

지중 매설관 주변의 지하수흐름에 대한 이론적 고찰

이승현^{1*}, 한진태²
¹선문대학교 토목공학과
²서울대학교 건설환경공학부

A Theoretical Study on the Ground Water Flow Adjacent to Buried Pipe

Seung-Hyun Lee^{1*} and Jin-Tae Han²

¹Dept. of Civil Engineering, Sunmoon University

²Dept. of Civil & Environmental Engineering, Seoul National University

요약 본 연구에서는 지중 매설관 주변의 지하수 흐름을 이론적으로 규명해 보았다. 지하수 흐름에 있어서는 비압축, 비회전 흐름을 고려하였다. 지하수 흐름 해석시 복소 포텐셜을 이용하여 흐름을 정의하였는데 지중 매설관이 없는 경우의 균등흐름을 먼저 고려하였고 원 정리에 의해 지중 매설관의 영향을 기존의 균등흐름에 추가하였다. 복소 포텐셜의 선형성에 근거하여 두 개의 흐름을 중첩시킬 수 있으나 이때 특이점의 위치를 고려하여 적절한 복소 포텐셜을 적용함으로써 추가적인 특이점의 이미지를 삽입하지 않도록 하는 효율적인 해석이 필요하다. 최종적으로는 순환을 동반하는 지중 매설관 주변의 흐름을 복소 포텐셜 중첩을 통해 살펴보고 그 경우 흐름에 의해 지중 매설관에 작용하는 작용력을 유도해 보았다.

Abstract A theoretical study on the ground water flow adjacent to buried pipe was conducted. Incompressible and irrotational flow were considered in analytical study. Ground water flow were defined by complex potentials. Firstly, uniform flow without buried pipe was analysed and then the effect of buried pipe was considered by superposition via circle theorem. Although two kinds of flow can be added by linearity of complex potentials, investigation of the singularities of the complex potentials should be done in advance. Finally, ground water flow past a buried pipe was analysed via complex potentials and net force exerted on the buried pipe by the ground water flowing past with circulation was derived.

Key Words : Buried pipe, Ground water flow, Singularities, Circulation, Net force exerted on buried pipe

1. 서론

지중매설관의 경우 재질에 따라 강성 매설관과 연성 매설관으로 나눌 수 있는데 매설관의 설계시에는 매설관과 지반 사이의 상호작용효과를 고려하여 매설관에 작용하는 하중을 결정하게 된다. 매설관 설계시 주된 설계인자는 매설관에 작용하는 연직하중이라 할 수 있다. 본 연구에서는 지중 매설관 주변에 지하수 흐름이 존재할 때의 흐름양상을 이론적으로 규명하고 순환을 동반한 흐름 발생시 지하수 흐름에 의해 매설관에 작용하는 하중을

유도하고자 하였다. 특히, 해석에 고려한 지하수 흐름은 균등흐름과 지중매설관 주위의 순환을 동반한 균등흐름을 고려하였다.

2. 기본 이론

유체의 흐름이 2차원 비회전흐름일 경우에는 식 (1)과 같이 복소수 형태로 유체의 속도 벡터를 속도 포텐셜 (velocity potential)인 $\Phi(x,y)$ 로 표현할 수 있다.

*교신저자 : 이승현(shlee02@sunmoon.ac.kr)

접수일 11년 01월 24일

수정일 11년 02월 01일

게재확정일 11년 03월 10일

$$\vec{V} = u + iv = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + i \frac{\partial\Phi}{\partial y} \quad (1)$$

속도 포텐셜은 x, y 의 함수이므로 속도 포텐셜이 일정하면 그 자취는 곡선이 되며 포텐셜이 일정한 곡선을 등포텐셜곡선(equipotential line)이라 한다. 식 (1)에 나타낸 관계를 비압축성 유체의 조건인 $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ 에 적용하면 라플라스 방정식을 만족하는 조화함수(harmonic function)가 됨을 알 수 있다.

속도 포텐셜, $\Phi(x,y)$ 에 대해 Cauchy-Riemann 식을 만족하는 공액 조화함수(conjugate harmonic function)인 $\Psi(x,y)$ 를 고려하면 식 (2)와 같은 복소 포텐셜(complex potential), $F(z)$ 를 얻을 수 있다.

