

전단변형함수에 따른 역대칭 앵글-플라이 복합면재를 갖는 샌드위치판의 휨거동 평가

박원태^{1*}, 천경식²

¹공주대학교 건설환경공학부, ²(주)바우컨선탄트 구조설계부

Bending Assessment of Antisymmetric Angle-ply Composite Sandwich Plates with Various Shear Deformation Functions

Weon-Tae Park^{1*} and Kyoung-Sik Chun²

¹Department of Civil and Environment Engineering, Kongju National University

²Structural Eng. Division, BAU Consultant Co., Ltd

요약 본 연구에서는 Lagrangian/Hermite 보간함수를 혼합정식화한 유한요소법과 다양한 전단변형함수로 역대칭 앵글-플라이 샌드위치판 모델을 비교하였다. 제시된 전단변형함수는 판의 상하면에서 전단응력이 0이 되는 다항식, 삼각함수, 쌍곡삼각함수 및 지수함수로 구성되어 있다. 모든 전단변형함수는 해석해(A analytical solution)와 비교하였으며, 합리적인 정확도를 갖는 것으로 예측되었다. 특히, 지수형태의 전단변형함수가 복합면재를 갖는 샌드위치판 해석에 있어서 상대적으로 가장 우수한 결과를 보였다.

Abstract In this paper, we compared various shear deformation functions for modelling anti-symmetric composite sandwich plates discretized by a mixed finite element method based on the Lagrangian/Hermite interpolation functions. These shear deformation theories uses polynomial, trigonometric, hyperbolic and exponential functions through the thickness direction, allowing for zero transverse shear stresses at the top and bottom surfaces of the plate. All shear deformation functions are compared with other available analytical/3D elasticity solutions. As a result, reasonable accuracy for investigated problems are predicted. Particularly, The present results show that the use of exponential shear deformation theory provides very good solutions for composite sandwich plates.

Key Words : Shear deformation functions, Composite sandwich plates, Antisymmetric angle-ply, Mixed finite element, Lagrangian/hermite interpolation function

1. 서론

섬유보강 복합재료는 높은 비강도, 비강성으로 인해 구조 경량화가 요구되는 항공산업뿐만 아니라 조선, 자동차, 토목 등에 널리 사용되어지고 있다. 이러한 복합적층 구조는 이방성 재료 특성을 갖는 서로 다른 재료들을 적층시키고, 각 층의 섬유 보강각도에 의해 강성을 효과적으로 발휘할 수 있는 구조로서, 이에 대한 보다 정확한 거동을 구현하기 위한 다양한 해석기법 및 이론 연구가 지속적으로 진행되어 왔다.

특히, 적층구조체는 전단계수가 탄성계수의 1/25~1/40에 불과하기 때문에 횡방향 전단변형은 거동에 상당한 영향을 미치므로 이에 대한 연구가 상당하다. 전단변형 효과를 고려하지 않은 고전적인 판 이론은 두께가 얇은 경우를 제외한 등방성 또는 복합적층을 갖는 두꺼운 판의 경우 오차가 크게 발생한다. 즉, 고전이론은 평판처짐 등의 변형 및 좌굴하중을 과소평가하며, 고유진동수를 과대예측하는 것으로 알려져 있다.

Reissner(1945)가 판의 두께방향으로 전단응력분포가 일정하다고 가정함으로써 처음으로 전단변형 효과를 고

*교신저자 : 박원태(pwtac@kongju.ac.kr)

접수일 11년 08월 12일

수정일 (1차 11년 10월 11일, 2차 11년 11월 01일)

게재확정일 11년 11월 10일

려하였으며, Mindlin(1951)은 실제 판의 전단응력분포가 포물선 형태를 가지므로 전단변형 및 전단응력보정을 위하여 전단보정계수를 도입하였다. 그러나, 1차전단변형 이론은 판의 상하면($z = \pm h/2$)에서의 전단응력에 대한 경계조건($\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$)을 만족시키지 못함에 따라 이를 해결하기 위한 수정된 전단변형이론이 제시되었다.

Levinson(1980)과 Murthy(1981)는 Whitney and Pagano (1970)의 1차 전단변형이론의 평형방정식을 이용하여 종방향 수직 압축/인장을 무시한 고차이론을 제안하였다. 그 이후 Reddy(1984)는 Levinson과 Murthy의 이론을 발전시킨 단순화된 고차전단변형이론(Parabolic shear deformation theory, PSDT)을 제안하였고, 휨, 자유진동 및 좌굴해석을 수행하였다(Phan and Reddy, 1985). Touratier(1991)과 Solatos(1992)는 전단변형을 분포를 각각 삼각함수(Trigonometric function, TSDT)와 쌍곡삼각함수(Hyperbolic trigonometric function, HSDT)로 근사화한 전단변형이론을 제안하였으며, Idlbi et al.(1997)은 크로스-플라이 적층판을 해석모델로 설정하고 PSDT와 TSDT에 의한 휨 거동차이를 비교하였다. 최근, Swaminathan (2004, 2006)는 Talyor 전개식을 z^3 항까지 확장시켜 종방향 수직변형률/응력 및 종방향 뒤틀림을 고려한 변위장을 제시하였으며, 천경식 등(2003)과 박원태 등(2004)은 유한요소로 확장·적용하였으나, 절점당 12개 자유도(D.O.F)를 갖는 단점을 지녔다. Karama et al.(2003)는 적층보의 휨 거동 분석을 통해 전단변형함수를 지수함수(Exponential function)로 제안하였으며, 천경식 등(2003)은 Layerwise 이론에 기초한 삼각함수 지그재그모델을 개발하였으나, 적층보에 제한적이었다.

