

## 구조적 불확실성을 갖는 비선형 시스템의 역최적제어

이상훈<sup>1\*</sup>, 김진수<sup>2</sup>, 이종용<sup>1</sup>  
<sup>1</sup>광운대학교 교양학부  
<sup>2</sup>IDP 시스템

### Inverse optimal control of nonlinear systems with structural uncertainty

Lee, Sang Hun<sup>1\*</sup>, Kim, Jin Soo<sup>2</sup> and Lee, Jong Yong<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Kwangwoon University, Division of General Education

<sup>2</sup>IDP System

**요약** 본 논문에서는 구조적 불확실성을 갖는 비선형 시스템에 대한 역 최적 제어를 고려하였다. 먼저 불확실성의 구조적 범위를 논의하고, 제어 Lyapunov 함수를 기초로, 불확실성을 가지는 비선형시스템에 대한 대역적 점근적 안정도를 제안하고 증명한다. 이로부터 역 최적 제어를 위한 최저의 제약조건을 유도하고 증명한다. 이 결과를 이용하여 불확실성을 갖는 비선형시스템에 적용하였으며, 제안된 방법의 효율성을 검증하기 위하여 시뮬레이션을 하였다.

**Abstract** In this paper, inverse optimal control for nonlinear systems with structural uncertainty is considered. The first, the bounded of structural uncertainty is introduced and based on the control Lyapunov function, a theorem for the globally asymptotic stability is presented. From this a less conservative condition for the inverse optimal control is derived. The result is used to design an inverse optimal controller for a class of nonlinear systems, that improves and extends the existing results. The class of nonlinear system considered is also enlarger. The simulation results show the effectiveness of the method.

**Key Words** : Control Lyapunov function, Optimal control, Nonlinear systems

### 1. 서론

초기의 비선형 제어 이론은 대부분 안정도, 최적화 및 불확실성 문제에 대하여 Kokotovic 과 Arcak[1]에서 적극적으로 다루었다. 여기서 중심으로 논의 된 결과는 음의 궤환과 제어에 의존하는 제어 리아프노프 함수(CLF : control Lyap-unov function)의 개념이다. CLF는 Artstein[2] and Sontag[3]에 의해 도입되었으며, 안정도 이론에 중요한 역할을 한다. 결과적으로 많은 연구자들이 CLF 효과를 다루었으며 중요한 연구 결과를 만들었다.[4,11]

최적 제어는 안정도 여유와 강건성을 보증하는 설계 도구이기 때문에, 최적 안정화는 많은 연구자들의 주제가

되었다. Hamilton-Jacobi-Bellman 방정식을 쉽게 풀기 위한 직접적인 방법은 없다. 그러나 최적 결과를 달성하기 위한 강건성은 함수  $l(x) \geq 0$ 과  $R(x) \geq 0$ 의 선택과는 무관하다. 최적 안정화의 역(inverse) 문제를 풀기 위한 설계 방법의 개발이 Freeman and Kokotovic [4,11]에 의해 제안되었다. 본 논문에서는 구조적 불확실성을 가지는 비선형 시스템의 역 최적 제어를 고려한다. 본 연구에서는 CLF를 이용한 대역적 점근 안정도를 위한 정리를 유도한다. 이 증명을 통하여 역 최적 제어를 유도할 수 있는 최소 보존 조건(less conservative condition)이 유도된다. 제안된 기법의 효과를 모의실험을 통하여 검증한다.

본 논문은 2008년도 광운대학교 교내 학술 연구비 지원에 의해 연구 되었음.

\*교신저자 : 이상훈(leesh58@kw.ac.kr)

접수일 09년 09월 22일

수정일 09년 10월 12일

게재확정일 09년 10월 14일

## 2. 시스템 표현

불확실성을 갖는 비선형 시스템을 아래와 같이 고려하자.

$$\dot{x} = f(x) + \Delta f(x) + g(x)u \quad (1)$$

여기서,  $x \in R^n, u \in R^m$  는 시스템의 상태와 입력이다.  $f(0) = 0$   $f: R^n \rightarrow R^n$  와  $g: R^n \rightarrow R^n \times R^m$  는 매끄럽고 가정하며,  $\Delta f(0) = 0$  인 사상  $\Delta f: R^n \rightarrow R^n$  는 구조적 불확실성 특성을 가지며, 식(2)와 같이 표현된다.

$$\Delta f(x) = e(x)\delta(x) \quad (2)$$

여기서  $e: R^n \rightarrow R^{n \times m}$  는 주어진 매끄러운 함수를 갖는 행렬이고,  $\delta: R^n \rightarrow R^m$  는 미지의 벡터값(vector-valued) 함수이다. 그리고  $\delta(x)$  는  $N(0) = 0$  을 갖는 주어진 매끄러운 함수  $N: R^n \rightarrow R^+$  로 제한된다고 가정하자. 즉, 다음과 같다.

$$\Gamma = \{ \delta(x) : \|\delta(x)\| \leq N(x) \} \quad (3)$$

여기서  $\|\cdot\|$  는 유클리디안 놈을 나타낸다. 만약 모든  $x \in R^n$  에 대하여,  $\delta(x)$  가 식(3)을 만족한다면,  $\delta(x)$  또는  $\Delta f(x)$  는 허용가능하다고 말한다.

