

회전축을 따라 이동하는 강체의 동해석

박용석^{1*}, 홍성철²

¹인하공업전문대학 기계과, ²한라대학교 기계자동차공학부

Dynamic Analysis of a Rigid Body Traveling on the Rotating Shaft

Yong-Suk Park^{1*} and Sung-Chul Hong²

¹Dept of Mechanical Engineering, Inha Technical College

²School of Mechanical and Automotive Engineering, Halla University

요약 이동하중을 받는 구조물의 동적 거동은 이동물체의 속도에 따라 정하중을 받을때 보다 큰 처짐을 나타내게 되어 구조물의 설계에 중요한 영향을 미치게 된다. 기계가공이나 볼스크류우를 이용한 위치제어분야에서 개선 및 성능유지를 위한 해석의 기법이 요구되고 있다. 회전하는 티모센코축을 따라 이동하는 두 개의 이동하중을 받는 시스템에 대한 운동방정식이 Hamilton의 원리로 유도되었다. 무차원화된 속도비, 질량비, Rayleigh 계수비의 영향이 시스템의 응답에 미치는 영향을 해석하였다.

Abstract The analysis of rigid body traveling along the rotating Timoshenko shaft has been a topic of interest. The problem arose from the observations that as a structure is subjected to moving loads, dynamic deflection as well as stresses can be significantly higher than those for static loads. The establishment of analytical method for the development and maintenance of performance is required in the fields of the machining operations and the position control using ball screw. The equations of motion for the rotating shaft subjected to the two moving forces are derived by using Hamilton's principle. Influence of system parameters such as the speed ratio, the mass ratio and the Rayleigh coefficient is discussed on the response of the moving system.

Key Words : Speed ratio, Mass ratio, The Rayleigh coefficient, Rotating shaft

1. 서론

이동하중을 받는 구조물의 동적 거동은 이동물체의 속도에 따라 정하중을 받을때 보다 큰 처짐을 나타내게 되어 구조물의 안정성과 성능에 매우 중요한 문제로 대두하고 있다. 이러한 문제에 대한 관심은 초기에 철도, 교량, 등과 같은 구조물 설계에 대한 연구로 시작되었으며, 선반이나 드릴링작업과 같은 기계가공 분야와 볼 스크류우를 이용한 위치제어 분야에서도 성능유지 및 개선을 위한 연구가 진행되고 있다.

Fryba[1]는 폭넓은 해석의 방법을 제시하였다. 구조물과의 동적상호작용을 통한 이동질량의 관성효과는 중력보다도 구조물의 응답에 큰 영향을 미치고 있으므로 속

도비와 질량비에 대한 수치해석 연구가 활발히 진행되어 왔다. [2-5] Katz[6]는 회전하는 Euler, Rayleigh, Timoshenko 보에 일정한 속도로 이동하는 하중을 받는 문제의 동적응답 해석을 수행하였다. 유도된 운동방정식은 뉴턴 방법(Newton's Method)을 이용하였다. Lee[7]는 가정된 모드기법(Assumed Mode Method)을 이용하여 이동하중을 받는 Timoshenko 보에 대하여 운동에너지와 포텐셜 에너지를 행렬식으로 나타냈으며, Hamilton의 원리를 이용하여 운동의 방정식을 유도하였다. 축방향의 압축력을 고려한 운동의 수치해석이 병행되었다. 한편 Lee[8]는 이동질량을 받는 회전축에 대하여 한 평면에 대한 연구를 수행하였으며, 일정속도이상의 회전속도에서의 이동물체의 분리현상을 연구하였다. Gu[9] 이동질량에 대

본 논문은 2008년도 인하공업전문대학 교내연구비 지원에 의해 수행되었음.

*교신저자 : 박용석(yspark@inhatc.ac.kr)

접수일 09년 11월 20일

수정일 10년 02월 11일

게재확정일 10년 02월 24일

한 해석, 고속으로 회전하는 볼 스크류와 이동하는 너트로 구성된 시스템에 대한 해석을 수행하였으며, Park[10]은 이동질량과 압축력을 받는 티모센코 회전축의 운동에 대한 설계 파라미터를 추출할 수 있는 무차원 변수에 대한 연구를 수행하였다.

볼나사는 회전운동을 직선운동로 바꾸는 기계요소로 정밀이송이 가능하여, 산업현장의 CNC나 머시닝센터 뿐 아니라 정밀측정기기, 자동화기기, 사무기기 등에 사용되고 있다.[11] Park[12]은 볼나사를 이용한 이송장치와 같이 축의 회전속도와 이동물체의 이동속도가 연계된 시스템의 운동해석을 수행하였다.

