Journal of the Korea Academia-Industrial cooperation Society
Vol. 13, No. 3 pp. 1091-1098, 2012

http://dx.doi.org/10.5762/KAIS.2012.13.3.1091

# 인공신경망을 이용한 주식워런트증권(ELW)의 헤징 방안

유재필[1], 신현준[1*]
[1]상명대학교 경영공학과

# A Methodology for Hedging Equity Linked Warrant Using Artificial Neural Network

**Jaepil Ryu[1] and Hyun Joon Shin[1*]**
[1]**Dept. of Management Engineering, Sangmyung University**

**요 약** 최근 주식 워런트 증권(ELW)의 시장 규모가 급격하게 증가하면서 ELW를 발행한 금융기관들에는 리스크 관리 측면에서 효율적인 헤징 방안에 대한 필요성이 대두되고 있다. 본 연구는 인공신경망 학습 기법을 이용하여 ELW를 헤징하는 데 소요되는 비용을 최소화하는 방안을 제시하고자 하며, 기초자산의 현재가격, 변동성, 무위험이자율, 만기 등의 시장 상황 변화에 따른 다양한 시나리오에 대한 실험을 통해 본 연구에서 제시하는 방법론의 성능을 기존의 동적 델타 헤징 방법론과 비교 실험하였다. 그 결과 만기 행사가 안 된 상품의 경우 본 연구에서 제시하는 헤징 방법론이 동적 델타 헤징에 비해 최종 비용이 약 250% 이상 개선되었으며, 행사한 상품은 최종 비용에 있어서 약 25%의 개선 율을 보이는 것을 알 수 있었다.

**Abstract** From the perspective of risk management, financial organization that have issued ELW require an efficient hedging methodology due to recently increased trade volume of ELW. This study presents an ELW hedging methodology using artificial neural network(ANN) to minimize hedging costs. The performance of the presented methodology in this study is examined by analysis utilizing the prices and volatilities of underlying assets, risk free interest rates, and maturities and computational experiments show that the proposed method is superior to existing dynamic delta hedging(DDH) technique in terms of hedging costs ranged from 25% to 250%.

Key Words : Equity Linked Warrant; Hedging Methodology; Costs; Black-Scholes; ANN

## 1. 서론

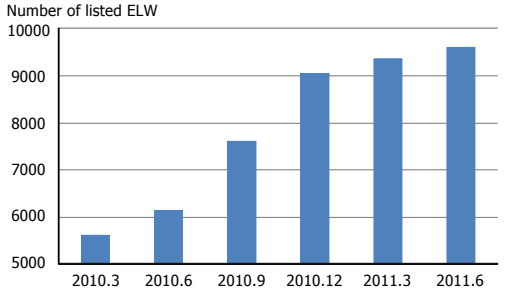
주식 시장의 주요 매매 주체는 개인, 기관 그리고 외국인 투자자이다. 특히 국내 금융 시장의 자율화와 개방화 정책은 한국 주식 시장의 외국인 투자자에 대한 의존도를 점점 높여가고 있다. 이는 주식 시장의 거래 활성화에 따른 국내 기업의 자금 유동성 문제를 해결할 수 있다는 장점이 있지만 개인 및 기관 투자자에게는 기업의 가치 판단과 함께 외국인 투자 동향을 관찰해야 하는 어려움이 따른다. 실제로 국내 주식 시장의 약 32%에 해당하는 지분을 외국인이 갖고 있으며, 2011년 8월의 미국 경제 위기 당시 10일 동안 외국인의 순매도는 약 5조원에 이르렀다. 그리고 국내 주식 시장은 남북한 특수 상황에 따른 불안 심리와 정치적 변수 등 다양한 사회적 변수에 노출되어 있다. 이처럼 예측이 어려운 시장 위험 변수에 효과적으로 대응하기 위하여 투자기관의 효율적인 헤징(hedging) 방안의 필요성이 점점 커지고 있다.

