

티모센코 회전축을 따라 움직이는 질량의 진동해석

박용석^{1*}

Vibration Analysis of a Moving Mass Travelling on the Timoshenko Rotating Shaft

Yong-Suk Park^{1*}

요 약 티모센코 회전축을 따라 이동하는 이동질량과의 동적상호작용에 관한 연구가 수행되었다. 이동질량의 속력이 티모센코축의 회전속도와 연계된 구속조건식을 도출하였다. 티모센코의 보 이론을 활용하여 시스템의 무차원방정식이 유도되었다. 이동질량의 속력을 포함하는 티모센코 축의 회전속도비, 레일리계수, 축방향 압축력 등 다양한 무차원 변수들의 영향에 따른 회전축의 처짐과 주파수응답에 대한 해석이 수행되어졌다.

Abstract The dynamic interaction between the moving mass and the rotating Timoshenko shaft is investigated. The moving speed of the mass is presented by a constraint equation related to the rotating speed of the shaft. The dimensionless equations of motion for the rotating shaft with a moving mass by using the Timoshenko's beam theory. The dynamic responses of this system are studied. Influences of dimensionless parameters such as the rotating speed ratio, the Rayleigh coefficient and the dimensionless axial force are discussed on the transient response and the maximum deflection of the moving system.

Key Words : Moving mass(이동질량), Rotating shaft(회전 축)

1. 서론

이동하중을 받는 구조물의 동적 거동은 이동물체의 속도에 따라 정하중을 받을 때 보다 큰 처짐을 나타내게 되어 교량이나 철교 등과 같은 구조물의 설계에 중요한 영향을 미치게 된다. Fryba[1]는 폭넓은 해석의 방법을 제시하였다. 구조물과의 동적상호작용을 통한 이동질량의 관성효과는 중력보다도 구조물의 응답에 큰 영향을 미치고 있으므로 속도비와 질량비에 대한 수치해석 연구가 활발히 진행되어 왔다.[2~5] 아울러 고속 회전운동을 동반하는 병기 분야에서도 정밀도 향상을 위한 강내탄도학에 대한 연구가 진행되어 왔다.[6~8]

선반가공과 같은 기계 작업시 발생하는 회전하는 축위를 이동하는 이동하중이나 이동질량에 의한 진동문제는 Katz[9], Lee[10,11], Gu[12]에 의해 폭넓게 연구되어 왔다. Park[14]은 이동질량과 압축력을 받는 티모센코 회전축의 운동에 대한 설계 파라미터를 추출할 수 있는 무차원 변수에 대한 연구를 수행하였다.

대부분의 연구에서는 이동물체의 속도와 축의 회전속도와 연계성이 없이 독립적으로 운동하는 모델에 대한 연구가 진행되어 왔으나, 볼나사와 같이 축의 회전과 구속되어 이송되는 문제를 해석할 수 있는 방안이 대두되고 있다.

볼나사는 회전운동을 직선운동으로 바꾸는 기계요소로 정밀이송이 가능하며, 산업현장의 CNC나 머시닝센터 뿐 아니라 정밀측정기기, 자동화기기, 사무기기 등에 사용되고 있다.

본 연구에서는 직선운동하는 이동물체의 속력이 축의 회전속도와 연계된 구속조건식을 무차원변수로 도출하고, 회전축과의 동적상호작용에 대한 특성해석을 수행함으로써, 볼나사를 이용한 시스템의 안정성을 확보할 수 있는 설계 자료를 제시하고자 한다.

2. 운동방정식

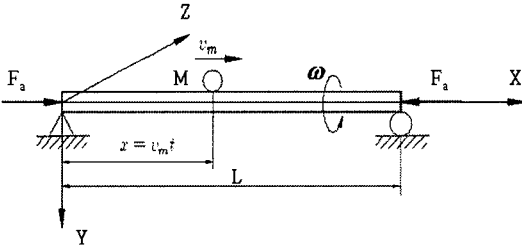
그림 1과 같이 일정한 각속도 ω 로 회전하는 길이가

본 논문은 2007년도 인하공업전문대학 교내연구비 지원에 의해 수행되었음.