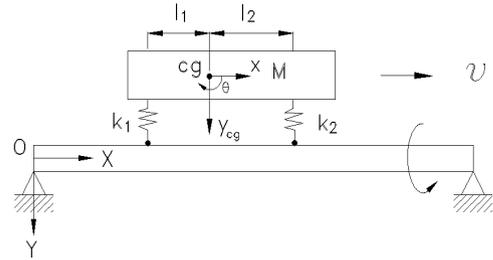
대부분의 연구는 1개의 이동하중이나 이동질량이 접촉하고 있는 구조물과의 동적상호작용에 대한 해석으로 볼 스크류를 이용한 위치제어 분야에서 사용되는 더블 너트 방식의 볼나사와 같이 회전축과 2개의 지점에서 접촉하고 있는 동적상호작용에 관한 연구는 진행되지 않고 있는 실정이다.

본 연구에서는 평면 운동하는 기계장치의 운동을 2 자유도 강체의 운동으로 모델링 하여, 2개의 접촉점을 통해 회전축과의 동적상호작용 특성을 파악할 수 있는 모델을 개발하고자 한다. 중요 변수들이 기계장치 운동에 어떠한 영향을 미치는지를 해석하여, 제품의 안정성을 확보할 수 있는 설계 자료를 제시하고자 한다.

2. 시스템의 운동방정식

길이가 L 이며, 단면이 일정한 축이 단순지지 되어 있으며, 일정한 각속도 Ω 로 회전하고 있다. 회전축과 접촉하여 이동하는 강체는 질량 M , 관성모멘트 I_m 을 갖고, 회전축과 2점에서 스프링(k_1, k_2)으로 접촉하고 있다. 강체는 일정한 속도 v_m 으로 X 축 방향으로 이동하며, 강체는 축과 함께 회전하지 않으며, 운동중에 축과 접촉 상태에 있다고 가정한다. 축의 단면적은 A , I 는 관성모멘트, 단면 형상계수는 κ , 영의계수 E , 전단탄성계수 G 그리고 ρ 는 밀도를 나타낸다.

L_1, L_2 는 질량중심으로부터 지지대까지의 거리를 나타낸다. 평면운동을 하는 시스템의 운동방정식은 절대 좌표로 수직변위, y_{cg} 와 각변위, θ 로 표현하면 아래와 같이 나타낼 수 있다.



[그림 1] 시스템의 모델링

축은 Timoshenko의 빔으로 Y 와 Z 축 방향으로의 처짐은 $V(x,t)$ 와 $W(x,t)$ 로 나타내며, Y 와 Z 축에 대한 미소의 회전각은 $B(x,t)$ 와 $\Gamma(x,t)$ 로 나타낸다. 따라서 굽힘에 의한 처짐과 전단에 의한 변형은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$V(x,t) = V_b(x,t) + V_s(x,t) \quad (1a)$$

$$W(x,t) = W_b(x,t) + W_s(x,t) \quad (1b)$$

$$B(x,t) = -\frac{\partial W_b(x,t)}{\partial x}, \quad \Gamma(x,t) = \frac{\partial V_b(x,t)}{\partial x} \quad (1c)$$

축의 포텐셜에너지 U_s 는 다음과 같이 표현된다.

$$U_s = \frac{1}{2} \int_0^L EI [(V_b'')^2 + (W_b'')^2] dx + \frac{1}{2} \int_0^L \kappa GA [(V_s')^2 + (W_s')^2] dx \quad (2a)$$

여기서 (') 는 x 에 대한 편미분을 나타낸다. 식(2)는 식(1)의 관계식으로부터 다음과 같이 정리되어진다.

$$U_s = \frac{1}{2} \int_0^L EI [(\Gamma')^2 + (B')^2] dx + \frac{1}{2} \int_0^L \kappa GA [(V')^2 + (W')^2 + \Gamma^2 + B^2 - 2\Gamma V' + 2B W'] dx \quad (2b)$$

아울러 이동계의 포텐셜에너지는 U_M 는 다음과 같이 표현된다.

$$U_M = \frac{1}{2} k_1 (y_{cg} - l_1 \theta + V_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_{cg} + l_1 \theta + V_2)^2 \quad (3)$$

일정한 속도 Ω 로 회전하는 축의 운동에너지 T_R 과 접촉하는 이동체의 운동에너지 T_M 은 각각 다음과 같이 나타내어진다.

$$T_R = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A [\dot{V}^2 + \dot{W}^2] dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho I [\dot{B}^2 + \dot{\Gamma}^2] dx - \frac{1}{2} \Omega (2\rho I) \int_0^L [\dot{\Gamma}B - \dot{B}\Gamma] dx + \frac{1}{2} \Omega^2 \int_0^L 2\rho I dx \quad (4)$$

$$T_M = \frac{1}{2} [M \dot{y}_{cg}^2 + I_m \dot{\theta}_{cg}^2] \quad (5)$$

여기서 (\cdot) 는 x에 대한 편미분을 ($\dot{\cdot}$) 는 시간에 대한 미분을 나타낸다.