한국 거래소(Korea Exchange; 이하 KRX)는 개별 주식에 대한 옵션 상품이 유동성의 문제로 현재 거래되고 있지 않은 반면 주식 워런트 증권(equity linked warrant; 이하 ELW)의 개별 주식에 대한 파생 상품이 활발히 거래되고 있다. 따라서 최근 거래가 급증하고 있는 ELW 상품

*교신저자 : Hyun Joon Shin
Tel: +82-10-7148-6786 e-mail: hjshin@smu.ac.kr
접수일 11년 11월 18일 수정일 (1차 12년 01월 31일, 2차 12년 03월 06일) 게재확정일 12년 03월 08일

을 위한 헤징 방안은 국내 금융 파생상품 시장 발전에 큰 기여를 할 것으로 판단된다. ELW 시장의 하루 평균 거래 대금은 2011년 8월 1일 기준으로 약 1조 4천억 원이며 홍콩에 이어 세계 2위의 규모이다. 그림 1과 같이 발행된 ELW 종목 수도 2010년부터 분기마다 증가하여 2010년 3월 5,625개이던 상품이 2011년 6월에는 9,606개로 약 70%가 증가하였다.

금융 파생상품을 헤징하기 위한 방안에는 대표적으로 동적 델타 헤징(dynamic delta hedging; 이하 DDH) 방법이 있다. DDH는 블랙-숄즈 모형(Black-Scholes Model)에 기반을 두고 있으며, 만기 전 기초자산의 포지션 가치 변화에 대응하여 기초자산을 추격 매매함으로써 포지션 중립을 유지해 나가는 방법이다. 그러나 DDH 방법은 주가의 형태가 대수정규분포를 따르며 모든 증권은 분할가능하다는 등의 불합리한 가정들로 인한 한계와 문제점을 내포하고 있다.[8,18]




[그림 1] ELW 상장 종목 수 추이
[Fig. 1] The changes in the number of listed ELW

따라서 본 연구에서는 블랙-숄즈 모형을 통한 DDH 기법이 아닌 인공신경망(Artificial Neural Network; 이하 ANN)을 이용하는 헤징 방안을 제시하고자 한다. ANN은 뉴런과 시냅스를 조직화함으로써 비선형적인 병렬식으로 계산하는 방법론으로서 사람의 두뇌와 유사한 디지털 컴퓨터를 통해 특정한 기능만을 수행할 수 있도록 모형화되어있다[14]. 그러나 ANN을 통한 동적 헤지 전략은 국내외를 통틀어 아직은 활발한 연구가 이뤄지고 있지 않다. 본 연구에서는 헤징 비용의 측면에서 기존의 DDH 방안과의 성능비교를 통해 ANN을 이용한 ELW의 동적 헤징 방안의 실효성을 분석하고 그 우수성을 보이고자 한다.

## 2. 선행 연구

헤징(hedging) 전략은 일정한 헤지 비율을 근거하여 옵션 시장에서의 손익(손실)을 현물 시장에서의 손실(손익)로 상쇄한다. 금융 시장에서의 다양한 변수로 인한 위험 부담으로 인해 헤징 전략에 대한 연구는 활발하게 진행되고 있다. 더불어 다양한 방법론에 근거하여 헤징 전략을 제시하고 있다.

Moo-Sung Kim[21]의 연구에서 KOSPI 200 지수 옵션을 이용하여 블랙-숄즈 모형의 헤징 성과를 분석하였고 그 결과 콜옵션보다는 풋옵션 장기의 기간 동안에 헤징 성과가 우수하다는 것을 입증하였다. 헤지를 위해 최소분산헤지모형과 베타헤지모형의 방법론을 이용한 Figlewski[9,10]는 S&P 500 지수 선물의 헤지 능력 평가를 위해 5가지 기초자산의 헤지 성능을 연구하였다. 그리고 기초자산의 보유기간에 따라 헤지 성능의 유의한 차이를 분석하기 위해 1일, 2일, 3일, 1주, 2주, 3주의 보유기간 별 헤지 성능의 차이를 검증하였다. 반면 Jae Ha Lee[17]는 KOSPI 200 선물 지수를 활용하여 최소분산모형과 벡터오차수정모형을 이용한 헤지 성능을 분석한 결과, 헤지 모형 별 헤지 성과의 차이는 통계적으로 유의하지 않는다는 것을 입증하였다.

