

점진기능재료(FGM) 판의 휨, 진동 및 좌굴 해석

이원홍¹, 한성천², 박원태^{3*}

Bending, Vibration and Buckling Analysis of Functionally Graded Material Plates

Won-Hong Lee¹, Sung-Cheon Han² and Weon-Tae Park^{3*}

요 약 본 논문에서는 Navier 방법을 이용한 점진기능재료 판의 정적 응답과 고유진동수 그리고 좌굴하중을 연구하였다. S 형상 함수를 이용한 세라믹과 금속의 체적요소의 변화에 따른 점진기능재료 판의 고유치 문제를 연구하였다. 점진기능재료 판의 면내 강성, 휨 강성 및 전단 강성의 수식은 등질 요소보다 복잡한 재료의 성질들로 결합되어 있다. 본 연구의 결과를 검증하기 위해 고전적 이론에 의한 직사각형 판의 결과를 제시하였다. 적층복합 구조 및 S 형상 점진기능재료 구조의 다양한 예제를 제시하였다. 해석결과는 참고문헌의 결과들과 잘 일치함을 알 수 있었다.

Abstract In this paper, we investigate the static response, natural frequencies and buckling loads of functionally graded material (FGM) plates, using a Navier method. The eigenvalues of the FGM plates and shells are calculated by varying the volume fraction of the ceramic and metallic constituents using a sigmoid function, but their Poisson's ratios of the FGM plates and shells are assumed to be constant. The expressions of the membrane, bending and shear stiffness of FGM plates are more complicated combination of material properties than a homogeneous element. In order to validate the present solutions, the reference solutions of rectangular plates based on the classical theory are used. The various examples of composite and FGM structures are presented. The present results are in good agreement with the reference solutions.

Key Words : Bending, Vibration, Buckling Functionally graded material Navier method

1. 서론

한 성분에서 다른 성분으로 합성 구배에 의해 특징지어지는 점진기능재료(Functionally Graded Material)는 2개의 성분이 복합적으로 구성된 재료이다. 점진기능재료의 미세 구조적 연속적인 변화는 2개의 상이한 재료가 함께 결합되어 있기 때문에 접촉면을 가로질러 역학적 성질의 불일치를 갖는 섬유 보강 적층 복합 재료와 구별된다. 이러한 이유로 섬유-수지 복합 재료의 구성 성분은 극히 높은 열 하중 하에서 쉽게 분리되기 쉽다. 게다가, 균열은 접촉면에서 시작해서 취약한 재료 단면으로 성장하기 쉽다. 추가적인 문제는 복합 재료의 섬유와 수지의 열 팽창 계수 차이에 의한 잔류 응력의 존재이다. 점진기능재료에서 이런 문제들을 구성 성분이 접촉면의 수직

방향으로 갑작스럽게 변화하는 것보다 구성 성분의 체적요소를 점차적으로 변화시킴으로써 제거하거나 줄일 수 있다 (Hirano 와 Yamada, 1988). 금속-세라믹 복합 판은 다른 공학 분야에 널리 이용되고 있다. 높은 외부 면내 압력과 공명 거동이 복합 판과 셸 구조물에 작용할 경우 구조물에 발생한 불안정한 상태는 구조적 안정에 영향을 줄 것이고, 구조물은 파괴되기 쉬운 상태가 될 것이다. 따라서, 점진기능재료 판의 역학적 휨, 진동과 좌굴 거동에 대한 이해는 판 구조물의 안전을 평가하기 위해 매우 중요하다. Praveen 과 Reddy (1988) 는 전단 변형률과 회전 관성이 고려된 판 유한 요소를 사용한 점진기능재료 세라믹금속판의 정적 및 동적 거동을 연구하였다. 점진기능재료 판의 좌굴 해석은 고유치 문제의 또 다른 분야이다. 상대적으로 점진기능재료 판의 자유 진동과 좌굴 해석은

¹진주산업대학교 토목공학과

²대원과학대학 토목과

³공주대학교 건설환경공학부

*교신저자: 박원태(pwtae@kongju.ac.kr)

주목을 받지 못했다.