중력에 의해 시스템에 가해지는 가상일은 다음과 같다.

$$\delta W_G = \frac{l_2}{l_1+l_2} Mg \delta V|_{x=x_1} + \frac{l_1}{l_1+l_2} Mg \delta V|_{x=x_2} \quad (6)$$

Hamilton의 원리를 이용하여 다음과 같은 시스템의 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\rho A \ddot{\mathbf{V}} - \kappa A G (\mathbf{V}'' - \mathbf{\Gamma}') = \mathbf{F}_i \quad (7)$$

$$\rho A \ddot{\mathbf{W}} - \kappa A G (\mathbf{W}'' + \mathbf{B}') = \mathbf{0} \quad (8)$$

$$\rho I \ddot{\mathbf{B}} + 2\Omega \rho I \dot{\mathbf{\Gamma}} - EI \mathbf{B}'' + \kappa A G (\mathbf{B} + \mathbf{W}') = \mathbf{0} \quad (9)$$

$$\rho I \ddot{\mathbf{\Gamma}} - 2\Omega \rho I \dot{\mathbf{B}} - EI \mathbf{\Gamma}'' + \kappa A G (\mathbf{\Gamma} - \mathbf{V}') = \mathbf{0} \quad (10)$$

$$M \ddot{\mathbf{y}}_{cg} + k_1 (\mathbf{y}_{cg} - l_1 \boldsymbol{\theta} + \mathbf{V}_1) + k_2 (\mathbf{y}_{cg} + l_2 \boldsymbol{\theta} + \mathbf{V}_2) = \mathbf{0} \quad (11)$$

$$I_m \ddot{\boldsymbol{\theta}} + k_1 l_1 (\mathbf{y}_{cg} - l_1 \boldsymbol{\theta} + \mathbf{V}_1) - k_2 l_2 (\mathbf{y}_{cg} + l_2 \boldsymbol{\theta} + \mathbf{V}_2) = \mathbf{0} \quad (12)$$

여기서

$\mathbf{F}_i = F_1 + F_2$ 이며 각 항은 아래와 같다.

$$F_1 = k_1 (\mathbf{y}_{cg} - l_1 \boldsymbol{\theta} + \mathbf{V}_1) + \left(\frac{l_2}{l_1+l_2} Mg \right)_{x=x_1} \quad (13a)$$

$$F_2 = k_2 (\mathbf{y}_{cg} + l_2 \boldsymbol{\theta} + \mathbf{V}_2) + \left(\frac{l_1}{l_1+l_2} Mg \right)_{x=x_2} \quad (13b)$$

무차원 운동방정식의 변위를 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} v(\xi, \tau) &= \sum_{i=1}^n v_i(\tau) \phi_i(\xi), & w(\xi, \tau) &= \sum_{i=1}^n w_i(\tau) \phi_i(\xi) \\ p(\xi, \tau) &= \sum_{i=1}^n p_i(\tau) \psi_i(\xi), & q(\xi, \tau) &= \sum_{i=1}^n q_i(\tau) \psi_i(\xi) \end{aligned} \quad (14)$$

Galerkin 방법에 의해 식(7)~(12)의 시스템 운동방정식은 다음과 같은 행렬 방정식으로 유도된다.

$$\begin{aligned} \rho A \mathbf{M} \ddot{\mathbf{v}} + \kappa A G \mathbf{H} \mathbf{v} + (k_1 \mathbf{B}_1 + k_2 \mathbf{B}_2) \mathbf{v} - \kappa A G \mathbf{E}^T \mathbf{q} \\ - (k_1 \mathbf{a}_1 + k_2 \mathbf{a}_2) \mathbf{y}_{cg} + (k_1 l_1 \mathbf{a}_1 - k_2 l_2 \mathbf{a}_2) \boldsymbol{\theta} \\ = \left(\frac{l_2}{l_1+l_2} Mg \right) \mathbf{a}_1 + \left(\frac{l_1}{l_1+l_2} Mg \right) \mathbf{a}_2 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\rho A \mathbf{M} \ddot{\mathbf{w}} + \kappa A G \mathbf{H} \mathbf{w} - \kappa A G \mathbf{E}^T \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (16)$$

$$\rho I \mathbf{S} \ddot{\mathbf{p}} + 2\Omega \rho I \mathbf{S} \dot{\mathbf{q}} + EI \mathbf{K} \mathbf{p} + \kappa A G \mathbf{S} \mathbf{p} + \kappa A G \mathbf{E} \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (17)$$

$$\rho I \mathbf{S} \ddot{\mathbf{q}} + 2\Omega \rho I \mathbf{S} \dot{\mathbf{p}} + EI \mathbf{K} \mathbf{q} + \kappa A G \mathbf{S} \mathbf{q} - \kappa A G \mathbf{E} \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (18)$$