Peters[25]는 포트폴리오의 위험을 헤징하기 위하여 S&P 500 지수 선물을 이용하여 헤지 실증 분석을 하였다. Peters는 1984년부터 1985년까지의 일 별 자료를 이용하고 위험을 최소화하는 헤지 비율을 산출하기 위해 회귀분석 방법론을 적용하였다. 본 논문은 회귀분석에 의해 나온 헤지 비율이 베타보다 위험을 최소화할 수 있다고 나타냈다. Ghosh[11]는 잔차의 제곱 합이 최소가 되는 최소제곱법(Ordinary Least Squares; 이하 OLS)을 활용하여 추정한 헤지 비율은 이상 값일 확률이 높다는 것을 분석하였다. 그는 1990년 1월 2일 기준으로 489일 동안의 S&P 500 지수 선물을 이용하였고 ECM(Error Correction Model)이 OLS보다 헤지 비율이 상대적으로 높은 것으로 나타났다.

Marmer, H.S.[20]는 기초적 통계량인 평균과 분산 구조에 의한 헤지 성능 평가와 헤지 비율의 안정성 평가 등을 토대로 최적의 헤지 비율 도출에 대해 연구하였다. 그리고 Grammatikos, Theoharry and Anthony Saunders[12]는 시계열 자료를 바탕으로 헤지 비율 도출에 있어서 최소분산에 따른 헤지 비율의 안정성 문제에 대해 연구하였다. Myers[24]는 최적의 헤지 비율이 헤지 시점에 따라 유의한 차이가 있는지와 헤지를 안하는 경우와의 비교를 통해 헤지 효과에 대해 분석하였다.

옵션의 가격결정을 위해 ANN을 적용한 사례는 매우 많았으며[1-5,13,22,26], 가격 결정보다는 그 수가 적지만 옵션 헤징을 위해서도 ANN을 활용한 연구가 지속적으로 진행되고 있다[2,3,23]. 다만 국내 KOSPI를 대상으로 한

문헌은 Choi et al.[5]의 KOSPI 200 지수옵션 가격결정에 대한 연구 이외에는 찾아보기 어렵고 ELW의 헤징을 목표로 ANN을 적용한 연구는 존재하지 않았다. 또한 본 연구에서 제안한 ANN 모델이 ANN을 활용한 기존연구와 차별되는 특징은 ANN 모형의 학습 목표 값으로 동적델타헤징을 헤징비용최소화 모형으로 모델링하여 산출한 값을 이용하였다는 점과 ANN의 학습률 및 정확도를 높이기 위해 입력데이터에 현재 기초자산의 가격과 행사가격의 추이를 반영하였다는 것이다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 3장에서는 본 논문의 주요 헤징 대상이 되는 ELW 시장을 위한 헤지 전략의 기본 원리에 대해 설명하고 4장에서는 본 논문이 제안한 ANN 알고리즘에 기반을 둔 동적 헤징 전략 대하여 기술하고 5장에서는 다양한 환경 하에서 실행된 실험결과 및 분석을, 마지막으로 6장에서 결론 및 추후 연구과제를 제시한다.

## 3. ELW의 헤지 전략

### 3.1 ELW 개요

ELW는 기초자산을 사전에 정한 미래의 시점에 미리 정한 가격으로 살 수 있거나 팔 수 있는 권리를 갖는 유가증권이다. 기초자산의 대상종목은 유동성이 풍부한 KOSPI100 구성 종목과 주식 바스켓 그리고 KOSPI200 지수 등이며 만기는 최소 3개월에서 3년 이내이다. ELW는 옵션과 동일하게 만기에 행사가격으로 기초자산을 매매할 수 있는 권리를 갖는다. 그러나 콜, 풋 매입 또는 매도 포지션이 가능한 옵션과는 다르게 ELW는 옵션의 콜, 풋 매입 포지션만 취할 수 있다. 수익 구조는 옵션의 콜, 풋 매입 포지션과 동일하다.

특히 ELW는 원활한 거래를 위해 각 증권사에서 유동성 공급자(Liquidity Provider; 이하 LP)를 제공한다. LP의 역할은 일반적으로 ELW 상품을 발행한 증권사가 맡게 되며 LP는 매입 및 매도 호가 제시를 통해 시장에 유동성을 공급하는 의무를 지닌다[16]. 옵션의 경우 대부분 만기가 1개월 이내인 상품들에서 거래가 발생한다는 것과는 대조적으로 ELW는 LP가 존재함으로써 유동성이 일정 수준에 미달하는 종목에 대해 지속적으로 매수 및 매도 호가를 제시하여 만기 내 상품들의 가격형성을 유도한다. 또한 ELW는 옵션과 동일한 기본 예탁금 1,500만원을 제외하고 증거금이 존재하지 않기 때문에 헤지 전략을 수립하는 과정에서 편리하다는 장점이 있다.