$V: R^n \rightarrow R^+$  를 연속함수라 하자.  $x \neq 0$  인 모든  $x$  에 대하여, 만약  $V(0) = 0$  과  $V(x) > 0$  이면,  $V$  는 양의로 정의(positive definite) 되었다고 하며, 또한  $\|x\| \rightarrow \infty$  일 때,  $V(x) \rightarrow \infty$  이면,  $V$  는 고유적(proper)이라 한다.

$f$  에 대한  $V$  의 Lie 도함수는

$$L_f V(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \text{ 으로 표현된다.}$$

**정의 1 :** 각  $x \neq 0$  에 대하여, 만약 식(4)를 만족하면, 매끄럽고, 고유하며 양으로 정의된 함수  $V: R^n \rightarrow R^+$  는 식(1) 시스템의 CLF이다.[7]

$$\inf_u \{ L_f V(x) + L_g V(x)u \} \quad (4)$$

$$< -\|L_e V(x)\|N(x)$$

$V(x)$  가 식(1)의 CLF라는 조건은 식(5)을 의미한다.

$$L_g V(x) = 0, x \neq 0 \quad (5)$$

$$\Rightarrow L_f V(x) < -\|L_e V(x)\|N(x)$$

**언급 1 :** 식(5)로부터,  $L_g V(x) = 0$  을 만족하는 집합은 제어를 위한 중요한 것이다.  $L_g V(x) = 0$  일 때, 어떤  $x$  에 대하여, 만약  $L_f V(x) > 0$  이기 때문에,  $V(x)$  는 Lyapunov 함수가 아니고 물론 CLF도 아니다.

**정의 2 :** 만약 어떤  $\epsilon > 0$  에 대하여,  $x \neq 0$  인  $\|x\| < \sigma$  을 만족하는  $\sigma > 0$  이 존재한다면,  $V(x)$  는 식(1)의 시스템에 대한 적은 제어 특성(small control property)을 만족한다고 하며, 이때 부등식(5)를 만족하도록  $\|u\| < \epsilon$  을 갖는 어떤  $u$  가 존재한다.

**정의 3 :**  $k(0) = 0$  을 갖는  $k: R^n \rightarrow R$  인 함수라 하자. 만약 원점으로부터 떨어져 매끄러울뿐 아니라  $R^n$  의 모든 점에서 연속이라며,  $u(k) = k(x)$  는  $R^n$  상에서 가장 매끄럽다고(almost smooth) 한다.[7]

## 3. 대역적 안정화 및 역 최적 제어기

이 장에서는 본 연구의 주요 결과를 제시한다. 시스템 식(1)이 대역적 점근 안정화를 위한 충분조건과 가장 매끄러운 상태 귀환을 제시한다.

### 3.1 대역적 안정화 제어기

**정리 1 :**  $V(x)$  는 시스템 (1)의 CLF이고 적은 제어 특성을 만족한다고 가정하자. 이때 모든 허용가능한  $\Delta f(x)$  에 대하여 시스템 (1)이 대역적으로 점근적 안정하도록 가장 매끄러운 상태 귀환 제어가 존재한다.

**증명 :** 다음 식(6)과 같이 설정하자.

$$a(x) = L_f V(x), \quad B(x) = L_g V(x) \quad (6)$$

$$c(x) = L_e V(x)$$

식(5)에 의하여, 다음이 성립한다.

$$B(x) = 0, \quad x \neq 0 \quad (7)$$

$$\Rightarrow a(x) < -\|c(x)\|N(x)$$

식(8)과 같은  $R^2$  의 개 부분집합(open subset)을 고려하자.

$$S = \{(a, b) \in R^2 \mid b \neq 0 \text{ or } a < 0\} \quad (8)$$

$q(b) = b$  라 하자. 식(9)로 정의된 함수가  $S$  상에서 매끄럽다.[7]

$$\phi(a, b) = \begin{cases} \frac{a + \sqrt{a^2 + bq(b)}}{b} & b \neq 0 \\ 0 & b = 0 \end{cases} \quad (9)$$

식(7)에 의해, 임의의  $x \neq 0$  에 대하여  $(a(x) + \|c(x)\|N(x), \|B(x)\|^2) \in S$  이다.