[표 1] 전단변형이론 및 함수

[Table 1] Shear deformation theory and function

구 분	전단변형함수 $f(z)$
Levinson(1980), Murthy(1981) and Reddy(1984)	$z\left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right)$
Touratier(1991)	$\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$
Soldatos(1992)	$h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$
Karama et al.(2003)	$z e^{-2(z/h)^2}$

2. 기본이론

2.1 변위장 및 지배방정식

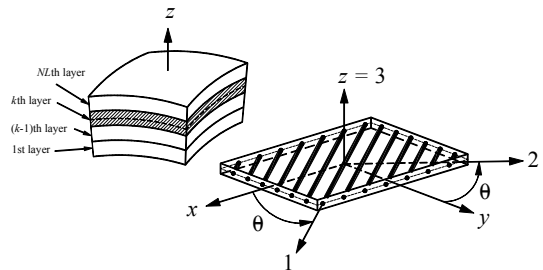
본 연구에서는, Lagrangian 및 Hermite 보간함수를 혼

합정식화한 유한요소모델을 토대로 전단변형함수(Levinson 1980; Touratier 1991; Soldatos 1992; Karama et al. 2003)별 프로그램을 작성하고, 복합적층 샌드위치판을 해석모델로 매개변수에 따른 거동차이를 상호 비교·분석하고자 한다. 차후 본 논문이 고차전단변형을 고려한 복합적층판 유한요소 개발과 작성시 중요한 참고자료가 될 것으로 기대되며, 아울러 각각의 전단변형함수에 따른 강성행렬식을 전개하여 개발자의 이해를 도모하고자 한다.

우선, 다양한 전단변형이론을 토대로 임의점(x, y, z)에서의 변위장 u, v 를 두께에 대해 1차 및 함수 $f(z)$ 로 전개·확장하고, w 는 일정하다고 가정한다. 즉, x, y 축 방향에 대한 변위의 고차항은 근사적인 layerwise 거동을 나타낼 수 있는 다항식, 삼각함수 및 지수함수 등으로 설정하였으며, z 축 방향에 대한 변위는 고려하지 않는다. 또한, 층간분리현상은 고려하지 않으며 완전접착으로 일체거동한다고 가정한다. 복합적층판 임의점에서의 변위장은 식 (1)과 같다.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0 - z \frac{\partial w}{\partial x} + f(z)\phi_x \\ v(x, y, z) &= v_0 - z \frac{\partial w}{\partial y} + f(z)\phi_y \\ w(x, y, z) &= w_0 \end{aligned} \tag{1}$$

u_0, v_0, w_0 는 각각 중립면에서의 면내변위와 횡방향 변위를, ϕ_x, ϕ_y 는 y 축과 x 축의 회전각을 의미한다. 그리고, $f(z)$ 는 전단변형함수로서 Table 1에 비교하여 정리하였다. 이 때, 적층요소의 중립면을 x - y 축으로, 중립면에 수직인 축을 z 축으로 설정하였으며, θ 는 섬유 보강각도를 의미한다(Fig. 1 참조). 적층조건은 각각 동일한 재료를 가진 층을 아래에서 윗방향(+ z 방향)으로 적층하되, 섬유 보강각도는 x 축을 기준으로 시계방향을 +로 설정하였다.



[그림 1] 적층요소와 좌표계
[Fig. 1] Laminate geometry

식(1)의 변위장을 탄성론의 변형률-변위 관계식에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \phi_x}{\partial x} = \varepsilon_x^0 - z\kappa_x^1 + f(z)\kappa_x^f$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + f(z) \frac{\partial \phi_y}{\partial y} = \varepsilon_y^0 - z\kappa_y^1 + f(z)\kappa_y^f$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + f(z) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\ &= \gamma_{xy}^0 - 2z\kappa_{xy}^1 + f(z)\kappa_{xy}^f \end{aligned}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \phi_y, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \gamma_{yz}^0, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \phi_x, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \gamma_{zx}^0$$

적층판의 평형방정식을 유도하고자 가상일의 원리를 적용, 정리하면 식(3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} &= q \\ \frac{\partial M_x^f}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^f}{\partial y} - Q_x^f &= 0 \\ \frac{\partial M_y^f}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}^f}{\partial x} - Q_y^f &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

식(3)에서 N 은 면내력, M 은 모멘트, Q 는 전단력이며, M^f, Q^f 은 전단변형함수에 의한 단면력으로 식(4)와 같이 나타낸다.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ M_x^f \\ M_y^f \\ M_{xy}^f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \\ E_{11} & E_{12} & E_{16} & F_{11} & F_{12} & F_{16} \\ E_{12} & E_{22} & E_{26} & F_{12} & F_{22} & F_{26} \\ E_{16} & E_{26} & E_{66} & F_{16} & F_{26} & F_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x^1 \\ \kappa_y^1 \\ \kappa_{xy}^1 \\ \kappa_x^f \\ \kappa_y^f \\ \kappa_{xy}^f \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x^f \\ Q_y^f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{zx}^0 \end{Bmatrix}$$

$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}$ 는 단면력과 변형률의 관계를 나타내기 위하여 사용하는 강성값으로, 각각 인장, 연계, 휨 강성행렬과 전단변형함수로 인하여 발생하는 강성행렬이다. 세부적인 전개식은 부록 A-1에 별도로 수록하였다.