지수함수법 (Delale 과 Erdogan, 1983)과 거듭제곱법 (Bao 와 Wang, 1995)을 사용한 점진기능재료는 재료는 비록 연속이지만 급속히 변화함으로써 접촉면의 한 곳에서 응력집중이 나타난다. Chung 과 Chi (2001)는 새로운 체적요소를 정의하는 2개의 거듭제곱법 함수로 된 S 형상 점진기능재료를 제안하였다. Chi 와 Chung (2002)은 S 형상 점진기능재료의 사용으로 균열체의 응력 밀도 계수를 줄일 수 있음을 나타내었다. 최근에 Zenkour (2005)는 개선된 삼각 급수 판 이론을 이용하여 단순 지지된 점진기능재료 후판의 자유 진동 해석을 연구하였다.

본 연구의 목적은 재료 성질이 S 형상 함수에 의한 구성재료의 체적요소에 따라 판의 두께를 따라서 연속적으로 변하는 점진기능재료 판의 정적, 진동 및 좌굴 해석을 수행하여 정확한 처짐, 진동수 그리고 좌굴 하중을 구하는 것이다. 적층 복합 판 및 점진기능재료 판의 정확한 처짐, 좌굴 및 자유 진동 해석을 위해 Navier 방법을 사용하였다. 전단 변형 효과를 고려하기 위해 1차 Mindlin/Reissner 전단변형이론을 이용하였다. 점진기능재료판의 Navier 급수해는 하중 및 변위를 푸리에 급수 전개를 하여 구하였으며, 여러 참고문헌의 해석 결과와 비교 검토하였다.

2. 점진기능재료

점진기능재료는 미리 정해진 모양으로 재료의 구성성분을 연속적으로 변화시킴으로써 제작된다. 점진기능재료의 가장 두드러진 특징은 연속적인 등급화된 성질을 갖는 비균질 미세 구조라는 것이다. 점진기능재료는 체적요소의 변화에 의해서 정의될 수 있다. 대부분의 연구자들은 거듭제곱 함수, 지수 함수, 혹은 체적요소를 나타내는 S 형상 함수를 사용하였다. 본 연구에서는 접촉면의 한 곳에 나타나는 응력 집중을 피하기 위해서(Lee와 Erdogan, 1995) S 형상 함수가 사용된다.

S 형상 점진기능재료 구조물 해석을 위해 Chung과 Chi(2001)의 S 형상 함수를 사용하였다. 응력의 완전한 분포를 확보하기 위해 2개의 거듭제곱 함수를 이용한 체적요소가 식(1)과 같이 정의된다(그림 1 참조).

$$V_f^1(t) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - t}{h/2} \right)^p \quad \text{for } 0 \leq t \leq h/2 \quad (1a)$$

$$V_f^2(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + t}{h/2} \right)^p \quad \text{for } -h/2 \leq t \leq 0 \quad (1b)$$

여기서 h 는 판의 두께이고 p 는 매개변수이다.

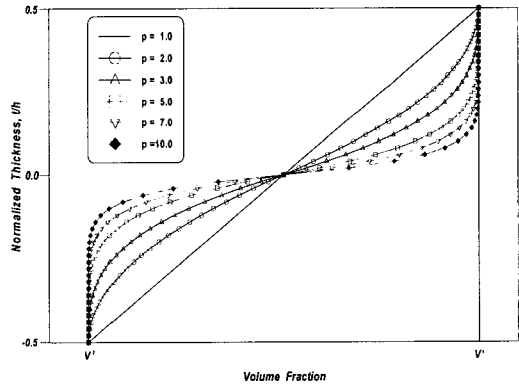
혼합 법칙을 이용하여, S 형상 점진기능재료의 재료성질은 식(2)와 같이 계산할 수 있다.

$$H(t) = V_f^1(t)H_1 + (1 - V_f^1(t))H_2 \quad \text{for } 0 \leq t \leq h/2 \quad (2a)$$

$$H(t) = V_f^2(t)H_1 + (1 - V_f^2(t))H_2 \quad \text{for } -h/2 \leq t \leq 0 \quad (2b)$$

여기서 H_1 과 H_2 는 각각 판의 상면과 하면에서의 재료 성질이다.