상태 궤환은 식(10)과 같이 정의된다.

$$u = k(x) = \begin{cases} -B^T(x) \frac{a(x) + \|c(x)\|N(x) + A}{\|B(x)\|^2} & B(x) \neq 0 \\ 0 & B(x) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

$$A = \sqrt{a(x) + \|c(x)\|N(x)}^2 + \|B(x)\|^4$$

임의의  $x \neq 0$  에 대하여  $u = k(x)$  는  $S$  상에서 매끄럽다. 게다가 영이 아닌  $x$  에서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= L_f V(x) + L_g V(x)u + L_{\Delta f} V(x) \\ &\leq a(x) + B(x)u + \|c(x)\|N(x) \\ &= -\sqrt{a(x) + \|c(x)\|N(x)}^2 + \|B(x)\|^4 < 0 \end{aligned}$$

그래서  $V$  는 일치하는 페루프 시스템의 궤적에 따라

감소한다.

마지막으로, 적은 제어 특성을  $V(x)$  가 만족한다면, 제어 함수  $u = k(x)$  는 원점에서 연속이라는 것을 증명하자.  $B(x) = 0$  때는 언제나  $k(x) = 0$  이므로,  $B(x) \neq 0$  인 경우만 고려하는 것으로 충분하다.  $V(x)$  가 적은 제어 특성을 만족한다는 것은 임의의  $\epsilon > 0$  에 대하여  $x \neq 0$  와  $\|x\| < \sigma$  이 되도록 하는  $\sigma > 0$  이 있다. 이때 식(11)을 만족하는  $\|u\| < \epsilon$  갖는  $u$  가 존재한다.

$$a(x) + B(x)u < -\|c(x)\|N(x) \quad (11)$$

그리고  $V(x)$  는 양으로 한정된다. 따라서 영에서 최소이다.  $\nabla V(0) = 0$  이 성립한다. 기울기(gradient)가 연속이기 때문에,  $x$  가 충분히 적을 때, 식(12)가 성립한다.

$$\|B(x)\| < \epsilon \quad (12)$$

식(11)은 다음의 식(13)을 의미한다.

$$a(x) + \|c(x)\|N(x) < -B(x)u \leq \|B(x)\|\|u\| \leq \|B(x)\|\epsilon \quad (13)$$

두 번째 부등식은 Cauchy-Schwartz 정리에 의해 증명된다. 만약  $0 < \|x\| < \sigma$  이면 식 (12)와 (13)에 의해,  $a(x) + \|c(x)\|N(x) > 0$  일 때, 식(14)가 성립한다.

$$\|u\| = \|k(x)\| \leq \quad (14)$$

$$\frac{2(a(x) + \|c(x)\|N(x)) + \|B(x)\|^2}{\|B(x)\|}$$

$$\leq 2\epsilon + \|B(x)\| < 3\epsilon$$

$$\sqrt{(a(x) + \|c(x)\|N(x))^2 + \|B(x)\|^4}$$

$$\leq |a(x) + \|c(x)\|N(x)| + \|B(x)\|^2$$

이기 때문에,  $a(x) + \|c(x)\|N(x) \leq 0$  이고  $0 < \|x\| < \sigma$  일 때, 다음이 성립한다.

$$\|u\| = \|k(x)\|$$

$$\leq \frac{(a(x) + \|c(x)\|N(x)) + A}{\|B(x)\|}$$

$$A = \sqrt{a(x) + \|c(x)\|N(x)}^2 + \|B(x)\|^4$$

$$\leq \|B(x)\| < \epsilon$$

그래서 임의  $\epsilon > 0$  에 대하여, 만약  $\|x\| < \sigma$  이면  $\|k(x)\| < 3\epsilon$  이 되도록 하는  $\sigma > 0$  이 있다. 즉, 이는 원점에서  $u = k(x)$  가 연속이라는 것을 말한다. 그래서 제어칙 식(10)은 거의 매끄러운 제어이고 페루프 시스템의 평형점  $x = 0$  에서 대역적 점근적 안정을 시키다.

**언급 2 :**  $b \neq 0$  때는 언제나  $q(0) = 0$  과  $bq(b) > 0$  가 되도록 임의 실수 매끄러운 함수  $q: R \rightarrow R$  에 의하여  $q(b) = b$  가 교체한다면, 정리 1의 나머지 상황을 증명하는 것은 어렵지 않다.

**언급 3 :**  $N(x) = 0$  일 때, 정리 1은 참고 문헌[7]의 정리 1을 의미한다. 그래서 정리 1은 강건한 안정성에서 CLF의 확장이라고 할 수 있다.

다음의 결과는 시스템 (1)이 안정하도록 유계(bound) 제어를 갖는다.