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} [1, z, z^2] dz \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

$$(E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} [f(z), zf(z), f^2(z)] dz \quad (6)$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} \left(\frac{\partial f(z)}{\partial z} \right)^2 dz \quad (i, j = 4, 5)$$

2.2 유한요소 정식화

본 연구에서는 다양한 전단변형이론에 따른 샌드위치판의 휨거동을 비교·분석하기 위해 4절점 유한요소를 적용하였으며, 요소내 한 절점당 7개 자유도($u_0, v_0, w_0, \partial w/\partial x, \partial w/\partial y, \phi_x, \phi_y$)를 갖는다.

형상함수(Shape function)는 처짐에 대해 포물선 함수인 Hermite 보간함수를, 면내변위 및 처짐각에 대해서는 선형함수인 Lagrangian 보간함수를 병용하였다. 식(7)은 평판요소의 전체 강성행렬은 나타낸 것이다.

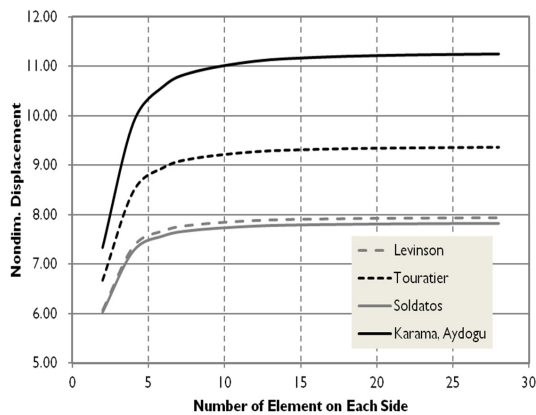
$$[K]_r = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [R]^T [S] [R] d\xi d\eta \quad (7)$$

여기서, $[R]$ 은 변형률-변위행렬로서 $[\epsilon] = [R][\delta]$ 이며 식(8)과 같다. $[S]$ 는 식(5)에서 표현한 단면력과 변형률 관계식이다. 식(8)에서 N_i 는 Lagrangian 2차 보간함수이며, f_i, g_i, h_i 는 Hermite 3차 보간함수를 의미한다. 세 부적인 함수식은 부록 A-II에 수록하였다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x^1 \\ \kappa_y^1 \\ \kappa_{xy}^1 \\ \kappa_x^2 \\ \kappa_y^2 \\ \kappa_{xy}^2 \\ \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_{ix} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{iy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{ix} & N_{iy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -f_{ix} & -g_{ix} & -h_{ix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f_{iy} & -g_{iy} & -h_{iy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2f_{ixy} & -2g_{ixy} & -2h_{ixy} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{ix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{iy} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{ix} & N_{iy} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ w_x \left(= \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ w_y \left(= \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \phi \\ \phi \end{Bmatrix} \quad (8)$$

3. 해석 예 및 결과분석

복합면재를 갖는 샌드위치 구조물은 등방성과 달리 전단변형효과에 민감하게 거동한다. 이에 최근까지 발표된 대표적인 전단변형함수에 따른 거동특성을 분석하고자 폭-두께비, 심재와 면재 두께비 및 섬유 보강각도를 매개 변수로 설정하였다.



[그림 2] 요소분할수에 따른 처짐분포
[Fig. 2] Deflection distribution according to number of element

우선, 요소분할수에 따른 해석치의 변동영향을 최소화하기 위해 그림 2와 같이 수렴경향을 분석하였으며, 분할수에 따른 수직처짐의 차이가 0.1%미만으로 최소화되는 24×24를 기본분할수로 설정하였다. 그리고 본 연구의 해석 예에 적용한 재료물성치는 다음과 같다.

Face sheets (graphite epoxy T300/934)

$$E_1 = 131 \text{ GPa}, E_2 = 10.34 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = G_{23} = 6.895 \text{ GPa}, G_{13} = 6.205 \text{ GPa}, \nu_{12} = 0.22$$

Core (isotropic)

$$E_1 = E_2 = 6.90 \times 10^{-3} \text{ GPa}$$

$$G_{12} = G_{23} = G_{13} = 3.45 \times 10^{-3} \text{ GPa}, \nu_{12} = 0$$

수치해석에 따른 수직처짐 및 면내·전단응력은 식(9)를 적용하여 무차원화하였다.

$$\bar{w} = w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right) \frac{100E_2h^3}{q_0a^4}, \quad \bar{\sigma}_x = \sigma_x \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right) \frac{h^2}{q_0a^2},$$

$$\bar{\sigma}_y = \sigma_y \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right) \frac{h^2}{q_0a^2}, \quad \bar{\tau}_{xy} = \tau_{xy} \left(0, 0, \frac{h}{2} \right) \frac{h^2}{q_0a^2}, \quad (9)$$

$$\bar{\tau}_{yz} = \tau_{yz} \left(\frac{a}{2}, 0, 0 \right) \frac{h}{q_0a}, \quad \bar{\tau}_{xz} = \tau_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, 0 \right) \frac{h}{q_0a}$$

해석모델은 Sin하중을 받는 단순지지된 정사각형 샌드위치판이다. 샌드위치판은 역대칭 앵글-플라이 복합면재(Facings)와 등방성 심재(Core)로 구성하며, $(\theta/-\theta/\text{CORE}/\theta/-\theta)$ 으로 적층한다. 이때, 복합면재에 대한 심재의 두께비(t_c/t_f)는 기본적으로 4이다.