¹인하공업전문대학 기계과

*교신저자: 박용석(yspark@inhac.ac.kr)

L인 일정단면의 축이 있다. 축의 양단은 단순지지 되어 있다. 회전축에 구속된 이동질량 M 은 속도 v_m 으로 이동하며 이때의 위치는 x 로 나타내고 있다.



[그림 1] 이동질량과 압축력을 받는 회전축

Y축 방향으로의 처짐은 $V(x,t)$, Z축 방향으로의 처짐은 $W(x,t)$ 로 나타내며, Y와 Z축에 대한 미소의 회전각은 $B(x,t)$ 와 $\Gamma(x,t)$ 로 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} V(x,t) &= V_b(x,t) + V_s(x,t) \\ W(x,t) &= W_b(x,t) + W_s(x,t) \\ B(x,t) &= -\frac{\partial W_b(x,t)}{\partial x}, \quad \Gamma(x,t) = \frac{\partial V_b(x,t)}{\partial x} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 V_b 와 W_b 는 굽힘에 의한 처짐을, V_s 와 W_s 는 전단에 의한 처짐을 나타낸다.

시스템의 포텐셜에너지 U 는 식(1)의 관계식으로부터 다음과 같이 정리되어 진다.

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^L EI [(\Gamma')^2 + (B')^2] dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L \kappa GA [(V')^2 + (W')^2 \\ &\quad + \Gamma^2 + B^2 - 2\Gamma V' + 2B W'] dx \\ &- \frac{1}{2} F_a \int_0^L [(V')^2 + (W')^2] dx \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 (')는 x 에 대한 편미분을 나타내고, A 는 회전축의 단면적, I 는 단면2차모멘트, κ 는 단면 형상 계수[13], E 는 탄성계수, G 는 전단탄성계수를 나타낸다. 또한 F_a 는 축에 작용하는 축방향 하중이다.

일정한 각속도 ω 로 회전하는 축의 운동에너지 T_R 과 일정한 속도 v_m 으로 이동하는 질량에 의한 운동에너지 T_M 은 각각 다음과 같이 나타내어진다.

$$\begin{aligned} T_R &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho A [\dot{V}^2 + \dot{W}^2] dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L \rho I [\dot{B}^2 + \dot{\Gamma}^2] dx \\ &- \frac{1}{2} \omega (2\rho I) \int_0^L [\dot{\Gamma}B - \dot{B}\Gamma] dx \\ &+ \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^L 2\rho I dx \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} T_M &= \frac{1}{2} M [v_m^2 + (\frac{\partial V}{\partial t} + v_m \frac{\partial V}{\partial x})^2 \\ &+ (\frac{\partial W}{\partial t} + v_m \frac{\partial W}{\partial x})^2] |_{x=v_m t} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 ρ 는 축의 밀도를, ()는 시간에 대한 편미분을 나타낸다.

중력에 의해 시스템에 가해지는 가상일은 다음과 같다.

$$\delta W_G = Mg \delta V |_{x=v_m t} \quad (5)$$

운동방정식을 얻기 위하여, 식(2)~식(5)를 아래와 같은 extended Hamilton's principle에 적용한다.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T_R + \delta T_M - \delta U + \delta W_G) dt = 0 \quad (6)$$

시스템의 특성을 결정하는 중요한 파라미터들의 변화에 따른 운동 해석을 수행하기 위해 다음과 같은 무차원 매개변수들을 정의하자.