전환비율은 ELW 1주에 해당하는 기초자산의 비율을 의미한다. 예컨대 전환비율이 0.1이면 ELW 10주가 기초자산 1주의 가치와 동일하다는 의미이다. ELW와 옵션의 차이점을 간략하게 요약하면 표 1과 같다.

**[표 1]** ELW와 지수 옵션의 차이점
**[Table 1]** The difference between ELW and index options

| | ELW | 지수 옵션 |
|---|---|---|
| 기초자산 | KOSPI 100 및 개별주식 | KOSPI 200 지수 |
| 포지션 | 콜, 풋 매입 | 콜, 풋 매입 및 매도 |
| 만기 | 3개월~3년 | 단기 |
| 증거금 | 없음 | 개시, 유지 증거금 |
| 유동성 공급 | 의무적 공급 | 유동성 공급자 없음 |
| 전환비율 | 있음 | 없음 |

### 3.2 블랙-숄즈 모형

인공신경망을 이용한 헤지 전략에 대한 헤지 성능을 검증하기 위한 비교 대상 모형인 DDH 전략은 블랙-숄즈 모형에 기반을 두고 있으며 본 논문에서는 콜과 풋옵션 중 콜옵션 가격 결정 식을 이용하기로 한다. 콜옵션에 대한 블랙-숄즈 가격 결정 식은 식 (1)과 같다.

$$C = SN(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2) \quad (1)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (2)$$

Notations :

$C$ 콜옵션의 현재가치
$S$ 현재 주가
$X$ 행사 가격
$N(d)$ 표준정규분포에서 $d$ 값보다 작을 확률
$T$ 만기
$\sigma$ 변동성(volatility)

블랙-숄즈 모형은 실제 시장에서 얻을 수 있는 여러 가지 모수들을 이용하여 옵션의 이론가격을 산출할 수 있다. 그러나 블랙-숄즈의 옵션 가격결정 모형은 차익 거래의 기회가 존재하지 않으며 수익은 무위험이자율이라는 가정 등을 따른다. 또한 앞서 말한 블랙-숄즈 모형의 가정들은 실제 시장에서의 괴리를 발생시키므로 많은 한계점을 야기하고 있는 것이 사실이다. DDH는 블랙-숄즈의 연구를 통해 시작된 전통적인 옵션 가격결정 모형인 차익 거래의 기회가 존재하지 않는 상황에서 무위험이자율로 수익을 올리는 동적 헤징 기법의 아이디어에 기반하고 있다[19].

반면 Hutchinson et al[15]와 Gencay & Qi[13] 인공신경망을 토대로 옵션의 가격을 결정하는 방법론을 제안하였다. 그러나 옵션 가격 결정 모형의 일반적이고 구체적인 방안은 지금도 어려운 문제로 남아있으며 국제 금융시장에서의 다양한 변수들을 고려한 수학적 모형은 끊임없는 연구가 진행되고 있다.

### 3.3 델타 헤징

옵션의 가격에 영향을 주는 각각의 요소(기초자산의 가격, 변동성, 잔존만기 등)들로 편미분 하면 각 민감도를 산출할 수 있는데 그 중에서도 옵션의 가격을 결정하고 옵션을 헤지하는데 있어서 매우 중요한 모수인 델타(delta)를 산출할 수 있다. 델타는 기초자산의 가격 변화에 대한 옵션 가격의 변화로 정의되며 옵션 가격을 기초자산 가격의 함수로 나타내는 곡선의 기울기를 말한다. 다음 식 (3)은 콜옵션에서의 델타 $\Delta$를 구하는 공식이다.

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) \tag{3}$$

위 식으로부터 산출된 델타 값을 통해 주가가 변화량이 옵션의 가치에 어느 정도의 영향을 주고 있는지 판단할 수 있다. 예를 들어 콜옵션의 델타가 0.5라면 콜옵션의 가격 변동 폭은 주가 변동 폭의 50%라는 것을 의미한다.