Table 2와 Table 3은 각각 섬유 보강각도(θ)와 복합면재와 심재 두께비(t_c/t_f)에 따라 휨거동을 비교하여 나타난 것이다. 이때, Swaminathan et al.(2006)과 Swaminathan and Ragounadin(2004) 및 Reddy(1984)를 기준으로 설정한 이유는 3차원 변위장(부록 표(A-2) 참고)을 근간으로 앵글-플라이를 갖는 샌드위치판에 대해 해석적인 해(Analytical Solution)를 유일하게 제시하였기 때문이며, 이를 대부분 정해로 간주한다.

심재가 면재보다 두꺼운 경우($t_c/t_f=4$ 또는 10), 3차원 고차변위장을 갖는 Swaminathan et al. (2006)과 비교하여 Karama가 가장 근접한 거동을 보였고, Levinson과 Soldatos는 최대 60% 정도 작게 평가되었다. 그렇다하여 Levinson과 Soldatos의 이론이 잘못되었거나 틀렸다고 보지 않는다. Reddy(1984)의 해석치와 비교하여 유사한 거동을 보이는 바, Reddy와 다른 형태의 전단변형함수를 확인한 셈이다.

[표 2] 역대칭 앵글-플라이($\theta/-\theta/\text{CORE}/\theta/-\theta$) 정사각형 샌드위치판의 처짐 및 응력($t_c/t_f = 4$)

[Table 2] Deflection and stress of anti-symmetric angle-ply($\theta/-\theta/\text{CORE}/\theta/-\theta$) square sandwich plate($t_c/t_f = 4$)

θ	이론	w	σ_x	σ_y	τ_{xy}
15	Swaminathan et al. (2006)	13.5481	1.4147	0.3491	0.3906
	Swaminathan and Ragounadin (2004)	13.7509	1.4230	0.3524	0.4000
	Reddy (1984)	8.8488	0.7862	0.2407	0.2787
	Levinson	8.8486	0.7862	0.2407	0.2831
	Touratier	10.2915	0.8868	0.2621	0.3069
30	Swaminathan et al. (2006)	13.0335	1.0175	0.5013	0.5859
	Swaminathan and Ragounadin (2004)	13.2429	1.0108	0.4982	0.5932
	Reddy (1984)	8.1972	0.5576	0.3002	0.3694
	Levinson	8.1834	0.5564	0.2994	0.3770
	Touratier	9.6287	0.6264	0.3329	0.4161
45	Swaminathan et al. (2006)	12.7676	0.7313	0.7313	0.6698
	Swaminathan and Ragounadin (2004)	12.9778	0.7270	0.7270	0.6705
	Reddy (1984)	7.9482	0.4237	0.4237	0.3908
	Levinson	7.9298	0.4223	0.4223	0.4000
	Touratier	9.3643	0.4717	0.4717	0.4467
50	Swaminathan et al. (2006)	11.2333	0.5364	0.5364	0.5078
	Swaminathan and Ragounadin (2004)	11.2333	0.5364	0.5364	0.5078
	Reddy (1984)	7.8176	0.4184	0.4184	0.3964
	Levinson	7.8176	0.4184	0.4184	0.3964
	Touratier	9.3643	0.4717	0.4717	0.4467

다만, 일반적으로 두꺼운 심재를 갖는 샌드위치판은 적층판보다 처짐이 크게 발생하며 이는 전단변형효과에 따른 것임을 감안할 때(지효선 등, 1996), 여타이론에 비해 Karama의 지수함수형태의 전단변형함수가 복합면재와 심재를 갖는 샌드위치판에 있어 비교적 전단변형효과를 잘 구현하고 있다고 판단된다.

[표 3] 역대칭 앵글-플라이($30/-30/\text{CORE}/30/-30$) 정사각형 샌드위치판의 처짐 및 응력($t_c/t_f = 4$)