식(2a)와 (2b)에서 체적요소의 변화가 S 형상 분포를 나타냄을 보여주고 있다. 그리고 이러한 점진기능재료 구조물을 S 형상 점진기능재료 구조물이라고 한다. 탄성 직사각형 판을 고려해 보았을 때 위층과 아래층 면에서 재료의 성질, 탄성 계수와 프아송 비는 다르지만 요구되는 성능에 따라 미리 규정된 값이다. 그러나 두께 방향(t -축)으로 판과 셀의 탄성 계수, 밀도와 프아송 비는 연속적으로 변한다. 즉, $E = E(t)$, $\rho = \rho(t)$, $\nu = \nu(t)$ 이다.



[그림 1] S 형상 점진기능재료 판과 셀의 체적요소의 변화

점진기능재료 판의 선형 적합 관계식은 식(3)과 같다.

$$\begin{Bmatrix} S_r \\ S_s \\ S_{rs} \\ S_{rr} \\ S_{sr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_r + t \kappa_r \\ \bar{\epsilon}_s + t \kappa_s \\ \bar{\epsilon}_{rs} + t \kappa_{rs} \\ \gamma_{rr} \\ \gamma_{sr} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

여기서 S 는 응력, $\bar{\epsilon}$ 는 면내 변형률, κ 는 곡률, γ 는 전단 변형률 그리고

$$Q_{11} = \frac{E(t)}{1-\nu(t)^2}, Q_{12} = \nu(t)Q_{11}, Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(t)}{2[1+\nu(t)]} = G(t) \quad (4)$$

따라서 E, G, ν 그리고 응력과 Q_{ij} 는 식(2a, b)에 의하여 판의 두께를 따라 선형적으로 변한다. 합응력은 식(11)과 같다.

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_x \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_x \end{Bmatrix} dt = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_x \\ \bar{\epsilon}_y \\ \bar{\epsilon}_x \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_x \end{Bmatrix} \quad (5a)$$

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_x \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} t \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_x \end{Bmatrix} dt = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_x \\ \bar{\epsilon}_y \\ \bar{\epsilon}_x \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_x \end{Bmatrix} \quad (5b)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} Q_{rt} \\ Q_{st} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} S_{rt} \\ S_{st} \end{Bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \bar{A}_{55} & 0 \\ 0 & \bar{A}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{rt} \\ \gamma_{st} \end{Bmatrix} \quad (5c)$$

여기서, A_{ij} 의 계수들은 면내 강성 행렬, D_{ij} 는 휨 강성 행렬, B_{ij} 는 휨-면내 연계 강성 행렬, \bar{A}_{ij} 는 전단 강성 행렬을 나타내며, 이들 A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} 및 \bar{A}_{ij} 는 식(6)과 같다.

$$\begin{aligned} A_{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(t)}{1-\nu(t)^2} dt, & A_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\nu(t)E(t)}{1-\nu(t)^2} dt, & A_{66} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{1-\nu(t)}{2} \right) \frac{E(t)}{1-\nu(t)^2} dt, \\ B_{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{z E(t)}{1-\nu(t)^2} dt, & B_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{z \nu(t) E(t)}{1-\nu(t)^2} dt, & B_{66} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{1-\nu(t)}{2} \right) \frac{t E(t)}{1-\nu(t)^2} dt, \\ D_{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{t^2 E(t)}{1-\nu(t)^2} dt, & D_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{t^2 \nu(t) E(t)}{1-\nu(t)^2} dt, & D_{66} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{1-\nu(t)}{2} \right) \frac{t^2 E(t)}{1-\nu(t)^2} dt, \\ \bar{A}_{44} &= \bar{A}_{55} = k_s \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{1-\nu(t)}{2} \right) \frac{E(t)}{1-\nu(t)^2} dt. \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 k_s 는 Reissner에 의해 제안된 전단 보정 계수로서 5/6값을 사용하였다.

3. Navier 해

단순 지지된 판에 대하여 운동 방정식으로부터 Navier 해를 구할 수 있다. 1차 전단변형 판 이론에 대한 단순 지지 경계 조건은 SS-1 경계 조건이다(Reddy, 2004). SS-1 경계조건을 만족하는 변위는 식(7)과 같다.

$$\bar{u}(r, s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn}(\hat{t}) \Lambda_1 \quad (7a)$$

$$\bar{v}(r, s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{mn}(\hat{t}) \Lambda_2 \quad (7b)$$

$$\bar{w}(r, s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn}(\hat{t}) \Lambda_3 \quad (7c)$$

$$\varphi_r(r, s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_{mn}(\hat{t}) \Lambda_1 \quad (7d)$$

$$\varphi_s(r, s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Y_{mn}(\hat{t}) \Lambda_2 \quad (7e)$$

여기서 \hat{t} 는 시간이고

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \cos \alpha r \sin \beta s, & \Lambda_2 &= \sin \alpha r \cos \beta s, \\ \Lambda_3 &= \sin \alpha r \sin \beta s. \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 $\alpha = m\pi/a$ and $\beta = n\pi/b$.