**결과 1 :**  $V(x)$  가 시스템 (1)에 대하여 적은 제어 특성을 만족하는 CLF라 하자. 그때 모든 허용가능한  $\Delta f(x)$  에 대하여, 시스템 (1)은 거의 매끄러운 유계 상태 피드백 제어에 의하여 대역적 점근적 안정이다.

$$u = k(x) = \begin{cases} -B^T(x) \frac{a(x) + \|c(x)\|N(x) + A}{\|B(x)\|^2} & B(x) \neq 0 \\ 0 & B(x) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

$$A = \sqrt{a(x) + \|c(x)\|N(x)}^2 + \|B(x)\|^4$$

증명 : 결과 1의 증명은 정리 1의 증명과 유사하다.

### 3.2 역 최적 제어기

이 장에서는 다음의 특성이 만족하도록 시스템 (1)에 대한 피드백 제어  $u(x)$ , 즉 역 최적 제어기예의 설계에

대하여 논의한다.

1. 페루프 시스템은 평형점  $x = 0$  에서 대역적 점근적 안정이다.
2. 입력  $u$  는 모든  $x$  에 대하여  $l(x) \geq 0$  와  $R(x) > 0$  대한 비용함수 식(16)을 최소화한다.

$$J(u, x, x_0) = \sup_{\delta x \in \Gamma} \quad (16)$$

$$\int_0^\infty (l(x) + u^T R(x) u) dt$$

역제어기 접근에서, 안정화하는 제어기  $u = k(x)$  가 먼저 설계되고, 다음으로 피드백은  $u = k(x)$  가 식(16)을 최소화하도록  $l(x) \geq 0$  와  $R(x) > 0$  발견하는 것이다.

이 방법은  $l(x) \geq 0$  와  $R(x) > 0$  이 설계자에 의하여 연역적으로 선택된다기보다 안정화하는 피드백에 의하여 귀납적으로 결정되므로 역이라 한다. 임의  $\gamma > 0$  를 선택하면, 다음이 성립한다.

$$R^{-1}(x) = \begin{cases} 2\gamma + 2 \frac{a(x) + \|c(x)\|N(x) + A}{\|B(x)\|^2} & B(x) \neq 0 \\ 2\gamma & B(x) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

$$A = \sqrt{a(x) + \|c(x)\|N(x)}^2 + \|B(x)\|^4$$

**정리 2 :**  $R(x)$ 는 식(17)에 의해 결정된 함수이고  $V(x)$  시스템 식(1)에 대한 CLF라 하자.

$$u^* = -\frac{1}{2} R^{-1}(x) B^T(x)$$

(18)제어식 (18)이 존재하고, 이때 모든 허용가능한  $\Delta f(x)$  와 모든  $x_0 \in R^n$  에 대하여  $J(u^*, x, x_0) = V(x_0)$  이 되도록  $l(x) \geq 0$  가 존재한다.(이 정리는  $u^*$  가 식(16)에 최적이라는 것을 설명한다.)

**증명 :** 모든 허용가능한  $\Delta f(x)$  에 대하여, 시스템 식(1)의 궤적에 따라  $V(x)$  의 도함수와 식(18)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= L_f V(x) + B(x)u^* + L_{\Delta f} V(x) \\ &\leq a(x) + B(x)u^* + \|c(x)\|N(x) \end{aligned}$$

식(17)과 (18)로부터, 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &\leq -\sqrt{(a(x) + \|c(x)\|N(x))^2 + \|B(x)\|^4} - \\ &\gamma\|B(x)\|^2 < 0 \quad ; B(x) \neq 0 \\ \frac{dV}{dt} &\leq a(x) + \|c(x)\|N(x) < 0 \quad ; B(x) = 0 \end{aligned}$$

그래서  $u^*$  는 평형점  $x = 0$  에서 시스템 식(1)의 대역적 점근적 안정을 이끈다.

$u_1 = \frac{1}{2}u^*$  이라 하자. 이때 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= a(x) + L_{\Delta f} V(x) + B(x)u_1 \\ &\leq a(x) + \|c(x)\|N(x) + B(x)u_1 \\ &\leq \frac{1}{2}(a(x) + \|c(x)\|N(x)) \\ &\quad - \sqrt{(a(x) + \|c(x)\|N(x))^2 + \|B(x)\|^4} \\ &\quad - \frac{1}{2}\gamma\|B(x)\|^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

식(19)와 같이 선택하자.

$$l(x) = -a(x) - \|c(x)\|N(x) - B(x)u_1 \quad (19)$$

이때,  $l(x) = -a(x) - \|c(x)\|N(x) -$

$$(B(x)R^{-1}(x)B^T(x)/4) \geq 0$$

이기 때문에  $l(x) \geq 0$  이다.