### 3.4 동적 델타 헤징 (DDH)

| 입력 변수 | | | | | | | 결과 비교 | | 개선율 : |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| S | X | r | T | σ | 수량 | q | 델타 | ANN | 이론가 |
| ₩ 975,000 | ₩ 980,000 | 0.04 | 0.25 | 0.300 | 100 | 0 | ₩ 5,417,568 | | ₩ 6,043,788 |
| 헤징주기 | 자존만기 | date | 주가 | 델타(Δ) | 수량델타 | 포지션 | 매매금액 | 이자비용 | 누적비용 |
| 0 | 0.000 | 11-1-25 | ₩ 975,000 | 0.542 | 54.2 | ₩ 52,861,466 | ₩ 52,861,466 | ₩ - | ₩ 52,861,466 |
| 1 | 0.019 | 11-2-1 | ₩ 983,000 | 0.562 | 56.2 | ₩ 55,232,294 | ₩ 1,937,092 | ₩ 39,661 | ₩ 54,838,219 |
| 2 | 0.039 | 11-2-8 | ₩ 961,000 | 0.495 | 49.5 | ₩ 47,546,451 | -₩ 6,449,718 | ₩ 41,144 | ₩ 48,429,646 |
| 3 | 0.058 | 11-2-15 | ₩ 958,000 | 0.480 | 48.0 | ₩ 45,997,467 | -₩ 1,400,556 | ₩ 36,336 | ₩ 47,065,426 |
| 4 | 0.077 | 11-2-22 | ₩ 938,000 | 0.407 | 40.7 | ₩ 38,206,662 | -₩ 6,830,524 | ₩ 35,312 | ₩ 40,270,214 |
| 5 | 0.096 | 11-3-8 | ₩ 899,000 | 0.266 | 26.6 | ₩ 23,957,804 | -₩ 12,660,308 | ₩ 30,214 | ₩ 27,640,120 |
| 6 | 0.115 | 11-3-15 | ₩ 860,000 | 0.139 | 13.9 | ₩ 11,968,851 | -₩ 10,949,626 | ₩ 20,738 | ₩ 16,711,231 |
| 7 | 0.135 | 11-3-22 | ₩ 875,000 | 0.155 | 15.5 | ₩ 13,527,329 | ₩ 1,349,719 | ₩ 12,538 | ₩ 18,073,488 |
| 8 | 0.154 | 11-3-29 | ₩ 916,000 | 0.261 | 26.1 | ₩ 23,946,092 | ₩ 9,784,911 | ₩ 13,560 | ₩ 27,871,959 |
| 9 | 0.173 | 11-4-5 | ₩ 945,000 | 0.360 | 36.0 | ₩ 33,983,059 | ₩ 9,278,848 | ₩ 20,912 | ₩ 37,171,719 |
| 10 | 0.192 | 11-4-12 | ₩ 882,000 | 0.082 | 8.2 | ₩ 7,191,478 | -₩ 24,526,043 | ₩ 27,889 | ₩ 12,673,565 |
| 11 | 0.212 | 11-4-19 | ₩ 875,000 | 0.031 | 3.1 | ₩ 2,688,004 | -₩ 4,446,398 | ₩ 9,509 | ₩ 8,236,675 |
| 12 | 0.231 | 11-4-26 | ₩ 897,000 | 0.018 | 1.8 | ₩ 1,641,897 | -₩ 1,113,691 | ₩ 6,180 | ₩ 7,129,164 |
| 13 | 0.250 | 11-5-3 | ₩ 938,000 | 0.000 | 0.0 | ₩ - | -₩ 1,716,945 | ₩ 5,349 | ₩ 5,417,568 |

**[그림 2]** DDH 시뮬레이션 예제
**[Fig. 2]** Simulation example of dynamic delta hedging

그림 2는 2008년 1월 10일부터 2008년 4월 3일까지의 3개월 동안의 삼성전자 ELW 콜 매입 포지션에 대한 DDH를 적용한 시뮬레이션 결과를 사례로 보여주고 있다. 본 시뮬레이션에서 행사가격($X$)은 등가격(ATM), 무위험이자율($r$)은 국고채 3년 만기 주별 이자율, 변동성($\sigma$)은 역사적 변동성으로 추정하여 사용하였고, 배당은 없다고 가정하였다. 또한 ELW는 전환비율을 고려해줘야 하지만 DDH와 ANN 기법의 헤지 방법론에 따른 성능을 비교 및 분석하는 것이 본 연구의 목적이므로 전환비율을 1로 가정한다.