식(7)을 평형방정식에 대입하면 식(9)와 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$[\Gamma] \cdot \Delta = \cdot 0 \quad (9)$$

여기서 $\Delta = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, Y_{mn}\}$ 그리고

$$[\Gamma] = [\mathbf{K}] - \lambda, [\mathbf{G}] : \text{좌굴 해석인 경우} \quad (10)$$

$$[\Gamma] = [\mathbf{K}] - \omega^2 [\mathbf{M}] : \text{진동 해석인 경우} \quad (11)$$

여기서 $[\mathbf{K}]$ 는 강성 행렬, $[\mathbf{G}]$ 는 기하학적 강성 행렬, $[\mathbf{M}]$ 은 질량 행렬, λ 는 좌굴하중 그리고 ω 고유 진동수이다. 판의 밀도는 S형상 함수에 따라 변하고 S형상 접진기능재료의 거동제곱 매개변수는 판의 두께를 따라서 재료 성질의 상이한 분포를 얻기 위해서 선택적으로 사용할 수 있다. S형상 함수의 변화에 따라 여러 가지 관성력이 식(12)와 같이 계산된다.

$$(I_0, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(t) (1, t^2) dt \quad (12)$$

여기서 I_0 와 I_2 각각 수직과 회전 관성력 계수이다

4. 수치 계산에

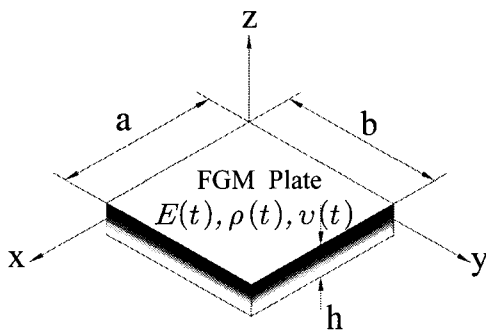
본 해석 기법의 성능을 검증하기 위하여, 적층 복합 판의 휨, 진동 및 좌굴 해석의 결과를 제시하였다. 판의 포아송 비는 상수로 가정한다. 그러나, 점진기능재료 판의 두께 방향으로 탄성 계수는 S 형상 함수로 변한다. 판의 하면은 금속으로 가정되고, 판의 상면에서는 순수 세라믹으로 가정된다. 본 해석에서는, 점진기능재료 판의 역학적 휨, 진동 및 좌굴 해석을 고려한다.

4.1 휨 해석

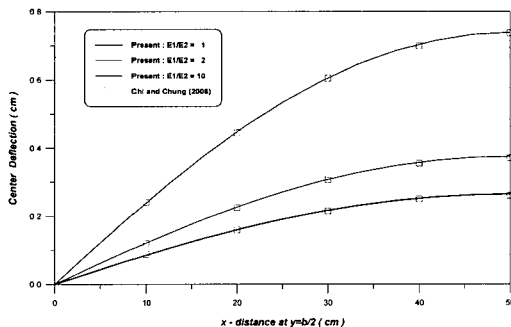
4.1.1 단순 지지된 직사각형 점진기능재료 등방성판

첫번째로, 본 연구의 검증을 위해 고전적 판이론(Chi와 Chung, 2006a)에 의한 S 형상 점진기능재료 판(그림 2)의 해석 결과를 1차 전단변형이론에 의한 본 연구의 해석 결과와 비교하였다. 재료 및 기하학적 성질은 다음과 같다.