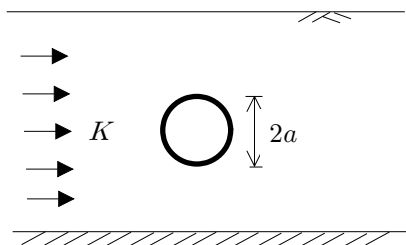
$$F(z) = \Phi(x,y) + i\Psi(x,y) \quad (2)$$

식 (2)에서 $\Psi(x,y)$ 를 흐름함수(stream function)라 하는데 흐름함수가 일정한 곡선은 유선(stream line)이 된다. 복소 포텐셜로부터 속도 성분 u, v 는 다음의 식 (3)과 같이 복소 포텐셜을 미분하여 구할 수도 있다.

$$F'(z) = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + i \frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} - i \frac{\partial\Phi}{\partial y} = u - iv \quad (3)$$

3. 지중 매설관 주변의 흐름

해석대상이 되는 지중매설관 및 흐름형태는 그림 1과 같다.



[그림 1] 지중매설관 주변의 흐름

수평방향(x 방향)으로 속도가 일정한 균등흐름(uniform flow)에 대해서 속도 포텐셜은 $\Phi = Kx$ 로 표현되는데 K 는 균등흐름에 있어 흐름강도(flow strength)를 나타낸다. 이를 다시 해석가능한 복소 포텐셜로 나타내면 식 (4)를 구할 수 있다.

$$F(z) = Kz \quad (4)$$

복소 포텐셜에 나타나는 속도 포텐셜과 흐름함수는 라플라스 방정식을 만족시키는 선형 방정식이므로 다양한 조건에 대하여 중첩가능하다. 수평방향의 균등흐름에 대하여 지중매설관 주위의 흐름을 추가하여 나타낼 필요가 있는데 이를 위해 Milne-Thomson의 원 정리(circle theorem)(Milne-Thomson, 1972)를 이용한다. 복소 포텐셜 $f(z)$ 에 대해 $|z| > a$ 인 영역에서 특이점(singularities)을 가질 때 다음의 식 (5)의 우변의 두 번째 항에서 정의되는 복소 포텐셜($f(a^2/\bar{z})$) 또한 $f(z)$ 의 특성에 대응하여 특이점을 갖게 된다.

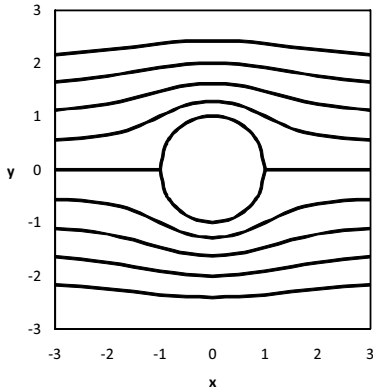
$$F(z) = f(z) + \overline{f\left(\frac{a^2}{z}\right)} \quad (5)$$

식 (5)에서 a 는 고려하는 원의 반경을 의미하고 \bar{z} 는 복소수 z 의 공액 복소수(conjugate complex number)를 의미한다. 식 (5)에서 $|z| > a$ 인 경우, $|a^2/\bar{z}| < a$ 가 되어 $|z| > a$ 로 정의되는 영역에서는 특이점을 갖지 않게 된다. 또한, $|z| = a$ 인 경우 $a^2/\bar{z} = z$ 가 되므로 식 (5)는 $F(z)|_{|z|=a} = f(z) + \overline{f(z)} = 2\text{Re}(f(z))$ 로 표현되는데 이를 통해 할 수 있듯이 원주를 따라서는 $\text{Im}z F(z) = \Psi = 0$ 이 되므로 원주는 유선이 됨을 알 수 있다. 식 (4)에 나타낸 균등흐름의 경우 $|z| \leq a$ 영역에서 해석가능하고 무한대에서 극점(pole)을 가지므로 원 정리의 가정을 만족하게 되어 지중매설관 주위를 흐르는 복소 포텐셜은 중첩을 통해 다음의 식 (6)과 같이 구할 수 있다.

$$F(z) = Kz + \frac{\overline{Ka^2}}{z} = Kz + \frac{Ka^2}{z} \quad (6)$$

식 (6)으로부터 흐름함수(Ψ)는

$Ky(1 - a^2/(x^2 + y^2))$ 이 되며 $\Psi = 0$ 인 경우 원주가 유선이 됨을 알 수 있다. 그림 2는 균등흐름강도, K 와 관의 반경 a 를 1로 두어 유선을 작도한 결과이다. 식 (6)에 나타낸 복소 포텐셜로부터 속도 포텐셜을 구해 정류점(stagnation point)을 구해보면 (-1,0)와 (1,0)가 됨을 알 수 있다.



