

Winkler 지반상에 놓인 강성보의 해석

이승현¹, 권오순^{2*}, 장인성²

¹선문대학교 토목공학과, ²한국해양연구원 연안개발에너지연구부

Analytic Study on Rigid Beam Resting on Winkler Foundation

Seung-Hyun Lee¹, Oh-Soon Kwon^{2*} and In-Sung Jang²

¹Dept. of Civil Engineering, Sunmoon University

²Korea Ocean Research and Development Institute

요약 Winkler 지반과 2변수 Winkler 지반상에 놓인 강성보에 집중하중과 모멘트가 작용하는 경우에 대해 강성보에 발생하는 변위, 접촉압력, 모멘트를 유도하여 보았다. Winkler 지반상의 강성보에 발생하는 모멘트의 유도결과로부터 강성보를 따르는 모멘트분포는 스프링 상수와 무관하게 나타남을 알 수 있었고 스프링 상수가 선형인 경우가 일정한 경우에 비해 모멘트값이 크게 계산되었다. 간단한 계산을 통해 볼 때 2변수 Winkler 지반에 놓인 강성보에 발생하는 최대 휨모멘트가 Winkler 지반에 놓인 강성보에 발생하는 그것에 비해 크게 계산되었다.

Abstract Displacement, contact pressure and moment which are developed in rigid beam on the Winkler foundation and 2 parameter Winkler foundation were derived. It can be seen that moment distribution along with rigid beam on the Winkler foundation are regardless of spring constant and the moments calculated from assuming linear spring constant were greater than those from assuming constant spring constant. Simple calculation revealed that the maximum moment developed in the rigid beam on the 2 parameter Winkler foundation was larger than that developed in the rigid beam on the Winkler foundation.

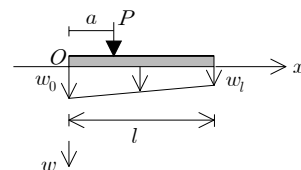
Key Words : Rigid beam, Winkler foundation, 2 parameter Winkler foundation, Spring constant, Moment

1. 서론

Winkler 지반(Winkler, 1867)은 기초지반 위에 놓인 기초의 변위, 부재력을 결정하기 위한 개념적 방법으로서 오랜 기간에 걸쳐 사용되어 왔다. 지표면에 놓이는 구조물의 강성은 구조물 자체의 강성과 더불어 기초지반의 강성에 의존하여 결정된다. 본 연구에서는 Winkler 지반상에 놓이는 강성보에 발생하는 변위, 접촉압력, 모멘트를 유도하여 보고 하중조건에 따른 모멘트를 비교해 보았다. 특히, Winkler 지반개념으로는 모사할 수 없는, 보의 양끝단을 벗어난 지표면의 연직변위를 모사하기 위해 탄성막의 개념을 도입한 2변수 Winkler 모델로부터 강성보의 거동을 분석하여 보았다.

2. Winkler 지반상의 강성보의 거동

집중하중이 길이가 l 이고 단위폭을 갖는 강성보에 작용하는 경우를 그림 1에 나타내었다. 하중의 작용위치는 좌표원점(O 점)으로부터 a 만큼 떨어진 거리에 작용하고 있다.



[그림 1] 집중하중을 받는 강성보

[Fig. 1] Rigid beam under Concentrated Load

*교신저자 : 권오순(oskwon@kordi.re.kr)

접수일 11년 08월 24일

수정일 11년 09월 01일

계재확정일 11년 11월 10일

그림 1에서 기초지반의 스프링 상수는 식 (1)과 같이 선형함수로 가정한다.

$$k = k_1 + k_2x \quad (1)$$

그림 1로부터 보의 길이에 따른 변위분포, $w(x)$ 와 접촉압력, $p(x)$ 는 각각 식 (2) 및 식 (3)과 같이 표현된다.

$$w(x) = w_0 - \frac{x}{l}(w_0 - w_1) \quad (2)$$

$$p(x) = (k_1 + k_2x)w(x) \quad (3)$$

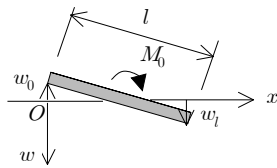
그림 1에서 연직방향으로의 힘의 평형조건과 O 점에 대한 모멘트 평형조건을 적용하면 보의 양끝단에서의 변위를 구할 수 있고 식 (2)를 적용하면 다음의 식 (4)를 얻는데 식 (4)에서 A 와 B 는 각각 식 (5) 및 식 (6)과 같다.