E	ν	$a=b$	h	q_0
$2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$	0.3	100 cm	2 cm	1.0 kg/cm^2



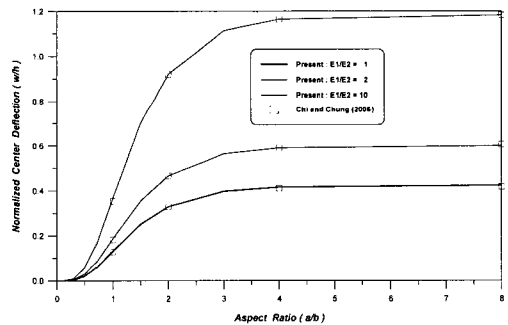
[그림 2] 점진기능재료 판의 기하학적 형상



[그림 3] 상이한 E_1/E_2 에 대한 x 방향의 S-점진기능재료 판의 처짐

Chi와 Chung (2006b)에 의한 고전 이론과 1차이론에 의한 해석 결과를 그림 3에 나타내었다. 그림 3은 상이한 E_1/E_2 에 대해서 x 방향을 따라 S 형상 점진기능재료 판의 처짐을 나타낸다. E_1/E_2 가 커질수록 점진기능재료 판의 강성이 줄어들기 때문에 E_1/E_2 가 커질수록 점진기능재료 판의 처짐이 커짐을 보여주고 있다. 본 연구의 해석 결과와 참고 문헌의 결과가 매우 잘 일치하였다.

형상비의 변화가 점진기능재료 판의 처짐에 끼치는 영향을 조사하기 위해서, 점진기능재료 판의 중앙점의 처짐을 그림 4에 나타내었다. 형상비가 3 보다 적을 때에는 중앙점의 처짐이 지속적으로 증가하였으나 3 이상인 경우에는 일정한 값에 수렴됨을 알 수 있었다. 그림 3과 4에서, 폭-두께비가 매우 큰 경우($a/h = 50$)에 참고문헌의 고전적 전단변형이론에 의한 결과와 본 연구의 1차 전단변형이론에 의한 결과가 매우 잘 일치함을 보여주고 있다. 기존의 여러 연구(Reddy, 1979, 2004)에서 알 수 있듯이 폭-두께비가 작아질수록 전단변형 효과에 의해 두 결과의 차이는 커질 것 이다.

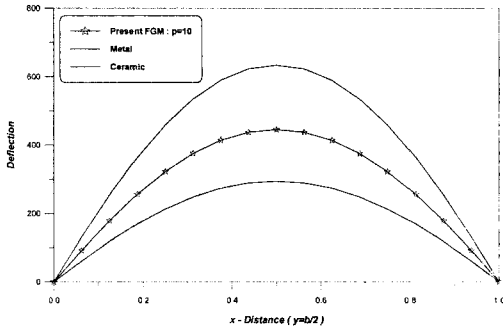


[그림 4] 상이한 E_1/E_2 에 대한 형상비에 따른 S-점진기능재료판의 정규화된 중앙점의 처짐

그림 5에 x 축 방향중앙선에서의 점진기능재료 판과 금속(Metal) 판 그리고 세라믹 판의 처짐을 나타내었다. 재료의 성질은 다음과 같다.

E_1	E_2	ν	a/h	q_0
$151 \times 10^9 \text{ Pa}$	$70 \times 10^9 \text{ Pa}$	0.3	100	1.0 N/m^2

그림 5에서 점진기능재료 판의 매개변수를 10으로 선택하였을 때 처짐곡선은 금속 판의 처짐과 세라믹 판의 처짐의 중간 정도에 분포하였다. 이러한 분포는 점진기능재료의 탄성계수가 금속의 탄성계수와 세라믹의 탄성계수 사이에서 변화하는 것을 나타낸다.



[그림 5] 점진기능재료판, 금속 판 그리고 세라믹 판의 x 축 방향 처짐

4.2 진동해석

4.2.1 단순지지된 적층 복합판

첫번째 예제에서, 적층판의 고유진동수를 계산하여, 표1에 나타내었다. 적층 복합 판에 대해서, 재료 성질은 식(13, 14)와 같다:

Material 1(MAT 1):

$$a = b = 10 \text{ in}, E_1 = 25.0 \times 10^6 \text{ psi}, E_2 = 1.0 \times 10^6 \text{ psi}, G_{12} = 0.5 \times 10^6 \text{ psi} \\ G_{23} = 0.2 \times 10^6 \text{ psi}, G_{13} = 0.5 \times 10^6 \text{ psi}, \nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{13} = 0.25 \quad (13)$$