[그림 2] 지중매설관 주위의 균등흐름

원 정리는 원주에 대한 이미지법(method of image)의 확장으로 볼 수 있다. 식 (6)을 통해 알 수 있듯이 원 정리를 적용하는 경우 원의 내부에 특이점이 존재하게 되고 이 이미지 특이점으로 인해 원 내부에서 균등흐름이 배제되고 원주는 유선이 된다. 따라서 원 정리를 이용하면 원주를 유선으로 만들 수 있고 원주를 경계로 외적 흐름(external flow)을 규정짓는 복소 포텐셜($f(z)$)과 동일한 특이점을 공유하는 복소 포텐셜을 구할 수 있으며 두 포텐셜을 더하여 최종 복소 포텐셜($F(z)$)을 얻을 수 있다. 따라서 어떤 흐름을 복합적으로 묘사하는 복소 포텐셜을 구하기 위해서는 개개의 복소 포텐셜을 더하기 전에 특이점의 존재위치를 고려함으로써 불필요한 특이점의 추가를 최소화하는 효과적인 과정을 통해 최종 복소 포텐셜을 구할 수 있다고 할 수 있다.

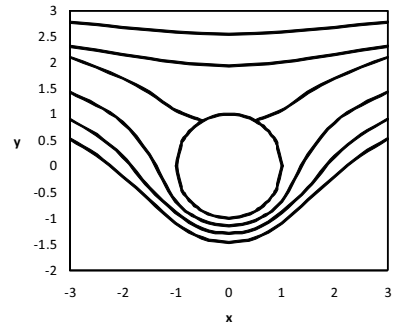
소용돌이(vortex)에 대해서는 유선이 회전중심에 대해 원주를 형성($r=\text{const.}$)하므로 이를 만족하는 흐름함수는 $\Psi = -\Gamma/(2\pi)\ln r$ 로 둘 수 있는데 음의 부호는 편의상 고려하게 된다. 흐름함수에 Cauchy-Riemann 식을 적용하면 속도 포텐셜을 구할 수 있고 그로부터 복소 포텐셜은 식 (7)과 같이 나타나게 된다.

$$F(z) = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta - i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r = \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z \quad (7)$$

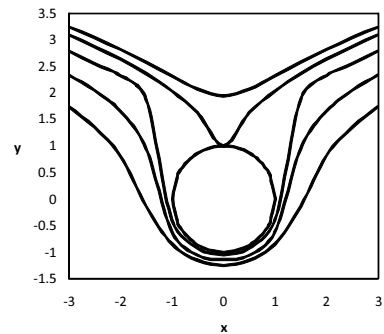
소용돌이를 표현하는 식 (7)에 의한 속도장은 $|z|=a$ 에서 유선이 되며 $|z|>a$ 영역에서 특이점을 갖지 않고 $|z|\rightarrow\infty$ 일 때 유속이 0이 된다. 따라서 식 (7)로 표현되는 소용돌이를 식 (6)의 복소 포텐셜에 중첩시키는데 있어서 여전히 원주가 유선이 되고 원의 외부에 대해 추가적인 특이점을 도입할 필요 없이 식 (8)과 같은 복소 포텐셜을 얻을 수 있다.

$$F(z) = Kz + \frac{Ka^2}{z} - \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z \quad (8)$$