[Table 3] Deflection and stress of anti-symmetric angle-ply($30/-30/\text{CORE}/30/-30$) square sandwich plate($t_c/t_f = 4$)

t_c/t_f	이론	w	σ_x	σ_y	τ_{xy}
4	Swaminathan et al. (2006)	13.0335	1.0175	0.5013	0.4982
	Swaminathan and Ragounadin (2004)	13.2429	1.0108	0.4982	0.5932
	Reddy (1984)	8.1972	0.5576	0.3002	0.3694
	Levinson	8.1834	0.5564	0.2994	0.3770
	Touratier	9.6287	0.6264	0.3329	0.4161
	Soldatos	8.0702	0.5510	0.2967	0.3739
	Karama	11.5085	0.7201	0.3763	0.4663
	Swaminathan et al. (2006)	96.6657	3.4494	1.6989	1.8110
	Swaminathan and Ragounadin (2004)	98.2424	3.2296	1.5387	1.8137
	Reddy (1984)	45.1407	1.4128	0.7554	0.9078
10	Levinson	44.7666	1.4028	0.7479	0.9475
	Touratier	56.8453	1.7227	0.8877	1.1139
	Soldatos	43.8565	1.3790	0.7374	0.9349
	Karama	73.0890	2.1604	1.0763	1.3375
	Swaminathan et al. (2006)	379.1888	7.1995	3.5922	3.6643
	Swaminathan and Ragounadin (2004)	383.1255	6.5706	3.1104	3.6402
	Reddy (1984)	195.8631	3.3148	1.7080	2.0122
	Levinson	190.4903	3.2115	1.6480	2.1506
	Touratier	235.8810	3.8991	1.9405	2.5178
	Soldatos	186.8736	3.1571	1.6248	2.1214
20	Karama	288.3106	4.7025	2.2807	2.9438
	Swaminathan et al. (2006)	744.3126	6.6225	3.6918	3.9285
	Swaminathan and Ragounadin (2004)	745.8548	6.0370	3.2452	3.9325
	Reddy (1984)	647.4147	5.2918	2.9203	3.5121
	Levinson	620.7589	5.0533	2.7641	4.0074
	Touratier	644.6136	5.2312	2.8377	4.1121
	Soldatos	618.1779	5.0346	2.7564	3.9963
	Karama	657.1331	5.3361	2.8809	4.1715
	Swaminathan et al. (2006)	795.7270	5.3705	3.6670	4.2115
	Swaminathan and Ragounadin (2004)	796.6311	4.9925	3.3528	4.3103
100	Reddy (1984)	783.8121	4.9550	3.3335	4.2592
	Levinson	763.2991	4.8147	3.2055	4.9348

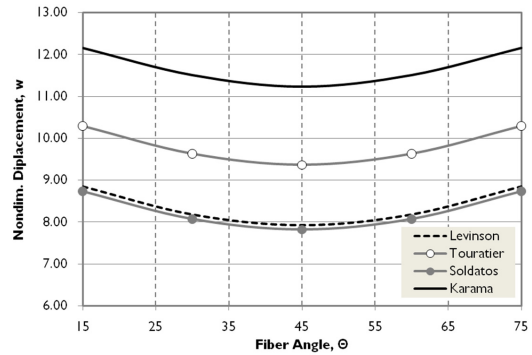
	Touratier	750.3954	4.7899	3.1952	4.9098
	Soldatos	764.2478	4.8162	3.2061	4.9365
	Karama	733.0268	4.7496	3.1782	4.8725

Table 4는 폭-두께비(a/h)에 따른 처짐과 면내응력을 비교하여 나타낸 것이다. Levinson과 Soldatos는 Touratier와 Karama에 비해 거동이 작게 발생하는 경향을 가지고 있다. 특히, $a/h=4$ 에 대해서 Levinson과 Soldatos가 Karama와 비교하여 29%정도 처짐이 작게 발생하였으며, 그 차이는 두께가 얇을수록 감소하였다. 이와 같은 현상을 한 눈에 보기 위해서, Fig. 4는 Swaminathan et al. (2006)의 처짐값을 기준으로 각 이론별 상대처짐을 폭-두께비(a/h)에 따라 비교하여 나타내었다.

[표 4] 역대칭 앵글-플라이(30/-30/CORE/30/-30) 샌드위치판의 처짐 및 응력

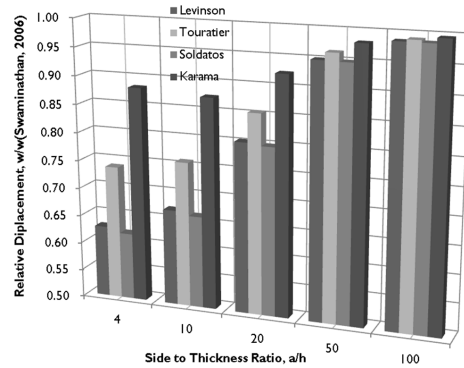
[Table 4] Deflection and stress of anti-symmetric angle-ply (30/-30/CORE/30/-30)square sandwich plate

a/h	이론	w	σ_x	σ_y	τ_{xy}
2	Levinson	27.732	1.3712	0.6657	0.8146
	Touratier	32.154	1.6098	0.7668	0.9297
	Soldatos	27.374	1.3520	0.6575	0.8053
	Karama	37.506	1.9026	0.8901	1.0694
4	Levinson	8.1834	0.5564	0.2994	0.3770
	Touratier	9.6287	0.6264	0.3329	0.4161
	Soldatos	8.0702	0.5510	0.2967	0.3739
	Karama	11.509	0.7201	0.3763	0.4663
10	Levinson	1.9724	0.3540	0.1704	0.2161
	Touratier	2.2303	0.3621	0.1772	0.2247
	Soldatos	1.9524	0.3534	0.1698	0.2155
	Karama	2.5730	0.3737	0.1863	0.2359
20	Levinson	1.0314	0.3378	0.1476	0.1862
	Touratier	1.0978	0.3392	0.1495	0.1886
	Soldatos	1.0263	0.3376	0.1475	0.1860
	Karama	1.1865	0.3413	0.1520	0.1919
50	Levinson	0.7633	0.3348	0.1407	0.1770
	Touratier	0.7741	0.3350	0.1411	0.1775
	Soldatos	0.7625	0.3348	0.1407	0.1770
	Karama	0.7884	0.3353	0.1415	0.1780
100	Levinson	0.7248	0.3344	0.1397	0.1757
	Touratier	0.7275	0.3345	0.1398	0.1758
	Soldatos	0.7246	0.3344	0.1397	0.1757
	Karama	0.7311	0.3346	0.1399	0.1759