$$\int_0^\infty (l(x) + u^T R(x)u) dt \text{ 에}$$

$u = v - (R^{-1}(x)B^T(x)/2)$  을 대입하면, 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty (l(x) + u^T R(x)u) dt \\ &= \int_0^\infty \left( -a(x) - \|c(x)\|N(x) + \frac{1}{4} \right. \\ &\quad \left. (B(x)R^{-1}(x)B^T(x) + u^T R(x)u) \right) dt \\ &= \int_0^\infty \left( -a(x) - \|c(x)\|N(x) + \frac{1}{2}B(x) \right. \\ &\quad \left. (R^{-1}(x)B^T(x) - B(x)v + v^T R(x)v) \right) dt \\ &\leq -\int_0^\infty \frac{\delta V}{\delta x} (f + \Delta f + gu) dt + \int_0^\infty v^T R(x)v dt \\ &= V(x_0) - \lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) + \int_0^\infty v^T R(x)v dt \end{aligned}$$

$v = 0$  로 설정하면, 다음이 성립한다.

$$u = u^* \quad (20)$$

식(20)은 모든 허용가능한  $\Delta f(x)$  와 모든  $x_0 \in R^n$  에 대하여 다음을 의미한다.

$$J(u^*, x, x_0) \leq V(x_0) \quad (21)$$

또한 다음과 같이 설정하자.

$$\delta_0(x) = \begin{cases} \frac{c^T(x)N(x)}{\|c(x)\|}, & c(x) \neq 0 \\ \left( \frac{N(x)}{\sqrt{m}} \dots \frac{N(x)}{\sqrt{m}} \right)^T c(x) = 0 & c(x) = 0 \end{cases}$$

이때,  $\delta_0(x) \in \Gamma$  와

$$a(x) + B(x)u + c(x)\delta_0(x)$$

$$= a(x) + B(x)u + \|c(x)\|N(x)$$

이다.

$u^* = -R^{-1}(x)B^T(x)/2$  가 시스템 식(1)을 대역적 점근 안정화를 이끌며, 모든  $x_0 \in R^n$  와  $\delta_0(x)$  에 대하여 제어칙 식(18)과 시스템 식(1)의 해  $x(t)$  에 따라  $\frac{dV}{dt}$  는 적분될 수 있다.

그래서 모든  $T \geq 0$  에 대하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}
 V(x_0) &= V(x(T)) - \int_0^T \frac{dV}{dt} dt \\
 &= V(x(T)) - \int_0^T (a(x) + c(x)\delta_0(x) + B(x)u^*) dt \\
 &= V(x(T)) - \int_0^T (a(x) + \|c(x)\|N(x) + B(x)u^*) dt
 \end{aligned} \tag{22}$$

식(17), (18)과 (19)에 의하여,

$$l(x) + (u^*)^T R(x)u^* + a(x) + B(x)u^* + \|c(x)\|N(x) = 0$$

이 됨은 분명하다. 식(22)는

$$V(x_0) = V(x(T)) + \int_0^T (l(x) + (u^*)^T R(x)u^*) dt$$

를 표현된다.

$T \rightarrow \infty$  에 따라  $V(x(T)) \rightarrow 0$  이기 때문에,

$$\int_0^\infty (l(x) + (u^*)^T R(x)u^*) dt = V(x_0) \text{ 이다.}$$

그래서  $J(u^*, x, x_0) = V(x_0)$  이다. 이 등식과 부등식 (21)을 결합하면, 식(17)과 식(19)에 의하여 주어진  $R(x)$  와  $l(x)$  에 대하여 식(16)의 정확한 최적해는  $u^*$  이다.

**언급 4 :** 때로는 시스템  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  에 대한 CLF를 발견하는 것이 어렵다.

본 연구에서는  $f(x)$  가  $f(x) = f_1(x) + \Delta f_1(x)$  로 분해되며,  $f_1(x)$  는 쉽게 CLF를 얻는 특성을 갖는다고 가정한다.

$\dot{x} = f(x) + g(x)u$  의 CLF는 역최적 제어기에 대하여 정리 1과 정리 2를 만족한다.

### 4. 시뮬레이션

3장에서 제안된 내용을 검증하기 위하여 이 장에서는 2개의 예를 가지고 설명한다.