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{v_\sigma t}{L}, \quad v = \frac{V}{L}, \quad w = \frac{W}{L}, \\ v_b &= \frac{V_b}{L}, \quad w_b = \frac{W_b}{L}, \quad q = \frac{\partial v_b}{\partial \xi}, \quad p = \frac{\partial w_b}{\partial \xi} \\ \alpha &= v_m/v_\sigma, \quad \Omega = \omega/\omega_1, \quad \beta = \frac{\pi r_0}{L}, \\ \mu &= \frac{M}{\rho AL}, \quad f_a = \frac{F_a}{F_\sigma}, \quad f_s = \frac{Mg}{F_\sigma} \end{aligned} \quad (7)$$

여기서, v_σ 은 회전하지 않는 단순지지 오일러 보의 임계속도로 $(\pi/L) \sqrt{EI/\rho A}$ 이며, r_0 는 회전반경, ω_1 은 단순지지보의 1차 고유진동수, F_σ 은 임계좌굴하중으로 $\pi^2 EI/L^2$ 이다.

식(7)을 식(6)에 대입하여 정리하면, 다음과 같은 무차원 방정식을 얻게 된다.[14]

$$\begin{aligned} \ddot{v} + \mu (\ddot{v} + 2\alpha \dot{v}' + \alpha^2 v'') \delta(\xi - \alpha\tau) \\ - \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \frac{1}{\beta^2} (v'' - \phi') + f_a v'' = f_s \delta(\xi - \alpha\tau) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\ddot{w} + \mu(\ddot{w} + 2\alpha \dot{w}' + \alpha^2 w'') \delta(\xi - \alpha\tau) - \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \frac{1}{\beta^2} (w'' - \phi') + f_a v'' = 0 \quad (9)$$

$$\ddot{p} + 2\pi\Omega \dot{q} - \frac{1}{\beta^2} p'' + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \frac{\pi^2}{\beta^4} (p + w') = 0 \quad (10)$$

$$\ddot{q} - 2\pi\Omega \dot{p} - \frac{1}{\beta^2} q'' + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \frac{\pi^2}{\beta^4} (q - v') = 0 \quad (11)$$

유도된 무차원 운동방정식은 회전축의 회전관성, 전단변형과 축하중을 고려하고 이동질량 및 이동하중의 효과까지 검토할 수 있는 포괄적인 방정식이다.

볼나사를 이용한 이송장치와 같은 경우, 식(8)과 식(9)의 무차원 이동속력 α 는 축의 무차원 회전수 Ω 의 함수로 다음과 같이 표현된다.

$$\alpha = \Omega \beta \tan \lambda \quad (12)$$

여기서, λ 는 나선각을 나타낸다. 본 연구에서는 이동 질량의 속력이 식(12)의 관계로 표현되는 이송장치에서 나타나는 진동문제를 다루고자 한다.

무차원 운동방정식의 변위를 다음과 같이 가정한다.

$$v(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^n v_i(\tau) \phi_i(\xi), \quad w(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^n w_i(\tau) \phi_i(\xi) \quad (13)$$

$$p(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^n p_i(\tau) \psi_i(\xi), \quad q(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^n q_i(\tau) \psi_i(\xi)$$

Galerkin 방법에 의해 식(8)~식(11)의 무차원 운동 방정식은 다음과 같은 형태의 행렬 방정식으로 유도된다.

$$[\mathbf{M} + \bar{m}\mathbf{B}] \ddot{\mathbf{v}} + 2\alpha \bar{m} \mathbf{A} \dot{\mathbf{v}} + \left[\frac{k}{2(1+\nu)\beta^2} \mathbf{H} - \alpha^2 \bar{m} \mathbf{C} - f_v \mathbf{H} \right] \mathbf{v} - \frac{k}{2(1+\nu)\beta^2} \mathbf{E}^T \mathbf{q} = f_s \mathbf{a} \quad (14)$$

$$[\mathbf{M} + \bar{m}\mathbf{B}] \ddot{\mathbf{w}} + 2\alpha \bar{m} \mathbf{A} \dot{\mathbf{w}} + \left[\frac{k}{2(1+\nu)\beta^2} \mathbf{H} - \alpha^2 \bar{m} \mathbf{C} - f_v \mathbf{H} \right] \mathbf{w} + \frac{k}{2(1+\nu)\beta^2} \mathbf{E}^T \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (15)$$