$$M \ddot{\mathbf{y}}_{cg} + k_1 (\mathbf{y}_{cg} - l_1 \boldsymbol{\theta}) - (k_1 \mathbf{B}_1 + k_2 \mathbf{B}_2) \mathbf{v} + k_2 (\mathbf{y}_{cg} + l_2 \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} I_m \ddot{\boldsymbol{\theta}} + k_1 l_1 (\mathbf{y}_{cg} - l_1 \boldsymbol{\theta}) - k_2 l_2 (\mathbf{y}_{cg} + l_2 \boldsymbol{\theta}) \\ + (k_1 l_1 \mathbf{B}_1^T - k_2 l_2 \mathbf{B}_2^T) \mathbf{v} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (20)$$

시스템의 운동방정식 (15) - (20) 을 행렬 형태로 표현하면 다음과 같은 행렬 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$[\overline{\mathbf{M}}] \ddot{\mathbf{Q}} + [\overline{\mathbf{C}}] \dot{\mathbf{Q}} + ([\overline{\mathbf{K}}]_f + [\overline{\mathbf{K}}]_m) \mathbf{Q} = \{\overline{\mathbf{F}}\} \quad (21)$$

$$[\overline{\mathbf{M}}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{M}]_s & 0 \\ 0 & [\mathbf{M}]_m \end{bmatrix}, \quad [\overline{\mathbf{C}}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{C}]_s & 0 \\ 0 & [\mathbf{C}]_0 \end{bmatrix}$$

$$[\overline{\mathbf{K}}]_f = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}]_s & 0 \\ 0 & [\mathbf{K}]_0 \end{bmatrix}, \quad [\overline{\mathbf{K}}]_m = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}]_{11} & [\mathbf{K}]_{12} \\ [\mathbf{K}]_{21} & [\mathbf{K}]_{22} \end{bmatrix}$$

$$\{\overline{\mathbf{F}}\} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_s \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\overline{\mathbf{M}}]_s = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{S} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{S} \end{bmatrix},$$

($4n \times 4n$)

$$[\overline{\mathbf{M}}]_m = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (2 \times 2)$$

$$[\bar{\mathbf{C}}]_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\Omega\rho\mathbf{I}\mathbf{S} \\ 0 & 0 & -2\Omega\rho\mathbf{I}\mathbf{S} & 0 \end{bmatrix}, (4n \times 4n)$$

$$[\bar{\mathbf{C}}]_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, [\bar{\mathbf{K}}]_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{\mathbf{K}}]_s = \begin{bmatrix} \kappa A G \mathbf{H} & 0 & 0 & -\kappa A G \mathbf{E}^T \\ 0 & \kappa A G \mathbf{H} & \kappa A G \mathbf{E}^T & 0 \\ 0 & \kappa A G \mathbf{E} & \kappa A G \mathbf{S} & 0 \\ -\kappa A G \mathbf{E} & 0 & 0 & EI \mathbf{K} + \kappa A G \mathbf{S} \end{bmatrix},$$

(4n × 4n)

$$[\bar{\mathbf{K}}]_{11} = \begin{bmatrix} [k_1 \mathbf{B}_1 + k_2 \mathbf{B}_2] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (4n \times 4n)$$

$$[\bar{\mathbf{K}}]_{12} = \begin{bmatrix} -k_1 \mathbf{a}_1 - k_2 \mathbf{a}_2 & k_1 L_1 \mathbf{a}_1 - k_2 L_2 \mathbf{a}_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, (2 \times 4n)$$

$$[\bar{\mathbf{K}}]_{21} = [\bar{\mathbf{K}}]_{12}^T, (4n \times 2)$$

$$[\bar{\mathbf{K}}]_{22} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_1 L_1 + k_2 L_2 \\ -k_1 L_1 + k_2 L_2 & k_1 L_1^2 + k_2 L_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\{\mathbf{F}_s\} = \left\{ \left(\frac{l_2}{l_1 + l_2} \text{Mg} \right) \mathbf{a}_1 + \left(\frac{l_1}{l_1 + l_2} \text{Mg} \right) \mathbf{a}_2 \right\}, (n \times 1)$$