**예제 1 :** 알고 있는 값  $\theta$  를 갖는 비선형 시스템을 아래와 같이 고려하자.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -x_1 + \frac{\theta}{2}x_2^2 + \theta(-2x_2 + x_3)x_3 \\
 \dot{x}_2 &= -x_2 + x_3 \\
 \dot{x}_3 &= -x_2 + x_3 + u
 \end{aligned} \tag{23}$$

$x = (x_1, x_2, x_3)^T$  로하고, 다음과 같이 선택하자.

$$f(x) = \begin{pmatrix} -x_1 + \frac{\theta}{2}x_2^2 \\ -x_2 + x_3 \\ -x_2 + x_3 \end{pmatrix}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\Delta f(x) = \begin{pmatrix} \theta(-2x_2 + x_3)x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

다음과 같이 표시하자.

$$e(x) = \begin{pmatrix} \theta x_3 - 2\theta x_3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(x) = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta f(x) = e(x)\delta(x)N(x) = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$$

$V(x)$  를 양으로 한정되고 고유한 매끄러운 함수로 아래와 같이 설정하자.

$$V(x) = \frac{1}{2} \left( x_1 + x_2 + \frac{\theta x_2^2}{2} \right)^2 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^2}{2}$$

이때 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}
 a(x) &= L_f V(x) \\
 &= -x_2^2 - \left( x_1 + x_2 + \frac{\theta}{2}x_2^2 \right)^2 \\
 &\quad + x_3(1 + \theta x_2) \left( x_1 + x_2 + \frac{\theta x_2^2}{2} \right) + x_3^2
 \end{aligned}$$

$$B(x) = L_g V(x) = x_3$$

$$\begin{aligned}
 c(x) &= L_e V(x) \\
 &= \left[ \theta x_3 \left( x_1 + x_2 + \frac{\theta x_2^2}{2} \right) - 2\theta x_3 \left( x_1 + x_2 + \frac{\theta x_2^2}{2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

이때,  $x_3 = 0$  이면

$$a(x) = -(x_1 + x_2 + \frac{\theta}{2}x_2^2)^2 - x_2^2, \quad c(x) = 0 \text{ 이다.}$$

그래서 다음이 성립한다.

$$B(x) = 0, x \neq 0 \Rightarrow x_3 = 0, x \neq 0 \Rightarrow$$

$$a(x) = -(x_1 + x_2 + \frac{\theta}{2}x_2^2)^2 - x_2^2 < 0 = \|c(x)\|N(x)$$

정리 2에 의하여, 제어기는 식(24)와 같다.

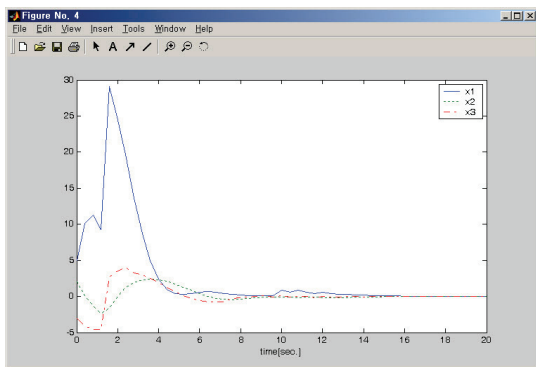
$$u = -\frac{1}{2}R^{-1}(x)B^T(x) =$$

$$\begin{cases} -\gamma B^T(x) - B^T(x) \frac{a(x) + \|c(x)\|N(x) + A}{\|B(x)\|^2} B(x) \neq 0 \\ -\gamma B^T(x) \quad B(x) = 0 \end{cases}$$

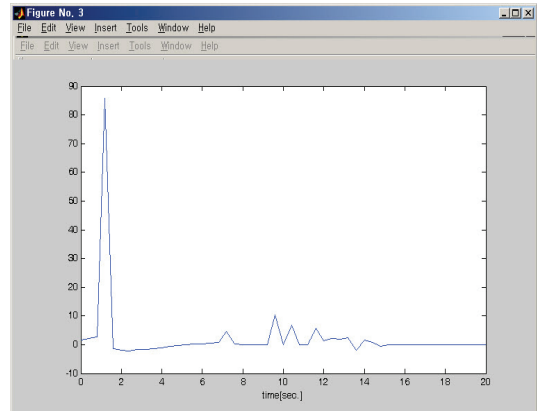
$$A = \sqrt{a(x) + \|c(x)\|N(x)}^2 + \|B(x)\|^4$$

$\theta$  에 대하여 임의의 제한 없이 시스템 식(23)과 제어칙 식(24)로 구성된 폐루프 시스템은 평형점  $x = 0$  에서 대역적 점근 안정이고  $J = V(x(0))$  이다. 모의실험을 위하여 초기 상태는

$x(0) = (5, 2, -3)^T$  이고  $\theta = 1, \gamma = 0.5$  로 하였다. 모의실험 결과는 그림 1, 2와 같다. 그림에서 보여 주듯이 모든 상태가 영으로 수렴하고 있음을 보여 주고 있다.