$$\mathbf{S} \ddot{\mathbf{p}} + 2\pi\Omega \mathbf{S} \dot{\mathbf{q}} + \left[\frac{1}{\beta^2} \mathbf{K} + \frac{k}{2(1+\nu)} \frac{\pi^2}{\beta^4} \mathbf{S} \right] \mathbf{p} + \frac{k}{2(1+\nu)} \frac{\pi^2}{\beta^4} \mathbf{E} \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (16)$$

$$\mathbf{S} \ddot{\mathbf{q}} + 2\pi\Omega \mathbf{S} \dot{\mathbf{p}} + \left[\frac{1}{\beta^2} \mathbf{K} + \frac{k}{2(1+\nu)} \frac{\pi^2}{\beta^4} \mathbf{S} \right] \mathbf{q} + \frac{k}{2(1+\nu)} \frac{\pi^2}{\beta^4} \mathbf{E} \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (17)$$

여기서, 각 행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{v} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}^T, \quad \mathbf{w} = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}^T$$

$$\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}^T, \quad \mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}^T$$

$$\mathbf{M} = [M_{ij}], \quad M_{ij} = \int_0^1 \phi_i \phi_j d\xi$$

$$\mathbf{S} = [S_{ij}], \quad S_{ij} = \int_0^1 \psi_i \psi_j d\xi$$

$$\mathbf{K} = [K_{ij}], \quad K_{ij} = \int_0^1 \psi'_i \psi'_j d\xi \quad (18)$$

$$\mathbf{H} = [H_{ij}], \quad H_{ij} = \int_0^1 \phi'_i \phi'_j d\xi$$

$$\mathbf{E} = [E_{ij}], \quad E_{ij} = \int_0^1 \psi_i \phi'_j d\xi$$

$$\mathbf{A} = [A_{ij}], \quad A_{ij} = \frac{1}{2} (\phi_i(\xi = \alpha\tau) \phi'_j(\xi = \alpha\tau) - \phi'_i(\xi = \alpha\tau) \phi_j(\xi = \alpha\tau))$$

$$\mathbf{B} = [B_{ij}], \quad B_{ij} = (\phi_i(\xi = \alpha\tau) \phi_j(\xi = \alpha\tau))$$

$$\mathbf{C} = [C_{ij}], \quad C_{ij} = (\phi'_i(\xi = \alpha\tau) \phi'_j(\xi = \alpha\tau))$$

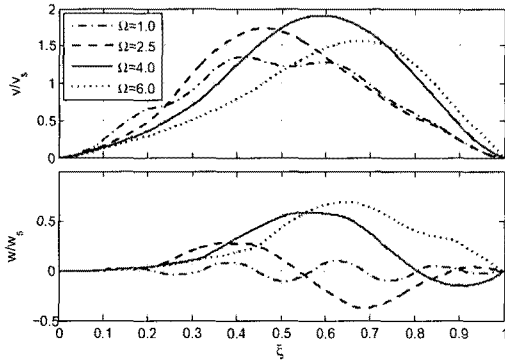
$$\mathbf{a} = \{a_j\}, \quad a_j = \phi_j(\xi = \alpha\tau)$$