여기서, 각 행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{v} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}^T$$

$$\mathbf{w} = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}^T$$

$$\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}^T$$

$$\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}^T$$

$$\mathbf{M} = \{m_{ij}\}, m_{ij} = \int_0^L \phi_i \phi_j \, dx$$

$$\mathbf{S} = \{s_{ij}\}, s_{ij} = \int_0^L \psi_i \psi_j \, dx$$

$$\mathbf{K} = \{k_{ij}\}, k_{ij} = \int_0^L \psi'_i \psi'_j \, dx$$

$$\mathbf{H} = \{h_{ij}\}, h_{ij} = \int_0^L \phi'_i \phi'_j \, dx$$

$$\mathbf{E} = \{e_{ij}\}, e_{ij} = \int_0^L \psi_i \phi'_j \, dx$$

$$\mathbf{a} = \{a_i\}, a_i = \phi_i(x = v_m t)$$

$$\mathbf{A} = \{A_{ij}\}, A_{ij} = \frac{1}{2} (\phi_i(x = v_m t) \phi'_j(x = v_m t) - (\phi'_i(x = v_m t) \phi_j(x = v_m t)))$$

$$\mathbf{B}_1 = \{b_{ij}\}_1, b_{ij1} = \phi_i(x = x_1) \phi_j(x = x_1)$$

$$\mathbf{B}_2 = \{b_{ij}\}_2, b_{ij2} = \phi_i(x = x_2) \phi_j(x = x_2)$$

$$\mathbf{C} = \{c_{ij}\}, c_{ij} = \phi'_i(x = v_m t) \phi'_j(x = v_m t)$$

3. 수치해석

수치해석을 수행하여 설계파라미터 별 응답특성을 파악하기 위해 아래와 같은 무차원 매개변수를 정의한다. 또한 5차 Runge-Kutta 법을 이용하여 시스템의 해를 구하였으며, 프로그램은 Matlab을 이용하였다.

$$\text{이동질량의 속도비} : \alpha = v_m / v_{cr}$$

$$\text{축의 회전비} : \bar{\Omega} = \Omega / \omega_1$$

$$\text{Rayleigh 보의 계수} : \beta = \pi r_0 / L$$

$$\text{질량비} : \bar{m} = M / \rho A L$$

여기서, v_{cr} 은 회전하지 않는 단순지지 보의 임계속도 $v_{cr} = (\pi/L) \sqrt{EI/\rho A}$ 이며, β 는 축의 길이에 대한 지름과 관련된 단면의 정보를 나타내는 Rayleigh 보 계수이다. r_0 는 회전반경(radius of gyration), ω_1 은 단순지지보의 고유진동수를 나타낸다. 지지대의 스프링상수는 $k = EA/L$ 을 기준으로 무차원화 하였다.

3.1 운동해석 I

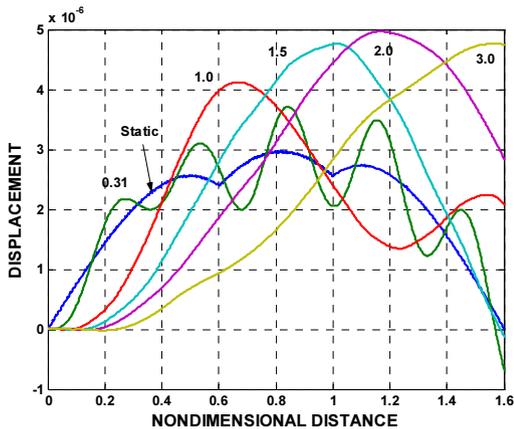
첫째로 회전하지 않는 축에 두개의 지지부를 갖는 이동계의 운동해석을 다루었다. 사용된 물성치는 Lin[13]이 사용한 것으로 표 1과 같다. 표 1은 단순지지보에 대한

해석에 사용된 물성치로 질량비가 약 0.25인 경우이다.

[표 1] 프로그램에 사용된 물성치

Parameter of the Beam	Parameter of the Moving System
$L = 47 \text{ in}$	$l_1 = 13.7005 \text{ in}$
$\rho = 2.7701 \times 10^{-4} \text{ lbs}^2/\text{in}^4$	$l_2 = 14.6229 \text{ in}$
$E = 15.2 \times 10^6 \text{ psi}$	$m = 0.02514 \text{ lbs}^2/\text{in}$
$A = 7.90625 \text{ in}^2$	$k_1 = 12356.66 \text{ lb/in}$
$I = 22.7 \text{ in}^4$	$k_2 = 10297.74 \text{ lb/in}$
	$I_m = 5.0297 \text{ lb in}^2$

그림 2는 보의 중앙에서의 응답을 이동계의 이동속도에 따라 비교한 결과이다. 가로축은 축의 길이에 대한 이동계의 위치비로 나타낸 것이다. 무차원 거리 (Nondimensional distance)는 이동계의 지지대 2가 축의 선단을 진입했을 때가 0이며, 지지대 1이 탄성보의 끝단을 지날 때 최대값을 나타낸다. 정적처짐의 경우 무차원 거리 0.6일때 지지대 1이 축에 하중을 작용하기 시작하고 있으므로 축의 처짐의 양이 증가함을 알 수 있고, 무차원 거리 1일때 지지대 2의 하중이 작용하지 않으며, 지지대 1의 하중만이 작용하므로, 처짐양이 불연속적으로 변하고 있음을 알 수 있다. 보의 고유진동주기에 비해 낮은 속도로 이동하는 경우($\alpha = 0.31$) 티모센코축의 응답은 정적처짐곡선을 따라감을 알 수 있으며, 이동속도비가 커짐에 따라 최대 처짐량이 점점 커지다가 감소하는 경향을 볼 수 있다.