$$w(x) = \frac{6PA}{(3k_1l + k_2l^2)B + (3k_1l + 2k_2l^2)A} \times \left[\frac{B}{A} \left(1 - \frac{x}{l}\right) + \frac{x}{l} \right] \quad (4)$$

$$A = 6k_1al + 2k_2al^2 - 2k_1l^2 - k_2l^3 \quad (5)$$

$$B = 4k_1l^2 + 3k_2l^3 - 6k_1al - 4k_2al^2 \quad (6)$$

그림 1과 동일한 강성보에 모멘트가 작용하는 경우가 그림 2에 나타나 있다.



[그림 2] 모멘트를 받는 강성보
[Fig. 2] Rigid Beam under Moment

그림 2로부터 보의 길이에 따른 변위분포는 식 (7)과 같다.

$$w(x) = -w_0 + \frac{x}{l}(w_0 + w_1) \quad (7)$$

보의 바닥에 작용하는 접촉압력은 식 (3)과 같이 표현되고 집중하중이 작용하는 경우와 마찬가지로 연직방향의 힘의 평형과 O 점에 대한 모멘트 평형을 고려하면 보의 길이에 따른 변위분포는 식 (8)과 같이 표현된다.

$$w(x) = \frac{12M_0}{6k_1l^2 + 6k_1k_2l^3 + k_2^2l^4} \times \left[3(2k_1 + k_2l) \frac{x}{l} - (3k_1 + 2k_2l) \right] \quad (8)$$

이상에서 고려한 바와 같이 강성보에 하중이 작용하는 경우 보의 연직변위는 선형분포를 보이고 스프링상수도 선형함수로 고려하였기 때문에 하중과 모멘트가 동시에 작용하는 경우에도 중첩원리를 적용하여 변위, 경사, 접촉압력 그리고 모멘트를 결정할 수 있다.

3. 2변수 Winkler 지반상의 강성보 거동

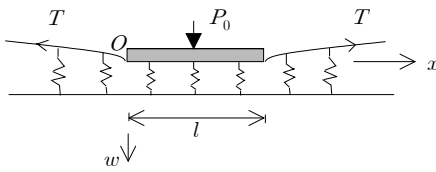
하중이 선형 탄성 반무한 지반의 지표면에 작용하는 경우 탄성지반이 연속체이기 때문에 하중 작용면 바로 아래 부분에 변위가 발생할 뿐만 아니라 그에 인접하여 하중이 작용하지 않는 지표면에도 변위가 발생하게 된다. 선형 탄성 등방 연속체는 두 가지 재료 특성(E, ν)에 의해 묘사되며 Winkler 재료는 단 하나의 스프링 상수 k 에 의해 묘사된다. Winkler 지반에 있어서 이러한 단점을 보완하고자 다양한 연구(Wieghardt, 1922; Filonenko-Borocich, 1940; Hetenyi, 1946; Pasternak, 1954)들이 있어 왔으나 수학적으로 간단한 방법은 지표면을 나타내는 Winkler 스프링의 상단을 탄성막(elastic membrane 또는 elastic string)으로 묶어 나타내는 것이다. 이러한 탄성막에 작용하는 인장력을 추가하여 2변수 Winkler 지반을 묘사할 수 있다. 긴장된 탄성막을 적용함으로써 기초지반 지표면의 거동은 식 (9)와 같이 수학적으로 묘사된다.

$$p = kw - T \frac{d^2w}{dx^2} \quad (9)$$

식 (9)에서 p 는 지표면에 가해지는 압력을 나타내며 T 는 탄성막에 작용하는 긴장력을 나타낸다. 하중 작용영역 바깥부분에서는 지표면에 작용하는 연직응력이 없으므로 식 (9)의 좌변이 0이 되어 식 (10)과 같이 된다.

$$-T \frac{d^2w}{dx^2} + kw = 0 \quad (10)$$

탄성막을 갖는 Winkler 지반상에 놓여 있는 강성보의 중앙에 집중하중이 작용하는 경우가 그림 3에 나타나 있다.



