 연구는 직교이방성 재료로 구성된 사각형판에 등분포하중을 재하하였을 때 Kirchhoff 가정에 의한 박판이론과 Mindline 가정에 의한 후판 이론을 이용하여 판의 거동을 분석하였다. 두께-폭비가 0.14에서 박판이론과 후판이론에 의한 판의 중앙점의 처짐값에서 약 12.7% 이상의 차이를 보였다. 판의 중앙점에서의 처짐값이 폭-두께비가 등방성 재질보다는 직교이방성재질로 구성된 판에서 훨씬 전단변형효과에의 영향이 커짐을 알

수 있었다. 따라서 두께-폭비가 0.14 이상이고, 재질 또한 직교이방성인 경우 전단변형효과를 고려하는 것이 정확한 해를 기대할 수 있다.

감사의 글

본 연구의 수치해석 모델작성에 도움을 주신 (주)마이다스아이티 기술연구소 정진상 팀장님께 감사드립니다.

참고문헌

- [1] Rudolph Szilard, "Theory and Analysis of Plates", PRENTICE-HALL, Inc, pp. 28-90, 1974.
- [2] Stephen P. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, "Theory of Plates and Shells", McGraw-Hill 2nd Ed., pp. 118-120, 1959.
- [3] 박원태, "전단변형을 고려한 비등방성 Skew Plates의 해석", 서울시립대학교 대학원 박사학위논문, pp. 27-28, 1993.
- [4] 장석윤, 이상열, 유용민, "자유경계를 갖는 비등방성판의 유한차분 안정성해석", 한국강구조학회논문집 제12권2호, pp. 221-230, 2000.
- [5] 장석윤, 배한술, 손병직, "자유경계를 갖는 비등방성 원뿔형 쉘의 해석", 한국강구조학회논문집 제12권 4호, pp. 417-428, 2000.
- [6] J. N. Reddy, "Mechanics of Laminated Composite Plates", CRC Press, 1997.
- [7] Robert M. Jones, "Mechanics of Composite Materials", McGraw-Hill, 1975.
- [8] Hou-Cheng Huang, "Static and Dynamic Analyses of Plates and Shells", Springer-Verlag Berlin Heidelberg Company, Inc., pp. 10-18, 1989.
- [9] J. N. Reddy, "Energy and Variational Methods in Applied Mechanics", John Willy & Sons, New York, pp. 233-247, 1995.