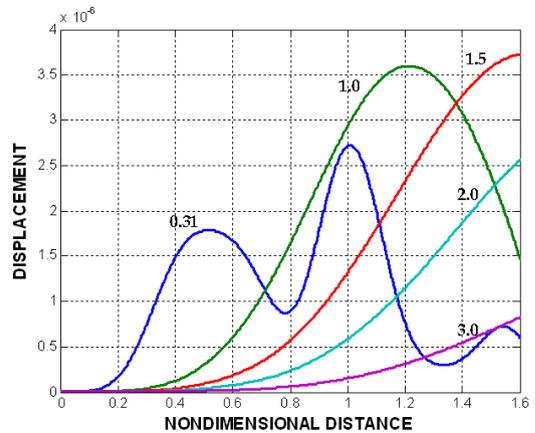


[그림 2] 이동계의 속도비(α)에 따른 티모센코축의 중앙 지점에서의 응답

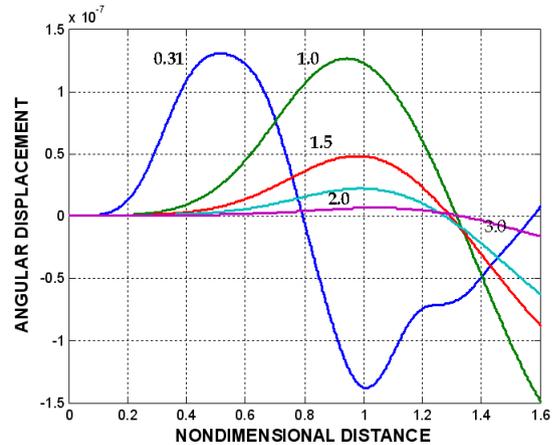
한편 강체의 수직운동의 결과가 그림 3과 같다. 최대

변위는 속도비가 1.5 부근일 때 발생되며 지지대 1이 탄성보 끝단을 이탈할 시기에 발생된다. 한편 이동계의 속도가 더 빠를 경우 최대 처짐량은 작아진다.

강체의 회전운동의 결과는 그림 4와 같다. 최대각변위는 속도비가 0.31, 이동계의 이동거리비가 0.5부근 즉 지지대 2가 탄성보의 중앙점에 위치했을 때 나타난다. 이러한 각변위는 이동거리비가 0.8 부근에서 영이 되었다가 시계방향으로 회전하여 지지대 2가 탄성보의 끝단을 지날 때 다시 한번 큰 각변위를 나타낸다.



[그림 3] 이동계의 속도비(α)에 따른 강체의 수직변위 응답



[그림 4] 이동계의 속도비(α)에 따른 강체의 각변위 응답

3.2 운동해석 II

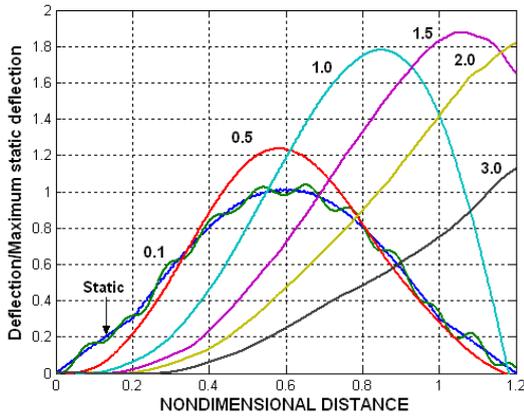
두 번째는 축이 회전운동을 할 때, 이동계의 운동해석을 다루었다. 수치해석에 사용된 무차원 변수는 Park[10]이 제시한 아래와 같은 영역을 사용하였고 회전축에 대한 물성치는 표 2와 같다.

- 이동물체의 속도비 : $0 \leq \alpha \leq 1.5$
- 축의 회전비 : $0 \leq \bar{\Omega} \leq 2.5$
- Rayleigh 보의 계수 : $0 \leq \beta \leq 0.3$
- 질량비 : $0.1 \leq m \leq 0.4$
- 스프링상수비 : $\bar{k} = k_1/k = k_2/k$

[표 2] 프로그램 해석에 사용된 물성치

Parameter	Value
ρ	7700 kg/m ³
E	207 GPa
G	77.6 GPa
L	1 m
κ	0.9
l_1, l_2	0.1

그림 5는 속도비 α 가 0.1, 0.5, 1.0, 1.5일 때, 축의 중앙지점에서의 처짐 결과를 보여 주고 있다. Y축의 값은 정적처짐에 대한 비로 나타내고 있다. 속도비가 임계속도보다 작은 경우는 정적처짐곡선을 따라가고 있으며, 속도가 빠를수록 처짐값이 커짐을 알 수 있다. 처짐의 최대값은 점점 커지다가 작아지고 있다.