식 (8)로부터 흐름함수는 $\Psi = Ky(1 - a^2/(x^2 + y^2)) - \Gamma/(2\pi)\ln \sqrt{x^2 + y^2}$ 이며 $\Psi = -\Gamma/(2\pi)\ln a$ 이면 $x^2 + y^2 = a^2$ 이므로 원주를 따르는 흐름이 존재함을 알 수 있다. 속도벡터의 성분은 식 (8)을 미분하여 $F'(z) = u - iv = K - Ka^2/z^2 - i\Gamma/(2\pi z)$ 로 구할 수 있으며 속도가 0이 되는 정류점(stagnation point)은 $z = i\Gamma/(4\pi K) \pm \sqrt{a^2 - \Gamma^2/(16\pi^2 K^2)}$ 으로 구할 수 있는데 정류점의 위치는 순환(Γ)에 의존한다. $\Gamma=0$ 인 경우 정류점은 $z = \pm a$ 가 되고 순환값이 $3\pi Ka, 4\pi Ka, 4\sqrt{2}\pi Ka$ 일 경우 정류점의 위치는 각각 $\pm\sqrt{7/4a + i(0.75a)}, ia, ia(\sqrt{2} \pm 1)$ 가 된다. 계산결과를 통해 볼 때 순환값이 증가함에 따라 정류점의 위치는 상향으로 이동하여 $\Gamma=4\pi Ka$ 인 경우 한 점에 존재하게 되고 그 보다 큰 순환값에 대해서는 원의 바깥쪽과 안쪽에 정류점이 존재하게 된다. 그림 3은 식 (8)에서 K 와 a 값을 각각 1로 두었을 때의 순환값에 따른 흐름양상을 계산한 결과를 보여 준다.



(a) $\Gamma = 3\pi$

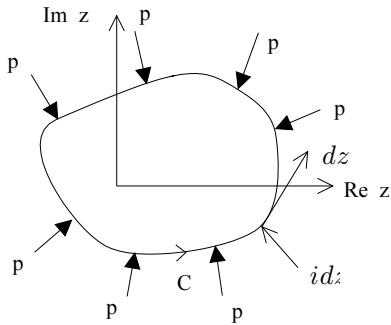


(b) $\Gamma = 4\pi$

[그림 3] 순환값에 따른 흐름 양상

그림 3을 통해 알 수 있듯이 순환에 따라 매설관의 하부에 유선이 촘촘하게 분포되어 있어 유속이 빠름을 알 수 있다. 매설관 상하부의 유속의 차이는 압력의 차이를 동반하게 되고 그에 따라 매설관에는 힘이 작용하게 된다. 2차원 흐름을 받고 있는 물체의 경계면에 작용하는 압력에 의한 힘(D)의 성분은 그림 4를 통해서 다음의 식 (9)와 같이 표현된다.

$$(D_x, D_y) = \int_C -pn \vec{ds} = \int_C p(-dy, dx) \quad (9)$$



[그림 4] 흐름장에 놓인 물체의 경계에 작용하는 압력

식 (9)에 나타난 힘의 성분을 복소수 형태로 표시하면 식 (10)과 같다.

$$D_x + iD_y = \int_C p(-dy + idx) = \int_C pidz \quad (10)$$

식 (10)에서 dz의 방향은 그림 4에 나타나 있는 바와 같다. 물체의 경계면에 작용하는 압력의 크기는 식 (11)에 나타난 베르누이 정리를 이용하여 구할 수 있다.

$$p + \frac{\rho}{2} |\nabla \Phi|^2 + \rho gh_z \quad (11)$$

$$= p + \frac{\rho}{2} \left| \frac{\partial F(z)}{\partial z} \right|^2 + \rho gh_z = Const.$$

식 (11)에서 ρ 는 유체의 밀도, g 는 중력가속도, h_z 는 위치수두를 의미한다. 식 (11)에서 중력의 영향을 배제 ($g=0$)하고 흡속을 통해 물이 흐르는 경우 발생하는 수두손실은 물과 흡입자의 마찰저항에 기인한다고 보면 물체 표면에서의 압력은 수두손실의 영향을 받지 않는다고 볼 수 있다. 따라서 물체의 경계면에 작용하는 압력은 $p = P - (\rho/2) |dF(z)/dz|^2$ 으로 표현되는데 여기서 P는

크기가 일정한 기준압력(reference pressure)이 되며 이를 식 (10)에 대입하고 공액 복소수 형태로 나타내면 식 (12)와 같다. 이 과정에서 상수항, P는 Chauchy 정리에 의해 0이 된다.

$$D_x - iD_y = \frac{i\rho}{2} \int_C \frac{dF(z)}{dz} \overline{dF(z)} \quad (12)$$

물체의 경계면은 유선이 되므로 흐름함수, $\Psi = Im F(z) = Const.$ 가 되어 경계면에서는 $dF(z) = \overline{dF(z)}$ 가 된다. 따라서 식 (13)을 얻는다.