[그림 3] 2변수 Winkler 지반(집중하중)
[Fig. 3] 2 parameter Winkler Foundation(Concentrated Load)

강성보의 양끝단을 벗어난 범위에 대한 식 (10)에 대한 일반화는 식 (11)과 같고 식 (11)에서 α 는 식 (12)와 같다.

$$w(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} \quad (11)$$

$$\alpha = \sqrt{k/T} \quad (12)$$

식 (11)에서 A, B 는 계수로서 경계조건을 이용하여 결정된다. $x < 0$ 인 영역에 대해서는 x 값이 감소함에 따라 변위는 0에 수렴하므로 $B=0$ 가 된다. 따라서 원점 O 에서의 변위(w_0)는 식 (13)과 같고 경사(slope)는 식 (14)와 같다.

$$w_0 = A \quad (13)$$

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_0 = A\alpha \quad (14)$$

$x > l$ 인 경우에는 해를 다음의 식 (15)와 같이 수정해야 한다.

$$w(x) = Ce^{\alpha(x-l)} + De^{-\alpha(x-l)} \quad (15)$$

식 (11)에서 고려한 경계조건과 같은 방식으로부터 $C=0$ 이고 $x=l$ 에서의 변위는 식 (16)과 같고 경사는 식 (17)과 같다.

$$w_l = D = A \quad (16)$$

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_l = -A\alpha \quad (17)$$

탄성막에는 인장력 T 가 작용하므로 보의 양끝단 지표면에서는 탄성막의 인장력과 경사의 곱으로 표현되는 연직방향력(R)이 작용하게 되는데 식 (18)과 같다.

$$R = TA\alpha \quad (18)$$

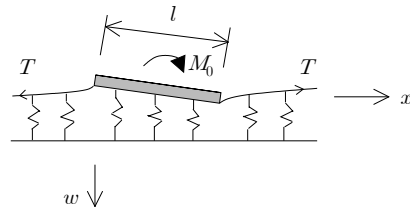
상수 A 는 보의 연직방향 힘의 평형조건으로부터 식 (19)와 같게 된다.

$$A = w_{beam} = \frac{P_0}{kl + 2\alpha T} = \frac{P_0}{kl(1 + \frac{2\alpha T}{kl})} \quad (19)$$

식 (19)에서 무차원량 $\alpha T/kl$ 은 Winkler 스프링 상수 k 에 대한 인장력 T 의 상대적 기여를 나타낸다고 볼 수 있으며 식 (20)과 같이 나타내도록 한다.

$$\xi = \frac{\alpha T}{kl} = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{T}{k}} \quad (20)$$

탄성막을 갖는 Winkler 지반상에 놓여 있는 강성보의 중앙에 모멘트가 작용하는 경우는 반대칭 문제로서 그림 4에 나타나 있다.



[그림 4] 2변수 Winkler 지반(모멘트)
[Fig. 4] 2 parameter Winkler Foundation(Moment)

그림 4의 강성보에서 보의 중앙에서의 변위량은 0이며 접촉압력이 없다. 그림 3의 대칭문제에서 고려한 방식을 적용하면 $x < 0$ 에서 지표면 변위는 식 (21)과 같다.

$$w(x) = -Ae^{\alpha x} \quad (21)$$

$x=0$ 에서 다음의 식 (22)가 만족된다.

$$w_0 = -A, \quad R_1 = -TA\alpha \quad (22)$$

같은 식으로 $x > l$ 에서 변위량은 식 (23)과 같고 $x=l$ 에서 식 (24)가 성립된다.

$$w(x) = Ae^{-\alpha(x-l)} \quad (23)$$

$$w_l = A, \quad R_1 = TA\alpha \quad (24)$$

또한 보가 기울게 되므로 보의 바닥을 따르는 인장력

T 의 연직성분(R_2)이 보에 작용하게 되고 식 (25)와 같이 계산된다. 따라서 보의 양끝단에 작용하는 연직력(R)은 식 (26)과 같고 방향은 서로 반대로 된다.

$$R_2 = \frac{2TA}{l} \quad (25)$$

$$R = R_1 + R_2 = TA\left(\alpha + \frac{2}{l}\right) \quad (26)$$

$x=0$ 에 대해 모멘트 평형을 고려하면 상수 A 를 식 (27)과 같이 결정할 수 있으며 보의 바닥을 따르는 연직 변위는 식 (28)과 같게 된다.

$$A = \frac{M_0}{\frac{kl^2}{6} + T(\alpha l + 2)} = \frac{6M_0}{kl^2(1 + 6\xi + 12\xi^2)} \quad (27)$$

$$w(x) = -A + \frac{x}{l}2A = \frac{6M_0}{kl^2(1 + 6\xi + 12\xi^2)}\left(\frac{2x}{l} - 1\right) \quad (28)$$

2변수 Winkler 지반에 대해서도 집중하중과 모멘트가 작용하는 경우의 보의 거동은 중첩원리를 적용하여 파악할 수 있다.