[그림 3] 보강각도에 따른 처짐분포

[Fig. 3] Deflection distribution according to fiber angle



[그림 4] 폭-두께비에 따른 상대처짐

[Fig. 4] Relative deflection by side to thickness ratio

지금까지, 변위장을 두께방향(z)에 대해 3차항까지 전개시킨 3차전단변형이론(Swaminathan et al., 2006)의 해석치(Analytical solution)를 기준으로 설정하고, 앵글-플라이를 갖는 샌드위치판에 대하여 폭-두께비, 면재-심재 두께비 그리고 섬유 보강각도 등의 매개변수 변화에 따라, 다양한 형태의 전단변형함수들의 성능을 비교하였다. 그 결과, Karama를 제외한 다른 함수는 Reddy와 유사했던 반면, Karama 모델은 기준해에 근접한 결과를 나타내었다.

이에 앞서, 천경식과 지효선(2011)은 1차전단변형이론의 간단한 수정방안(SC-FSDT)을 제시한 바 있다. 기존의 1차전단변형이론과 동일한 변위장과 자유도를 가지면서, 전단변형률과 전단응력이 판/셸의 상·하면에서 0이 되는 경계조건을 만족하도록 전단변형에 대한 형상분포함수를 추가적으로 설정하였다. 결과적으로, 기존 1차전단변형이론(FSDT)에 비해 상당한 개선효과를 보였으나, 고차전단변형이론에 비해 그 정확도는 크게 개선되지 않았다.

Table 5는 정확해(ELS; Pagano, 1970)가 제시되어 있는 크로스-플라이 적층판에 대해서, 고차전단변형이론에 따른 처짐값을 비교해놓은 것이다. 1차전단변형이론(FSDT; Whitney and Pagano, 1970)에 비해 고차전단변형이론들의 오차범위가 작다. 따라서, 전단변형효과가 크게 작용하는 샌드위치판은 고차전단변형 도입이 필수적이며, 이에 대한 적정변위장이 선택이 중요하다. 이에 대해 본 연구가 하나의 큰 길잡이가 되었으면 하는 바램을 가져본다.

[표 5] 크로스-플라이(0/90/90/0) 적층판의 처짐
[Table 5] Deflection of symmetric cross-ply (0/90/90/0) square laminated plate

a/h	이론 (Ref.)	w	Error(%)
2	ELS (11)	1.954	-
	TSDT (13)	1.894	3.07
	FSDT (19)	1.710	12.49
	SC-FSDT (3)	1.832	6.22
	Karama (6)	1.925	1.48
10	ELS (11)	0.743	-
	TSDT (13)	0.715	3.77
	FSDT (19)	0.663	10.77
	SC-FSDT (3)	0.700	5.73
	Karama (6)	0.727	2.15
20	ELS (11)	0.517	-
	TSDT (13)	0.506	2.13
	FSDT (19)	0.491	5.03
	SC-FSDT (3)	0.503	2.77
	Karama (6)	0.511	1.16
100	ELS (11)	0.438	-
	TSDT (13)	0.434	0.91
	FSDT (19)	0.434	0.91
	SC-FSDT (3)	0.435	0.68
	Karama (6)	0.436	0.46

4. 결 론

본 연구는 Hermite 및 Lagrangian 보간함수에 의한 혼합정식화(Mixed formulation)로 유한요소모델을 작성하고, 앵글-플라이를 갖는 복합적층 샌드위치판에 한하여 Levinson(1980), Touratier(2003), Karama et al.(2003) 그리고 Aydogu(2009)가 제시한 전단변형함수에 따른 휨거동차이를 비교하였다.

그 결과, Karama의 지수함수형태의 전단변형함수가 3

차원 고차전단변형이론에 의한 기준해(A analytical solution)에 가장 근접한 결과를 보였다. 그 이외의 전단변형함수들은 다른 형태(포물선, 삼각함수, 지수함수 등)로 전단변형을 근사화하였을 뿐, Reddy(1984)의 단순화된 고차전단변형이론에 비해 크게 개선되거나 향상된 결과를 볼 수 없었다. 따라서, 샌드위치판 해석에 있어서 전단변형함수로 Karama 모델이 적절하다 판단된다.

물론, 샌드위치판의 해석정확도를 높이기 위해 고차의 전단변형이론을 적용해야함이 타당하지만, 자유도 문제와 강성행렬의 비대칭성으로 인해 계산 효율성이 저하되는 등의 문제가 있다. 그에 의해 1차전단변형이론의 수정방안에 대한 연구가 있었으나 개선효과는 두드러지지 않는다. 앞으로, 추가적인 좌굴 및 자유진동해석을 수행하여 전단변형함수에 대한 보다 다양하고, 객관적인 상호비교분석이 필요하며, 이와 같은 지속적인 연구를 통해 지수함수형태의 개선된 전단변형함수 도출로 연구를 확장 계획이며, 본 연구는 그 토대가 될 것이다.