3. 수치해석

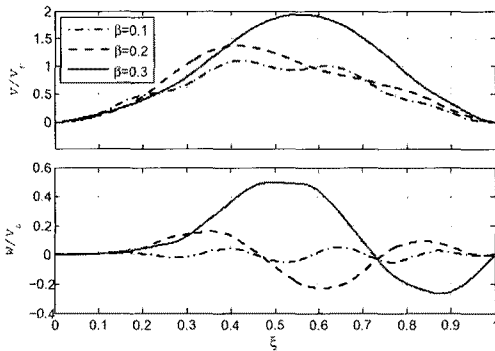
수치해석에서 사용된 식(14)~식(17)은 10차 모우드까지 고려하여 구성되었으며, 5차 Runge-Kutta법을 이용하여 시스템의 해를 구하였다. 사용된 무차원변수로 포와송비 $\nu=0.33$, 원형단면에서의 $\kappa=0.9$, $\tan \lambda=0.3$ 을 사용하였으며, 다양한 시스템의 운동특성을 알아보기 위해 무차원 변수 $\mu, \beta (0 < \beta \leq 0.3)$, Ω 값의 변화에 따른 응답을 고찰하였다.

그림 2는 무차원 회전수 Ω 의 영향을 비교한 결과이다. 여기서 v_s 는 이동질량이 보의 중앙에 위치 했을 때의 최대정적처짐을 의미하며, 이동질량의 변위를 v_s 의 처짐 비로 계산하여 그 크기를 그림의 수직축으로 나타내었다. 그림 2에서 보는 바와 같이 무차원 회전수가 커질수록 Y 방향 무차원 처짐비 v/v_s 의 최대값은 점점 커지다가 작아짐을 알 수 있으며, 그 값의 정점은 축의 우측 부위로 이동하며 발생함을 알 수 있다. 그림 3은 Rayleigh 계수

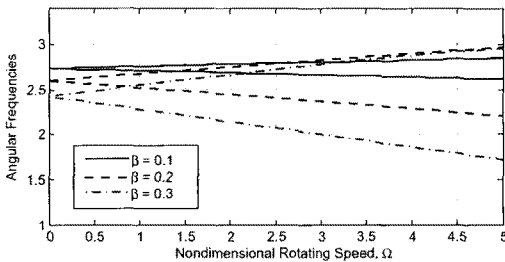
β 의 영향을 보여준다. β 가 커질수록 처짐비는 크게 나타난다. 이는 β 가 커짐에 따라 회전관성의 영향으로 처짐은 정적처짐에 상대적으로 증가하여 처짐비가 크게 나타나게 되는 것이다.



[그림 2] 축의 회전수 변화에 따른 무차원 처짐비 v/v_s 와 w/w_s ($\beta=0.3, \mu=0.2, f_a=0$)



[그림 3] Rayleigh 계수 변화에 따른 무차원 처짐비 v/v_s 와 w/w_s ($\Omega=3.5, \mu=0.2, f_a=0$)

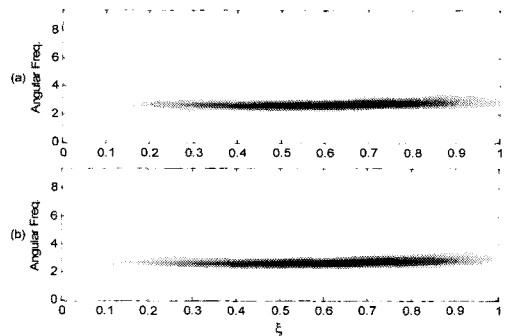


[그림 4] 회전축의 고유진동수 ($\xi=0.3, \mu=0.2, f_a=0$)

그림 2와 그림 3에서 Ω 와 β 가 작은 경우 응답에 주기성이 보임을 알 수 있다. 두 파라미터가 작은 경우, 이동질량의 이송속력이 작아지기 때문에 축을 충분

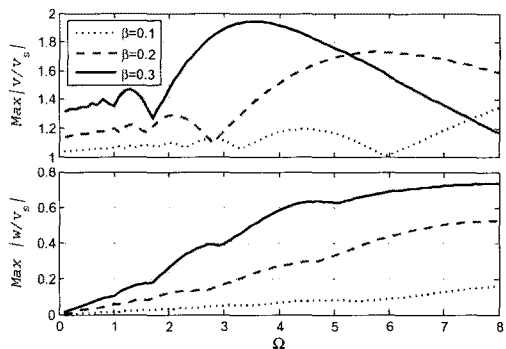
히 가진시키면서 이송하게 된다. 이런 상황을 확인하기 위해 계의 고유진동수를 파악하여 보았다. 그림 4는 이동질량이 $\xi=0.3$ 에 놓여있는 순간의 1차 고유진동수를 도시한 그림이다. 고유진동수는 Rayleigh 계수 β 가 클수록 작으며, 무차원 회전수 Ω 에 따라 주파수 분기가 발생하며, Ω 가 클수록 주파수의 분기폭이 커짐을 알 수 있다.