[그림 1] 예제 1의 상태



[그림 2] 예제 1의 제어식

**예제 2 :** 두 개의 입력을 갖는 비선형 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}_1 = x_1^2 + x_3\delta_1(x) - x_2\delta_2(x) + x_1u_1 + x_1e^{x_1}u_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + \delta_1(x) + x_1\delta_2(x) - x_3u_1 + x_3u_2$$

$$\dot{x}_3 = -2x_3 - x_1\delta_1(x) + \delta_2(x) + x_2u_1 - x_2u_2$$

$$\left\| \begin{pmatrix} \delta_1(x) \\ \delta_2(x) \end{pmatrix} \right\| \leq \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \quad N(x) = x_2^2 + x_3^2$$

(25)

아래와 같이 각각 표현하자.

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ -2x_2 \\ -2x_3 \end{pmatrix} \quad g(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_1e^{x_1} \\ -x_3 & x_3 \\ x_2 & -x_2 \end{pmatrix}$$

$$e(x) = \begin{pmatrix} x_3 & -x_2 \\ 1 & x_1 \\ -x_1 & 1 \end{pmatrix}$$

그리고  $V(x) = 0.5(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$  로 고려하자. 그러면 아래와 같은 결과를 얻는다.

$$a(x) = L_f V(x) = -2(x_2^2 + x_3^2) + x_1^3$$

$$c(x) = L_e V(x) = (x_2 \quad x_3)$$

$$B(x) = L_g V(x) = (x_1^2 \quad x_1^2e^{x_1})$$

$$\|B(x)\| = \|L_g V(x)\| = x_1^2 \sqrt{1 + e^{2x_1}}$$

그래서

$$B(x) = 0, x \neq 0 \Rightarrow x_1 = 0, x \neq 0 \Rightarrow a(x) = -(x_2^2 + x_3^2)$$

이기에

$$B(x) = 0, x \neq 0 \Rightarrow a(x) < -\|c(x)\|N(x)$$

이 성립한다. 정리 2에 의하여, 제어기는 식(26)과 같다.

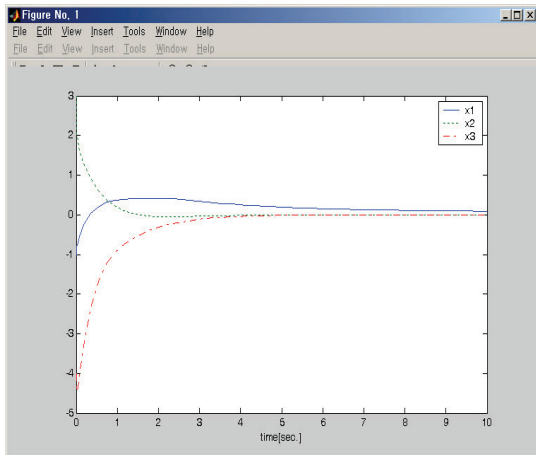
$$u = \begin{cases} -\gamma B^T(x) & B(x) \neq 0 \\ -B^T(x) \frac{a(x) + \|c(x)\|N(x) + A}{\|B(x)\|^2} & B(x) \neq 0 \\ -\gamma B^T(x) & B(x) = 0 \end{cases}$$

$$A = \sqrt{a(x) + \|c(x)\|N(x) + \|B(x)\|^4}$$

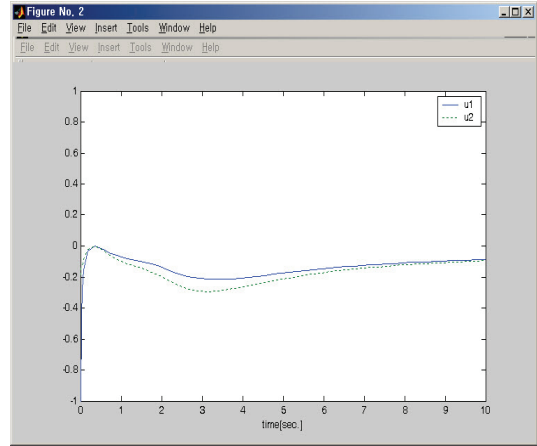
시스템 식(25)과 제어식 (26)으로 구성된 페루프 시스템은 평형점  $x = 0$  에서 대역적 점근 안정이고  $J = V(x(0))$  이다. 모의실험을 위하여 초기 상태는  $x(0) = (-1, 3, 4)^T$  이고

$\delta_1(x) = x_2 \sin(x_1), \delta_2(x) = x_3 \cos(x_2), \gamma = 0.5$  로 하였다.

모의실험 결과는 그림 3, 4와 같다. 그림에서 보여주듯이 모든 상태가 영으로 수렴하고 있음을 보여 주고 있다.