4. 강성보의 거동 비교

강성보를 따르는 모멘트 분포를 살펴보기 위해 우선 Winkler 지반에 놓인 강성보를 고려하였는데 그 결과를 요약하면 다음과 같다.

- 집중하중 작용시

i) $k_2 = 0, a = 0$

$$M(x) = Pl\left[\frac{x}{l} - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right]$$

ii) $k_1 = 0, a = 0$

$$M(x) = Pl\left[\frac{x}{l} - 3\left(\frac{x}{l}\right)^3 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^4\right]$$

- 모멘트 작용시

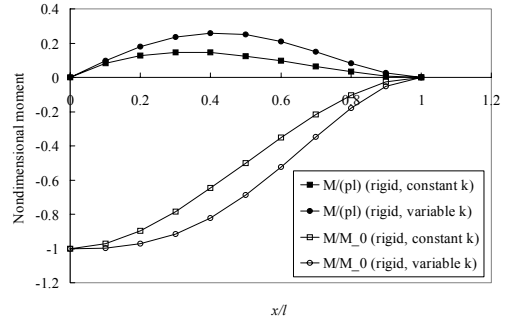
i) $k_2 = 0, a = 0$

$$M(x) = M_0\left[-1 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]$$

ii) $k_1 = 0, a = 0$

$$M(x) = M_0\left[-1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^4 + 4\left(\frac{x}{l}\right)^3\right]$$

이상의 요약결과를 그림으로 나타내면 그림 5와 같다.



[그림 5] 모멘트 비교
[Fig. 5] Comparison of Moment

그림 5를 통해 알 수 있듯이 Winkler 지반상에 놓인 강성기초에 발생하는 모멘트는 스프링상수가 일정할 때 보다 선형 스프링 상수일 때가 더 크음을 알 수 있다. 또한 Winkler 지반상에 놓인 강성보에 발생하는 모멘트식들을 통해 알 수 있듯이 보를 따르는 모멘트값은 스프링 상수와 무관함을 알 수 있다.

2변수 Winkler 지반에 놓인 강성보에 대한 모멘트를 요약하여 나타내면 다음과 같다.

- 집중하중 작용시($0 < x < l/2$)

$$M(x) = -\frac{P_0 l}{2(1 + 2\xi)}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\xi\frac{x}{l}\right]$$

- 모멘트 작용시($0 < x < l/2$)

$$M(x) = \frac{6M_0}{l^2(1 + 6\xi + 12\xi^2)} \times [\xi(1 + 2\xi)x + \frac{1}{6}(3x^2 - \frac{2}{l}x^3)]$$

2변수 Winkler 지반에 놓인 강성보의 왼쪽 끝단에 집중하중 P 가 작용하는 경우에 대한 모멘트는 그림 3과 그림 4에 나타난 대칭문제와 반대칭 문제를 중첩하여 구할 수 있는데 연직방향 힘의 평형조건으로부터 $P_0 = P$ 임을 알 수 있고 보의 좌측 끝단에 대한 모멘트 평형조건으로부터 $M_0 = -P/2$ 임을 알 수 있다. 기존의 연구결과(Scott, 1981)에 따르면 포아송비가 0.3인 탄성지반에 대하여 2변수 Winkler 지반을 고려할 때 k/E_s 는 0.5 정도이며 $4T/(B^2 E_s)$ 의 값은 0.8 정도이다. 여기서 B 는 보의 폭을 의미한다. 이러한 자료로부터 보의 폭이 1m일 때 $\xi (= \sqrt{T/k})$ 를 계산하면 0.55이다. Winkler 지반과 2변수 Winkler 지반에 놓인 강성보의 최대 휨모멘트를 비교하기 위해 다음과 같은 제원을 갖는 보와 지반조건을 가정하였다.