그림 5는 Ω 와 β 가 작은 경우 이동질량의 운동을 웨이브렛 변환을 통해 얻은 결과이다.



[그림 5] 웨이브렛 변환을 통한 이동질량의 운동 (a) Y 방향, (b) Z 방향 ($\beta=0.1, \Omega=1.0, \mu=0.2, f_a=0$)

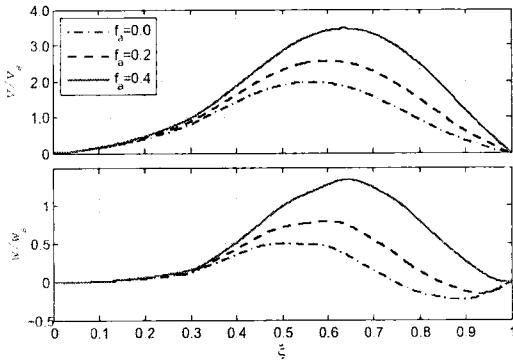
축의 고유진동수로 진동하면서 이동질량이 이동하는 것을 $\xi=0.1$ 부터 명확히 볼 수 있다. 또한 $\xi=0.5$ 근방에서 주파수가 약간 작아지고 있음도 관찰된다. 즉 위치에 따라 주파수 변동이 일어난다.



[그림 6] Rayleigh 계수 변화에 따른 회전축의 최대 처짐비 v/v_s 과 w/w_s ($\mu=0.2, f_a=0$)

그림 6은 회전수 변화에 따른 이동질량의 최대처짐을 나타낸다. β 가 커짐에 따라 처짐비의 최대값도 크게 나타난다. w/w_s 의 경우 같은 β 값에 대하여 Ω 가

커질수록 최대처짐비는 커진다. v/v_s 의 경우는 같은 β 값에 대하여 최대처짐비가 Ω 값에 따라 변한다. 예를 들어 $\beta=0.3$ 인 경우 약 $\Omega=3.5$ 에서 최대가 되고 약 $\Omega=1.7$ 에서 최소가 된다. 따라서 Ω 의 선택은 설계에 있어서 중요 파라미터가 된다. 그림 7은 압축력이 처짐비에 미치는 영향을 알아본 것으로 압축력이 클수록 최대처짐은 커지고 최대처짐의 위치는 우측으로 이동하여 나타난다.



[그림 7] 압축력 변화에 따른 회전축의 최대처짐비 v/v_s 과 w/v_s ($\mu=0.2, \beta=0.3, \Omega=0.3$)

4. 결론

회전축 위를 이동질량이 이송되는 계의 무차원 운동 방정식의 유도와 파라미터 변화에 따른 진동 해석을 수행하여, 다음과 같은 결과를 얻을 수 있었다.

(1) 무차원 회전수가 커질수록 v/v_s 의 최대값은 접점 커지다가 작아지며, 그 값의 위치는 축의 우측 부위로 이동하며 발생함을 알 수 있다. β 가 커질수록 회전관성의 영향은 커져 상대적으로 처짐비가 크게 나타난다.

(2) Ω 와 β 가 작은 경우 이동질량의 이송속력이 작아지기 때문에 축을 가진시키면서 이송하게 되어 축의 고유진동수로 진동하면서 이동한다.