Material 2(MAT 2):

$$a = b = 10 \text{ in}, E_1 = 40.0 \times 10^6 \text{ psi}, E_2 = 1.0 \times 10^6 \text{ psi}, G_{12} = 0.6 \times 10^6 \text{ psi} \\ G_{23} = 0.5 \times 10^6 \text{ psi}, G_{13} = 0.6 \times 10^6 \text{ psi}, \nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{13} = 0.25 \quad (14)$$

경계조건은 단순 지지 조건으로 구축되어 있다. 해석 결과는 참고 문헌과 매우 잘 일치함을 보여주고 있다. Park 등(2006)은 유한요소법을 사용하여 진동수의 경우에 해석적인 결과에 비해 큰 값을 나타내었다. 해석결과를 식(15)를 사용하여 무차원 형태로 나타내었다:

$$\omega = \omega \left(\frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \right) \quad (15)$$

[표 1] 적층 복합 판의 무차원진동수 ($a/h=100$)

적층배열	E_1/E_2	본 연구	Park 등(2006)
$0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$	MAT 1 (25)	15.18	15.28
	MAT 2 (40)	18.84	18.96
$45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ$	MAT 1 (25)	19.60	19.75

4.2.2 단순지지된 직사각형 점진기능재료 판

점진기능재료를 가진 본 연구의 적용성을 보여 주기 위해서, S 형상 점진기능재료 판을 (그림 2참조) 나타내었다. 단순 지지 사각형 판에 대해 Navier 해를 구하였다. 점진기능재료 판의 모든 경우에 있어서, 수치적인 값을 계산하는데 사용한 재료 성질은 식(16)과 같다.

$$E_1 = 151 \times 10^9 \text{ Pa}, \rho_1 = 3000 \text{ kg/m}^3, E_2 = 70 \times 10^9 \text{ Pa}, \\ \rho_2 = 2707 \text{ kg/m}^3, \nu_1 = \nu_2 = 0.3. \quad (16)$$

여기서 E_1, ρ_1, ν_1 과 E_2, ρ_2, ν_2 은 각각 판의 상면과 하면에서 재료 성질을 나타낸다. 해석 결과를 식(17)을 이용해서 무차원 형태로 나타내었다.

$$\omega = \omega \left(\frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_1}{E_2}} \right) \quad (17)$$

표 2는 순수 세라믹 판이 순수 금속 판보다 큰 고유 진동수를 가짐을 보여주고 있다. 점진기능재료 판의 고유 진동수는 금속 판과 세라믹 판의 진동수 사이에 위치한다.

[표 2] 점진기능재료 판의 무차원 고유진동수 ($a/h=100$)

거듭 제곱 매개변수(p)	본 연구 (Navier 해)
순수 세라믹	8.992
$p=1$	7.518
$p=2$	7.419
$p=5$	7.333
$p=10$	7.307
순수 금속	6.123

표 3은 $p=10$ 을 갖는 점진기능재료 판의 해석 결과를 보여주고 있다. 여기서, 고유진동수는 여러 가지 직사각형 판의 형상 비에 대한 판의 폭 a , 두께 h , 밀도 ρ_1 , 그리고 탄성계수 E_2 관하여 정규화한 것이다. 판의 형상 비가 증가할수록 고유 진동수는 3.69에 접근한다.

[표 3] 점진기능재료 판의 무차원 고유 진동수 ($p=10$)

해석 결과	형상 비 (b/a)			
	0.5	2.0	5.0	10.0
본 연구 (Navier 해)	18.258	4.568	3.800	3.691

4.3 좌굴해석

4.3.1 단순지지된 적층 복합판

첫번째 예제에서, 수렴도 검증을 위해 적층 복합판의 좌굴 해석을 수행하였다. 모든 경계는 단순 지지 되어 있다. 표 4는 각각 크로스과 앵글플라이 복합적층판의 해석 결과를 보여주고 있으며, 기하학적 성질과 재료성질은 MAT 2를 사용하였다. 해석 결과는 식(18)을 이용하여 무차원 형태로 나타내었다:

$$\bar{N}_{cr} = \frac{N_{cr} b^2}{E_2 h^3} \times 10^2 \quad (18)$$

표 4에서, 본 연구의 좌굴 하중 정확도 검증을 위해 Reddy(2004)의 결과와 비교 검토 하였다.