[그림 3] 예제 2의 상태



[그림 4] 예제 2의 제어식

## 5. 결론

본 논문에서는 구조적 불확실성을 갖는 비선형 시스템에 대한 역 최적 제어에 대하여 논의하였다. 이를 위하여 먼저 불확실성의 구조에 대하여 논의하고, CLF 함수를 기초로 대역적 점근 안정도에 대한 이론을 제시하고 증명하였다. 또한 역 최적 제어에 대한 최소 보존 조건을 유도하였다. 이 방법을 구조적 불확실성을 갖는 비선형 시스템에 역 최적 제어를 설계하기 위하여 사용하였다. 제안된 제어 기법을 검증하기 위하여 불확실성을 포함하는 비선형 시스템의 예를 통하여 검증하였으며, Matlab 를 이용하여 시뮬레이션을 하였다. 시뮬레이션 결과는 초기 상태에서 모든 상태가 영으로 수렴하고 있음을 보여 주고 있으며, 제안된 방법이 효과적임을 보여 주고 있다. 이 방법으로 현재의 비선형 시스템 제어 기법을 개선하게 되었다.

## 참고문헌

- [1] Kokotovic, P., and Arcak, M.: "Constructive nonlinear control. A historical perspective", *Automatica*, **37**,(5), pp.637-662, 2001.
- [2] Artstein, Z.: "Stabilization with relaxed controls", *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.*, 1983, **7**, (11), pp.1163-1173.
- [3] Sontag, E.D.: "A Lyapunov-like characterization of asymptotic controllability", *SIAM J. Control Optim.*, **21**, (3), pp.462-471, 1983.



[4] Freeman, R.A., and Kokotovic, P.V.: "Inverse optimality in robust stabilization". *SIAM J. Control Optim.*, **34**, (4), pp.1365-1391, 1996.

[5] Freeman, R.A., and Primbs, J.A.: "Control Lyapunov functions: new ideas from an old source". Proc. IEEE Decision and Control Conf., Kobe, Japan, pp.3926-3931, 1996.

[6] Mei, S.W., Shen, T.L., Sun, Y.Z., and Lu, Q.: "Passivation control of nonlinear systems with disturbances", *Control Theory and Appl.*, **16**, (6), pp.797-806, 1999.

[7] Sontag, E.D.: "A universal construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization", *Syst. Control Lett.*, **13**, (2), pp.117-123, 1989.

[8] Lin, Y., and Sontag, E.D.: "A universal formula for stabilization with bounded control", *Syst. Control Lett.*, **16**, (5), pp.393-397, 1991.

[9] Isidori, A.: "Nonlinear control systems" (Springer Verlag, Ner-York, USA, 1995, 3rd edn.)

[10] Sepulchre, R., Jankovic, M., and kokotovic, P.V.: "Constructive nonlinear control" (Springer Verlag, London, 1996)

[11] Freeman, R.A., and Kokotovic, P.V.: "Robust control of nonlinear systems" (Birkhauser, Boston, MA, 1996)

**이 상 훈**(Lee Sang Hun)

[중신회원]



- 1983년 2월 : 광운대학교 응용전자공학과 졸업 (공학사)
- 1987년 8월 : 광운대학교 대학원 전자공학과 졸업 (공학석사)
- 1992년 2월 : 광운대학교 대학원 전자공학과 졸업 (공학박사)
- 1992년 3월 ~ 현재 : 광운대학교 정교수

<관심분야>

무선인터넷, 무선네트워크, USN, 영상인식, 로보틱스

**김 진 수**(Kim Jin Soo)

[정회원]



- 1980년 2월 : 광운대학교 전자공학과 졸업 (공학사)
- 1982년 2월 : 광운대학교 대학원 전자공학과 졸업 (공학석사)
- 1998년 3월 ~ 현재 : 광운대학교 대학원 전자공학과 박사과정중
- 1983년 7월 ~ 1989년 12월 : 한국컴퓨터주식회사 기술연구소 선임연구원
- 1990년 2월 ~ 1996년 6월 : 한국증권전산 정보시스템 부 과장
- 1996년 8월 ~ 2004년 12월 : (주)창원정보통신 대표이사

<관심분야>

무선네트워크, 영상인식, 로보틱스

**이 종 용**(Lee Jong Yong)

[정회원]



- 1983년 2월 : 한양대학교 원자력공학과 졸업 (공학사)
- 1988년 2월 : 광운대학교 대학원 전자공학과 졸업 (공학석사)
- 1993년 8월 : 광운대학교 대학원 전자공학과 졸업 (공학박사)
- 1991년 3월 ~ 2004년 12월 : 광운대학교 정보과학교육원 대우교수
- 2005년 3월 ~ 현재 : 광운대학교 교양학부 부교수

<관심분야>

자동제어, 로보틱스, 영상인식