(3) 같은 β 값에 대하여 w/v_s 의 경우 Ω 가 커질수록 최대 처짐비는 커진다. v/v_s 의 경우는 최대처짐비가 Ω 값에 따라 변한다. 따라서 Ω 의 선택에 따라 작은 진폭의 진동을 얻을 수 있다. 압축력은 크기가 클수록 최대처짐은 커지고 최대처짐의 위치는 우측으로 이동하며 나타난다.

(4) 본 연구를 통하여 회전축에 구속된 이동질량계의 전반적인 운동을 해석할 수 있는 기반을 마련하였

으며, 회전축의 회전속도와 연계된 이동물체의 이송속력에 따른 동적상호 작용과 다양한 조건에 대한 특성 해석이 가능하게 되었다.

참고문헌

- [1] Fryba L.(1972), Vibration of Solids and Structures Under Moving Loads, Noordhoff International, Groningen, Netherlands.
- [2] Ting, E. C., Genin, J. and Ginsberg, J. H.(1974), "A General Algorithm for Moving Mass Problems," J. of Sound and Vibration, Vol.33(1), pp.90-94.
- [3] Akin, J. E. and Mofied, M.(1989), "Numerical Solution for Response of Beam with Moving Mass," Journal of Structure Engineering, Vol. 115, No. 1, pp. 120-131.
- [4] Cifuentes, A. O.(1989), "Dynamic Response of a Beam Excited by a Moving Mass," Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 5, pp.49-58.
- [5] Stanisic, M. M.(1985), "On a New Theory of the Dynamic Behavior of the Structures Carrying Moving Masses," Ingenieur-Archive, Vol. 56, pp.175-185.
- [6] Ansari, K. A. and Baugh, J. W. Jr.(1986), "Dynamics of a Balloting Projectile in a Moving Gun Tube," BRL-CR-605.
- [7] Soifer, M. T. and Becker, R. S.(1984), "Projectile Motion in a Flexible Gun Tube," BRL-CR-536.
- [8] Park, Y. S. and Hong, S. C.(2005), "Torsional Vibration of a Hollow Shaft subjected to a Moving Mass," Transaction of KSNVE, Vol.15, No.8, pp.975-979.
- [9] Katz R., Lee C. W. Ulsoy A. G., Scott R.A., (1988), "The Dynamic Response of a Rotating shaft subject to a Moving Load," Journal of Sound and Vibration, Vol.122(1), pp.131-148.
- [10] Lee H. P.(1995), "Dynamic Response of a Rotating Timoshenko Shaft subject to Axial Forces and Moving Loads," Journal of Sound and Vibration, Vol.181(1), pp.169-177.
- [11] Lee H. P.(1996), "Dynamic Response of a Timoshenko Beam subject to a Moving Mass," Journal of Sound and Vibration, Vol.198(2), pp.249-256.
- [12] Gu U. C., Cheng C. C.(2004), "Vibratioin Analysis of a High-speed Spindle under the Action of a Moving Mass," Journal of Sound and Vibration, Vol.278(4-5), pp.1131-1146.
- [13] Cowper G. R.(1966), "The shear coefficient in Timoshenko's beam theory," J. of Applied Mechanics,

Vol. 33. pp.335-340.

- [14] Park, Y. S. and Hong, S. C.(2007), "Nondimensional Parameter Study of a Timoshenko Rotating Shaft Subjected to Moving Mass and Compressive Axial Forces," Transaction of KSNVE, Vol.17, No.12, pp.1201-1207.
-

박 용 석(Yong-Suk Park)

[정회원]



- 1986년 2월 : 인하대학교 기계공학과(공학사)
- 1988년 2월 : 인하대학교 대학원 기계공학과(공학석사)
- 1996년 2월 : 인하대학교 대학원 기계공학과(공학박사)
- 1995년 3월 ~ 2004년 2월 : 대천전문대학 부교수
- 2004년 3월 ~ 현재 : 인하공업전문대학 기계과 부교수

<관심분야>

진동제어, 동역학, 구조해석