【표 4】 단순지지된 크로스-플라이 적층 복합판의 무차원 좌굴 하중

해석 결과	크로스-플라이		앵글-플라이 ($\theta / -\theta / \theta / -\theta$)			
	0°/90°/90°/0°	0°/90°/0°/90°	5°	15°	30°	45°
FSDT (Reddy, 2004)	35.96	30.26	35.66	38.33	49.63	55.74
본 연구	35.96	30.26	35.66	38.33	49.63	55.74

4.3.2 단순지지된 직사각형 점진기능재료 판

Navier 방법을 이용한 S 형상 점진기능재료 판의 (그림 2) 좌굴 해석 결과를 구하였다. 재료 성질은 4.2.2절과 같은 값을 사용하였다. 해석 결과는 식(18)을 이용한 무차원 형태로 제시하였다. 표 5에서는 순수 세라믹 판이 갖는 가장 큰 좌굴 하중과 순수 금속 판이 갖는 가장 작은 좌굴 하중을 나타내었다. 점진기능재료 판의 좌굴 하중은 금속 판과 세라믹 판의 사이에 위치한다.

【표 5】 점진기능재료판의 무차원 좌굴 하중

$$\left(\bar{N}_{cr} = \frac{N_{cr} b^2}{E_2 h^3} \right)$$

거듭제곱 매개변수(p)	본 연구 (Navier 해)
순수 세라믹	7.794
p=1	5.448
p=2	5.305
p=5	5.183
p=10	5.147
순수 금속	3.613

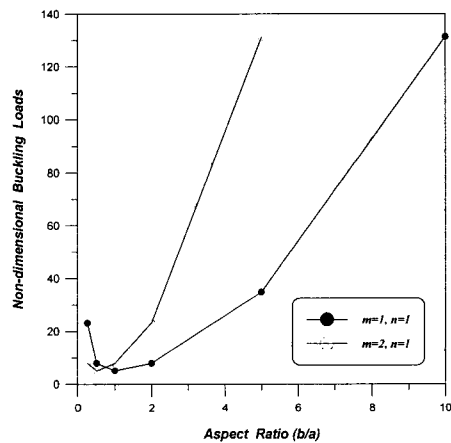
형상 비에 따른 좌굴 하중을 표 6에 나타내었다. 좌굴

모드의 변화를 살펴보기 위해 판의 형상 비 변화에 따른 좌굴 하중의 변화를 그림 6에 나타내었다. 판의 형상 비가 1보다 큰 경우에 판은 x방향으로 단순 반파형으로 좌굴 된다. 판의 형상 비가 1보다 작은 경우에는 x방향으로 반파형의 수가 증가된 형태로 좌굴 된다.

【표 6】 점진기능재료 판의 무차원 좌굴 하중

$$\left(\bar{N}_{cr} = \frac{N_{cr} b^2}{E_2 h^3}, p=10 \right)$$

해석결과	형상 비 (b/a)			
	0.5	2.0	5.0	10.0
본연구 (Navier)	5.138	8.043	34.80	131.28



【그림 6】 등분포 하중을 받는 점진기능재료판의 좌굴 하중

5. 결론

점진기능재료 판의 휨, 진동 및 좌굴 해석을 위해 Navier 방법을 이용하였다. 본 논문에서는 고유 진동수와 좌굴 하중에 대한 구성 성분의 체적 요소와 거듭제곱 매개 변수 비의 영향을 보여주기 위해 1차 전단 변형 이론에 의한 점진기능재료 판에 대한 단순 지지된 판의 Navier해를 제시하였다. 기존의 점진기능재료에 관한 연구는 역학적 거동에 대한 수치적 방법에 의한 연구가 대부분이었다. 그러나 이러한 수치적 방법의 정확한 검증을 위하여 해석적 방법에 의한 결과가 반드시 필요하다. 이러한 검증작업은 향후 점진기능재료 판의 다양한 적용을 위하여 필요한 과정이라고 할 수 있다. 점진기능재료 판의 처짐과 좌굴 하중 그리고 고유 진동수는 금속과 세라믹 판의 값에 사이에 위치하였다. 본 연구에서 제시한 점진기능재료 판의 처짐과 진동 그리고 좌굴 해석 결과는 점진기능재료 판의 처짐해석과 고유치 해석을 위한 성능 시험 예제로 활용될 수 있을 것으로 판단된다.