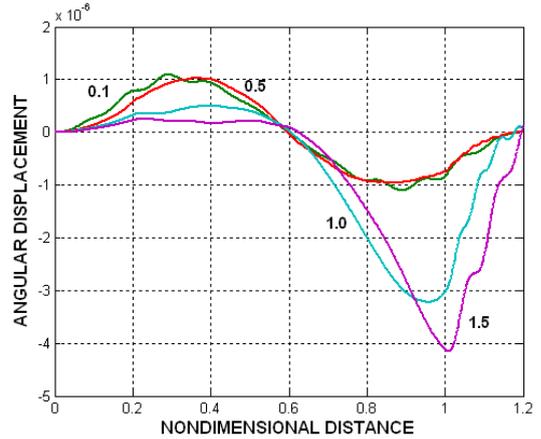


[그림 5] 속도비(α) 변화에 따른 티모센코축의 중앙지점에서의 응답
($\bar{\Omega}=2.5, \beta=0.15, \bar{m}=0.2, \bar{k}=0.1$)

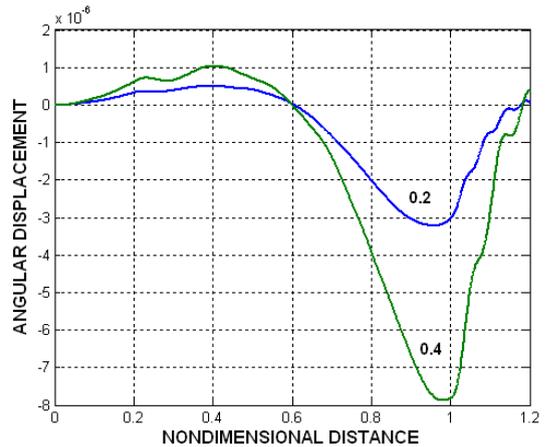
아울러 최대값을 나타내는 지점은 속도가 빠를수록 이동체가 중앙위치를 지날때에서 축의 우측 끝부위로 이동하며 발생함을 볼 수 있다.

강체의 각변위에 대한 결과가 그림 6이다. 이동체의 속도가 축의 임계속도보다 큰 경우인 $\alpha=1.0, 1.5$ 에는 강체의 각변위가 크게 나타나고 있음을 확인할 수 있었다.

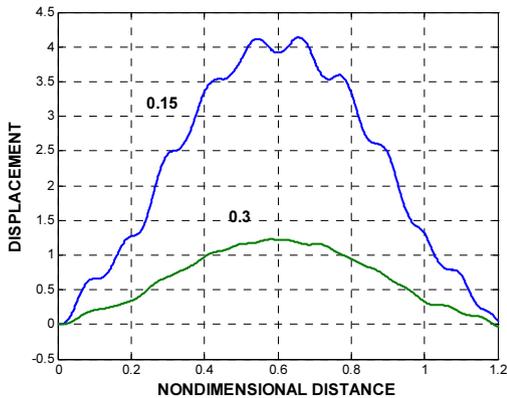
질량비의 변화에 따른 각변위의 비교가 그림 7과 같다. 질량비가 커짐에 따라 각변위가 크게 나타남을 보여주고 있다. 그림 8은 Rayleigh 보의 계수 β 의 변화에 따른 해석결과이다. β 의 값이 작을 경우는 단면적이 작은 축으로 결과에서 보는바와 같이 하중의 영향이 크게 나타나고 있음을 알 수 있다.



[그림 6] 속도비(α) 변화에 따른 강체의 각변위
($\bar{\Omega}=2.5, \beta=0.15, \bar{m}=0.2, \bar{k}=0.1$)



[그림 7] 질량비(\bar{m}) 변화에 따른 강체의 각변위
($\bar{\Omega}=2.5, \beta=0.15, \bar{k}=0.1$)



[그림 8] Rayleigh 보의 계수(β) 변화에 따른 티모센코축의 중앙지점에서의 응답
($\bar{\Omega}=2.5$, $\bar{m}=0.2$, $\bar{k}=0.1$, $\alpha=0.1$)

4. 결론

일정한 속도로 이동하는 강체가 2개의 접촉점을 통해 회전축과 동적상호작용하는 시스템의 운동특성을 파악할 수 있는 연구를 수행하여 얻은 결과는 다음과 같다.