- 보

폭=1m, 높이=1m, 길이=2m

탄성계수, $E = 2 \times 10^7 kN/m^2$

휨강성, $EI = 1666667kN \cdot m^2$

- 기초지반

탄성계수, $E_s = 60000kN/m^2$

스프링상수, $k = 0.5E_s = 30000kN/m^2$

- 하중

보의 왼쪽 끝단에 100kN의 연직하중

강성보의 판별은 보의 특성값, $\lambda (= \sqrt[3]{k/(4EI)})$ 와 보의 길이(l)의 곱으로 하는데 λl 이 $\pi/4$ 보다 작으면 강성보로 볼 수 있다(Scott, 1981). 주어진 계산자료로부터 λl 를 계산하면 0.52로서 강성보로 볼 수 있다. 계산자료로부터 보에 발생하는 최대 휨모멘트를 계산하면 Winkler 지반에 놓인 강성보의 경우 스프링 상수가 일정한 경우의 최대 휨모멘트는 $29.6kN \cdot m$ 로 계산되고 선형 스프링인 경우 $52.0kN \cdot m$ 으로 계산된다. 2변수 Winkler 지반에 놓인 강성보에 발생하는 최대 휨모멘트는 보의 중앙에서 발생하게 되고 ξ 값을 0.55로 하면 $83.7kN \cdot m$ 으로 계산된다. 따라서 2변수 Winkler 지반에 놓인 강성보에 발생하는 최대 휨모멘트가 Winkler 지반에 놓인 강성보에 비해 더 크음을 알 수 있다.

5. 결론

Winkler 지반상에 놓인 강성보에 집중하중과 모멘트가 작용하는 경우에 대해 강성보에 발생하는 변위, 접촉 압력, 모멘트를 유도하여 보았다. 강성보에 발생하는 모멘트의 유도결과로부터 강성보를 따르는 모멘트분포는 스프링 상수와 무관하게 나타남을 알 수 있었고 스프링 상수가 선형인 경우가 일정한 경우에 비해 모멘트값이 크게 계산된다. 또한, 2변수 Winkler 지반에 놓인 강성보에 집중하중과 모멘트가 작용하는 경우에 대해 강성보의 거동을 유도하여 보았는데 각각 계산을 통해 볼 때 2변수 Winkler 지반에 놓인 강성보에 발생하는 최대 휨모멘트가 Winkler 지반에 놓인 강성보에 발생하는 그것에 비해 크게 계산되었다.

References

- [1] Filonenko-Borodich, M. M., Some approximate theories of elastic foundation, Uch. Zap. Mosk. Gos., Univ. Mekh. 46, pp. 3-18, 1940.
- [2] Hetenyi, M., Beams on elastic foundation, Ann Arbor:University of Michigan Press, 1946.
- [3] Pasternak, P. L., On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants. Moscow: Gos. Izd. Lit. po Stroitu i Arkh., 1954.
- [4] Scott, R. F., Foundation analysis, Prentice-Hall Inc., pp. 119-150, 1981.
- [5] Wieghardt, K., Beams on Deformable Foundations, ZAMM, 2, pp. 165-184, 1922.
- [6] Winkler, E., Theory of Elasticity and Strength, Prague: H. Dominicus, 1867.

이 승 현(Seung-Hyun Lee)

[정회원]



- 1988년 8월 : 서울대학교 토목공학과 (공학사)
- 1991년 2월 : 서울대학교 토목공학과 (공학석사)
- 1997년 2월 : 서울대학교 토목공학과 (공학박사)
- 2000년 3월 ~ 현재 : 선문대학교 토목공학과 부교수

<관심분야>

토질역학, 기초공학

권 오 순(OSoon Kwon)

[정회원]



- 1990년 2월 : 서울대학교 토목공학과 (공학사)
- 1994년 2월 : 서울대학교 토목공학과 (공학석사)
- 1998년 2월 : 서울대학교 토목공학과 (공학박사)
- 1998년 3월 ~ 현재 : 한국해양연구원 재직

<관심분야>

지반조사, 기초공학

장 인 성(In-Sung Jang)

[정회원]



- 1995년 2월 : 서울대학교 공과대학 토목공학과 (공학석사)
- 2001년 2월 : 서울대학교 공과대학 토목공학과 (공학박사)
- 2001년 3월 ~ 2002년 12월 : 한국해양연구원 연수연구원
- 2001년 3월 ~ 현재 : 한국해양연구원 재직

<관심분야>

지반공학, 지반조사, 해양구조물, 수중시공장비