참고문헌

[1] Bao, G. and Wang, L. (1995) Multiple Cracking in Functionally Graded Ceramic/metal Coatings, Int. J. Solids Struct., Vol. 32, pp. 2853-2871.

[2] Chi, S. H. and Chung, Y. L. (2002) Cracking in Sigmoid Functionally Graded Coating, J. Mech. Vol. 18, pp. 41-53.

[3] Chi, S. H. and Chung, Y. L. (2006) Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load Part I: Analysis, International Journal of Solids and Structures Vol. 43(13), pp. 3657-3674.

[4] Chi, S. H. and Chung, Y. L. (2006) Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load Part II: Numerical results, International Journal of Solids and Structures Vol. 43 (13), pp. 3675-3691.

[5] Chung, Y. L. and Chi, S. H. (2001) The Residual Stress of Functionally Graded Materials, J. Chinese Institute of Civil and Hydraulic Engineering Vol. 13, pp. 1-9.

[6] Delale, F. and Erdogan, F. (1983) The Crack Problem for a Nonhomogeneous Plane, J. Appl. Mech. ASME, Vol. 50, pp. 609-614.

[7] Hirano, T. and Yamada, T. (1988) Multi-paradigm Expert System Architecture based upon the Inverse Design Concept, International Workshop on Artificial Intelligence for Industrial Applications, Hitachi, Japan.

[8] Lee, Y. D. and Erdogan, F. (1995) Residual/thermal Stress in FGM and Laminated Thermal Barrier Coatings, Int. J. Frac. Vol. 69, pp. 145-165.

[9] Park, T. H., Kim, K. D. and Han, S. C. (2006) Linear Static and Dynamic Analysis of Laminated Composite Plates and Shells using a 4-node Quasi-conforming Shell Element, Compos. Part B-Eng., Vol. 37, No. 2-3, pp. 237-248.

[10] Praveen, G. N. and Reddy, J. N. (1988) Nonlinear Transient Thermoelastic Analysis of Functionally Graded Ceramic/metal Plates, Int. J. Solids Struct. Vol. 35, pp. 4457-4476.

[11] Reddy, J. N. (1979) Free Vibration of Antisymmetric, Angle-ply Laminated Plates including Transverse Shear Deformation by the Finite Element Method, J. Sound Vib. Vol. 66, No. 4, pp. 565-576.

[12] Reddy, J. N. (2004) Mechanics of composite plates and shells: Theory and Analysis, 2nd edn. CRC press, Boca Raton.

[13] Zenkour, A. M. (2005) On Vibration of Functionally Graded Plates according to a Refined Trigonometric

Plate Theory, Int. J. Struct. Stab. Dyna. Vol. 5, No. 2, pp. 279-297.

이 원 홍(Won-Hong Lee)

[정회원]



- 1985년 2월 : 건국대학교 농공학과 졸업(농학사)
- 1987년 2월 : 건국대학교 대학원 농공학과 졸업(농학석사)
- 1994년 2월 : 건국대학교 대학원 농공학과 졸업(농학박사)
- 1997년 3월 ~ 현재: 진주산업대학교 이공대학 토목공학과 부교수

<관심분야>

복합재료, 좌굴해석, 비선형 구조해석, 복합구조 설계

한 성 천(Sung-Cheon Han)

[정회원]



- 1989년 2월 : 서울시립대학교 토목공학과 졸업(공학사)
- 1991년 2월 : 서울시립대학교 대학원 토목공학과 졸업(공학석사)
- 1996년 8월 : 서울시립대학교 대학원 토목공학과 졸업(공학박사)
- 1996년 3월 ~ 현재 : 대원과학기술대학 철도건설과 부교수

<관심분야>

동적 구조해석, 유한요소법, 복합재료, 좌굴해석, 비선형 구조해석, 복합구조 설계

박 원 태(Weon-Tae Park)

[정회원]



- 1983년 2월 : 부산대학교 토목공학과(공학석사)
- 1993년 2월 : 서울시립대학교 토목공학과(공학박사)
- 2005년 10월 ~ 현재 : 공주대학교 건설환경공학부 교수

<관심분야>

구조공학, 강구조공학, 복합재료