References

- [1] Chun KS, Hong DK and Chang SY “Zigzag Model of Laminated Composite Beams using Trigonometric Functions, KSCE, Vol 23 No 3-A, pp.421-428, 2003
- [2] Chun KS, Choi HK and Chang SY “Comparative Study on Static, Buckling, and Free Vibration Analysis of Laminated Composite Plates using Various Serendipity Finite Elements”, KSCE, Vol 23 No 5A, pp.901-909, 2003.
- [3] Chun KS and Ji HS “A Simple Modification of the First-order Shear Deformation Theory for the Analysis of Composite Laminated Structures”, KSSC, Vol. 23, N0.4, pp.475-481, 2011.
- [4] Chang SY, Yoon SH and Han SC “Analysis of Anisotropic Laminated Composite Plates by means of Higher-Order Shear Deformation Theory”, KSSC, Vol. 6, N0. 1, pp.125-137, 1994.
- [5] Idlbi A, Karama M and Touratier M, “Comparison of various laminated plates theories”, Compos Struct, Vol.37, pp.173-184, 1997.
- [6] Karama M, Afaq KS and Mistou S “Mechanical behaviour of laminated composite beam by new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity”, Int J Solids Struct, Vol.40, pp.1525-1546, 2003.
- [7] Levinson M “An accurate simple theory of statics

- and dynamics of elastic plates”, Mech Res Commun, Vol.7, pp.343-350, 1980.
- [8] Mindlin RD “Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates”, J Appl Mech, Vol.18, pp.31-38, 1951.
- [9] Murthy MVV “An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates”, NASA Technical Paper, 1981.
- [10] Park WT, Son BJ, Chun KS “A Comparative Study on Static Behavior of Simply Supported Shear Deformable Anisotropic Skew Plates Considering Higher-order Shear Deformation Theory”, KSCE, Vol 24 No 6A, pp.1173-1182, 2004.
- [11] Pagano NJ “Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates”, J Compos Mater, Vol.4(1), pp.20-34, 1970.
- [12] Phan ND and Reddy JN “Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory”, J Sound Vib, Vol.98, pp.157-170, 1985.
- [13] Reddy JN “A simple higher-order theory for laminated composite plates”, J Appl Mech, Vol.51, pp.745-752, 1984.
- [14] Reissner E “Reflection on the theory of elastic plates”, J Appl Mech, Vol.38, pp.1453-1464, 1945.
- [15] Swaminathan K and Ragounadin D “Analytical solutions using a higher-order refined theory for the static analysis of antisymmetric angle-ply composite and sandwich plates”, Compos Struct, Vol.64, pp.405-417, 2004.
- [16] Swaminathan K, Patil SS, Nataraja MS and Mahabaleswara KS “Bending of sandwich plates with aniti-symmetric angle-ply face sheets - Analytical evaution of higher order refined computational models”, Compos Struct, Vol.75, pp.114-120, 2006.
- [17] Soldatos KP “A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates”, Acta Mech Vol.94, pp.195-200, 1992.
- [18] Touratier M “An efficient standard plate theory”, Int J Eng Sci, Vol.29(8), pp.901-916, 1991.
- [19] Whitney JM and Pagano NJ. “Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates”, J Appl Mech, Vol.37(4), pp.1031-1036, 1970

박 원 태(Weon-Tae Park)

[정회원]



- 1983년 2월 : 부산대학교 대학원 토목공학과(공학석사)
- 1993년 2월 : 서울시립대학교 대학원 토목공학과(공학박사)
- 1995년 3월 ~ 현재 : 공주대학교 건설환경공학부 정교수

<관심분야>

구조공학, 복합재료, 좌굴해석, 비선형 구조해석, 동적 해석, 나노구조의 해석

천 경 식(Kyoung-Sik Chun)

[정회원]



- 2002년 2월 : 서울시립대학교 대학원 토목공학과(공학석사)
- 2005년 8월 : 서울시립대학교 대학원 토목공학과(공학박사)
- 2004년 9월 ~ 현재 : (주)바우컨 설타트 구조부 차장

<관심분야>

복합재료, 구조해석, 강합성 구조설계 및 교량설계

부 록

A-II

A-I

A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} 는 Reddy(1984) 등의 참고문헌에 수록되어 있는바, 지면상 전단변형함수 $f(z)$ 에 의한 강성행렬 E_{ij}, F_{ij}, H_{ij} 및 \bar{A}_{ij} 에 대해서만 아래 표와 같이 적분식을 전개한다. 여기서 Erf는 다음과 같이 정의한다.

$$\text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \text{ Erf}(1.000) = 0.843$$

본 연구에서 적용한 유한요소 형상함수인 Lagrangian 및 Hermite 보간함수는 각각 N_i 와 f_i, g_i, h_i 로 표현한다. 이때, (ξ_i, η_i) 는 요소(Element)내 i 번째 절점(Node)에 대한 자연좌표계(Natural coordinates)를 의미한다.