$$D_x - iD_y = \frac{i\rho}{2} \int_C \frac{dF(z)}{dz} dF(z) \quad (13)$$

$$= \frac{i\rho}{2} \int_C \left(\frac{dF(z)}{dz} \right)^2 dz$$

식 (13)이 Blasius 정리(Blasius, 1913)로 알려진 식이다. 식 (8)의 복소 포텐셜을 식 (13)에 대입하면 다음의 식 (14)를 얻는다.

$$D_x - iD_y = \frac{i\rho}{2} \int_{|z|=a} \left(K - \frac{Ka^2}{z^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi z} \right)^2 dz \quad (14)$$

식 (14)의 피적분함수를 전개하여 $1/z$ 항의 계수를 구해보면 $-iKT/\pi$ 가 되며 Chauchy의 유수정리(Kreyszig, 1984)에 의해 식 (15)를 얻을 수 있다.

$$D_x - iD_y = \frac{i\rho}{2} \left(\frac{iKT}{\pi} \right) (2\pi i) = i\rho KT \quad (15)$$

식 (15)를 통해 알 수 있듯이 지중 매설관 주위를 순환하는 균등흐름에 있어서 흐름방향으로의 작용력은 0이 됨을 알 수 있고 그에 수직인 방향으로 $D_y = -\rho KT$ 가 작용하게 된다. 즉, 순환값이 양이면 매설관 상단부에는 균등흐름에 저항하는 흐름이 발생하고 하단부에는 균등흐름을 촉진시키게 되어 베르누이 정리에 따라 연직하향으로의 작용력이 발생하게 된다.

4. 결론

본 연구에서는 지중 매설관 주변의 지하수 흐름을 이론적으로 규명해 보고 흐름에 의해 매설관이 받는 작용

력을 해석적으로 구해 보았다. 지하수 흐름 해석시 복소 포텐셜을 이용하여 흐름을 정의하였는데 지중 매설관이 없는 경우의 균등흐름을 먼저 고려하였고 원 정리에 의해 지중 매설관의 영향을 기존의 균등흐름에 추가하였다. 복소 포텐셜의 중첩은 속도 포텐셜과 흐름함수가 라플라스 방정식을 만족시키는 선형성에 근거하여 두 개의 흐름을 더할 수 있으나 그에 앞서 각각의 포텐셜이 내포하고 있는 특이점의 성질을 파악하여 효과적인 포텐셜이 되도록 할 필요가 있다. 순환을 동반하는 지중 매설관 주변의 흐름에 의해 매설관 상부와 하부의 유속차이가 발생하므로 압력에 있어서도 차이가 발생하여 지중매설관에는 연직방향의 알짜힘이 작용하게 되는데 그 힘은 지하수의 밀도와 균등흐름의 강도 및 순환(circulation)의 곱으로 표시되었다.

참고문헌

- [1] AA Bokserman, IL Galina., Fluid Dynamics, Springer. 1991.
- [2] Blasius, H., "Das Aehnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten", Mitteilungen über [3] Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, vol.131, VDI-Verlag Berlin. 1913.
- [3] Erwin Kreyszig., Advanced engineering mathematics., John Wiley and sons, Inc., pp.720-725, 1984.
- [4] Milne. L. M. and Thomson. Theoretical Hydrodynamics, 5th Ed., Macmillan Press Ltd., London., 1972.

한진태(Jin-Tae Han)

[정회원]



- 1999년 2월 : 서울대학교 토목공학과 (공학사)
- 2001년 2월 : 서울대학교 지구환경시스템공학부 (공학석사)
- 2006년 8월 : 서울대학교 지구환경시스템공학부 (공학박사)
- 2010년 10월 ~ 현재 : 서울대학교 건설환경공학부 BK계약교수

<관심분야>
지반내진공학, 기초공학

이승현(Seung-Hyun Lee)

[정회원]



- 1988년 8월 : 서울대학교 토목공학과 (공학사)
- 1991년 2월 : 서울대학교 토목공학과 (공학석사)
- 1997년 2월 : 서울대학교 토목공학과 (공학박사)
- 2000년 3월 ~ 현재 : 선문대학교 토목공학과 부교수

<관심분야>
토질역학, 기초공학