- (1) 평면운동하는 강체가 Timoshenko 회전축과 접촉 운동하는 모델을 제시하였으며, 동적상호작용하는 포괄적인 운동 방정식이 유도되었다.
- (2) 질량비가 작고 속도비가 큰 경우의 특징파라미터 영역에서의 운동 해석시 강체의 운동은 회전축에 큰 영향을 미치지 않으며, 회전축의 운동이 일종의 외력 형태로 강체에 가해 진다고 할 수 있다.
- (3) 이동하는 2점 가진형태를 받는 회전축의 경우 속도비가 커짐에 따라 Y방향 처짐비의 최대값은 점점 커지다가 작아지며, 최대처짐은 모두 $\alpha=1.5\sim 2.0$ 부근에서 나타나고 있음을 알 수 있다. 아울러 최대처짐이 발생하는 위치는 회전축의 우측부위로 이동하며 나타남을 확인 할 수 있다.
- (4) 질량비가 커질수록 강체의 각운동 크기가 커지며, Rayleigh 보의 계수 β 의 값이 작은 경우 단면적이 작은 축으로 처짐비가 크게 나타남을 알 수 있다.
- (5) 본 연구를 통하여 회전축과 2점 접촉하는 강체의 운동을 해석할 수 있는 기반을 마련하였으며, 회전축의 속도와 연계된 이동계의 속도에 따른 동적상호 작용과 다양한 경계조건에 대한 특성 해석이 가능하게 되었다.

참고문헌

- [1] Fryba L., "Vibration of Solids and Structures Under Moving Loads," Noordhoff International, Groningen, Netherlands, 1972.
- [2] Ting, E. C., Genin, J. and Ginsberg, J. H., "A General Algorithm for Moving Mass Problems," J. of Sound and Vibration, Vol.33, No.1, pp. 49-58, 1974.
- [3] Akin, J. E. and Mofied, M., "Numerical Solution for Response of Beam with Moving Mass," Journal of Structure Engineering, Vol. 115, No. 1, pp. 120-131, 1989.
- [4] Cifuentes, A. O., "Dynamic Response of a Beam Excited by a Moving Mass," Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 5, pp. 49-58, 1989.
- [5] Stanistic, M. M., "On a New Theory of the Dynamic Behavior of the Structures Carrying Moving Masses," Ingenieur-Archive, Vol. 56, pp. 175-185, 1985.
- [6] Katz R., Lee C. W. Ulsoy A. G., Scott R.A., "The dynamic response of a rotating shaft subject to a moving load," Journal of Sound and Vibration 122 (1) 131-148, 1988.
- [7] Lee H. P., "Dynamic response of a rotating Timoshenko shaft subject to axial forces and moving loads," Journal of Sound and Vibration 181 (1) 169-177, 1995.
- [8] Lee H. P., "Dynamic response of a Timoshenko beam subject to a moving mass," Journal of Sound and Vibration 198 (2) 249-256, 1996.
- [9] Gu U. C., Cheng C. C., "Vibration analysis of a high-speed spindle under the action of a moving mass," Journal of Sound and Vibration, article in press, 2004.
- [10] Park, Y. S. and Hong, S. C., "Nondimensional Parameter Study of a Timoshenko Rotating Shaft Subjected to Moving Mass and Compressive Axial Forces," Transaction of KSNVE, Vol.17, No.12, pp.1201-1207, 2007.
- [11] Toshiaki Y., "High Performance Technology in Ball Screw," Journal of the Japan Society of Precision Engineering, Vol. 61, No.3, pp. 333-338, 1995.
- [12] Park, Y. S. and Hong, S. C., "Vibration Analysis of a Moving Mass Travelling on the Timoshenko Rotating Shaft," Journal of the Korea Academia-Industrial cooperation Society, Vol.9, No.4, pp.859-864, 2008.
- [13] Lin, Y. H. and Trethewey, M. W., "Finite Element Analysis of Elastic Beams Subjected to Moving

Dynamic Loads," Journal of Sound and Vibration, 136(2), pp. 323-342, 1990.

- [14] Meirovitch, L., Computational Methods in Structural Dynamics, Sijith & Noordhoff, 1980.

박 용 석(Yong-Suk Park)

[정회원]



- 1986년 2월 : 인하대학교 기계공학과(공학사)
- 1988년 2월 : 인하대학교 기계공학과(공학석사)
- 1996년 2월 : 인하대학교 기계공학과(공학박사)
- 1995년 3월 ~ 2004년 2월 : 대전전문대학 부교수
- 2004년 3월 ~ 현재 : 인하공업전문대학 기계과 교수

<관심분야>

회전체 동역학, 구조해석, 진동소음제어

홍 성 철(Sung-Chul Hong)

[정회원]



- 1981년 2월 : 인하대학교 기계공학과 (공학사)
- 1987년 9월 : 인하대학교 기계공학과 (공학석사)
- 1992년 2월 : 인하대학교 기계공학과 (공학박사)
- 1995년 3월 ~ 현재 : 한라대학교 기계자동차공학부 교수

<관심분야>

진동 및 구조동역학, 비선형진동