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i)(1 + \eta_i)$$

[표 A-1] 전단변형함수 $f(z)$ 에 의한 강성행렬 E_{ij}, F_{ij}, H_{ij} 및 \bar{A}_{ij}

[Table A-1] Stiffness E_{ij}, F_{ij}, H_{ij} and \bar{A}_{ij} by shear deformation function $f(z)$

구분	f	$E_{ij} (= \int f dz)$	$F_{ij} (= \int zf dz)$
Levinson	$f_1(z) = z \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right)$	$\frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{3h^2} z^4$	$\frac{1}{3} z^3 - \frac{4}{15h^2} z^5$
Touratier	$f_2(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$	$-\left(\frac{h}{\pi}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)$	$\left(\frac{h}{\pi}\right)^3 \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) - \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 z \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)$
Soldatos	$f_3(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$	$h^2 \cosh\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{1}{2} \cosh\left(\frac{1}{2}\right) z^2$	$h^2 z \cosh\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{1}{3} \cosh\left(\frac{1}{2}\right) z^3 - h^3 \sinh\left(\frac{z}{h}\right)$
Karama	$f_4(z) = ze^{-2(\frac{z}{h})^2}$	$-\frac{1}{4} h^2 e^{-2(\frac{z}{h})^2}$	$-\frac{1}{4} h^2 ze^{-2(\frac{z}{h})^2} + \frac{1}{8} h^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{Erf}\left[\frac{\sqrt{2}z}{h}\right]$
구분	$H_{ij} (= \int f^2 dz)$		
Levinson	$\frac{1}{3} z^3 - \frac{8}{15} \frac{z^5}{h^2} + \frac{16}{63} \frac{z^7}{h^4}$		
Touratier	$\frac{1}{2} \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 z - \frac{1}{4} \left(\frac{h}{\pi}\right)^3 \sin\left(\frac{2\pi z}{h}\right)$		
Soldatos	$-\frac{1}{2} h^2 z + \frac{1}{12} \frac{(1+e)^2}{e} z^3 - \frac{(1+e)\sqrt{e}}{e} \left(h^2 z \cosh\frac{z}{h} - h^3 \sinh\frac{z}{h} \right) + \frac{h^3}{4} \sinh\frac{2z}{h}$		
Karama	$-\frac{1}{8} h^2 ze^{-4(\frac{z}{h})^2} + \frac{1}{32} h^3 \sqrt{\pi} \text{Erf}\left[\frac{\sqrt{4}z}{h}\right]$		
구분	$\bar{A}_{ij} (= \int (f')^2 dz)$		
Levinson	$z - \frac{8}{3} \frac{z^3}{h^2} + \frac{16}{5} \frac{z^5}{h^4}$		
Touratier	$\frac{1}{4} \left[2z + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{2\pi z}{h}\right) \right] = \frac{z}{2} + \frac{h}{4\pi} \sin\left(\frac{2\pi z}{h}\right)$		
Soldatos	$\left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{e} + e \right) + 1 \right] z - \left(\frac{1}{\sqrt{e}} + \sqrt{e} \right) h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) + \frac{h}{4} \sinh\left(\frac{2z}{h}\right)$		
Karama	$\left(\frac{z}{4} - \frac{2z^3}{h^2} \right) e^{-2(\frac{z}{h})^2} + \frac{3}{16} h \sqrt{\pi} \text{Erf}\left[\frac{2z}{h}\right]$		

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \quad N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$\begin{bmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{bmatrix}_{i=1,2,3,4} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f_i = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(2 + \xi\xi_i + \eta\eta_i - \xi^2 - \eta^2)$$

$$g_i = \frac{a}{16}\xi_i(1 + \xi\xi_i)^2(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i - 1)$$

$$h_i = \frac{b}{16}\eta_i(1 + \eta\eta_i)^2(1 + \xi\xi_i)(\eta\eta_i - 1)$$

여기서, $\xi = 2(x - x_c)/a$, $\eta = 2(y - y_c)/b$ 이고, a 와 b 는 평면요소 길이를, (x_c, y_c) 는 전체좌표계에서의 요소 중심 위치를 의미한다.

[표 A-2] 비교대상의 변위장

[Table A-2] Higher order displacement models for the purpose of evaluation

구분	변위장
Swaminathan et al. (2006)	$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) + z^2u_o^*(x, y) + z^3\theta_x^*(x, y)$ $v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) + z^2v_o^*(x, y) + z^3\theta_y^*(x, y)$ $w(x, y, z) = w_0(x, y) + z\theta_z(x, y) + z^2w_o^*(x, y) + z^3\theta_z^*(x, y)$
Swaminathan and Ragounadin (2004)	$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) + z^2u_o^*(x, y) + z^3\theta_x^*(x, y)$ $v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) + z^2v_o^*(x, y) + z^3\theta_y^*(x, y)$ $w(x, y, z) = w_0(x, y)$
Reddy (1984)	$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z \left[\theta_x(x, y) - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \left\{ \theta_x(x, y) + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right\} \right]$ $v(x, y, z) = v_0(x, y) + z \left[\theta_y(x, y) - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \left\{ \theta_y(x, y) + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right\} \right]$ $w(x, y, z) = w_0(x, y)$