헤지는 1주일 간격으로 재조정(rebalance)되는 것으로 가정한다. 최초(헤징주기 = 0)의 델타 값은 0.542로 계산되었다. 이는 ELW를 발행하자마자 52,861,466원(=0.542(델타) x 100(주식 수량) x ₩975,000(주가))을 차입하여 기초자산을 한 주당 975,000원에 약 54계약 매입해야 함을 의미한다. 이자율은 연 4%이다. 그 결과, 첫 주에 약 39,661원의 이자비용이 발생한다. 첫 주 말기에 주가는 983,000원으로 상승한다. 이는 델타를 0.562로 상승시키고 헤지를 유지하기 위하여 2주를 추가로 매입해야 하므로 1,937,092원을 추가 차입하여야 한다. ELW 상품의 만기일에 접근함에 따라 ELW 상품이 행사 여부가 확실해지지 않고 있어 상대적으로 높은 수준의 델타가 유지되었다. 그러나 만기일에 행사기준에 미치지 못하여 델타가 0이 됨과 동시에 노출된 포지션을 취하게 되고 총비용은 5,417,568원이 되었다.

## 4. ANN기반의 동적 헤지 전략

### 4.1 헤징 목표 값

3.4절에서 기술한 입력 변수들에 기초해 도출된 델타 값을 통해 기초자산 가격의 변화에 따라 DDH를 할 수 있는데, 여기서 만기 시점의 최종 비용이 본 연구에서의 헤지 성능지표(performance measure)가 된다. 따라서 기존의 블랙-숄즈 모형을 통해 산출된 델타 값을 이용한 동적 헤지보다 더 적은 비용으로 헤지할 수 있는 헤징 값을 추정하는 것이 본 연구의 중요한 내용 중 하나다. 또한 본 논문에서는 최종 비용을 최소로 할 수 있는 헤징 목표 값을 인공신경망 학습을 통해 주어진 입력 변수들에 따라 헤징 목표 값을 예측함으로써 기존의 블랙-숄즈 모형에 기반을 둔 헤지 성능과 비교한다.

본 연구의 헤지 성능 지표인 최종 비용을 $Z$라고 정의하며, 최종 비용을 최소로 할 수 있는 결정 변수인 헤징 목표 값을 $h_t$라고 정의한다. 최종 비용 $Z$를 최소화하도록 최적의 헤징 목표 값 $h_t^*$을 찾아내는 문제를 DHP(Dynamic Hedging Problem)라고 정의하면 다음과 같이 모형화 할 수 있다.

**[DHP]**

$Minimize \quad Z$

$subject\ to$

$$Z = \sum_{t=2}^{T} C_{t-1}\exp(r\tau) - Q\{max(S_t - X, 0) - S_t h_{t-1}\} \quad (4)$$

$$C_t = C_{t-1}\exp(r\tau) + QS_t(h_t - h_{t-1}), \quad \forall t \quad (5)$$

$$C_0 = QS_0 h_0 \quad (6)$$

$$0 \le h_t \le 1, \quad \forall t \quad (7)$$

$$h_T = \begin{cases} 1 & if\ S_T > X \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad (8)$$

여기서,

$C_t$ $t$기간의 누적 비용

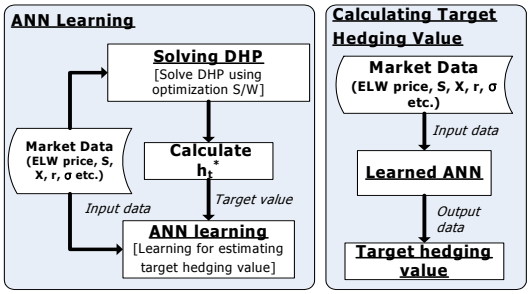
$\tau$ $\Delta t$

$h_t$ $t$기간의 헤징 목표 값(결정변수)

$Q$ 주식 수량

제약식 (4)는 무위험이자율로 할인된 누적 비용 및 ELW 상품의 payoff 그리고 보유 주식(지수) 포지션 항목으로 계산되는 헤징 최종 비용을 나타낸다. 누적 비용 및 누적 비용의 초기 값은 제약식 (5)와 (6)에 주어진다. 결정변수인 헤징 목표 값의 범위와 만기 조건은 제약식 (7), (8)과 같이 각각 정의된다. DHP 문제의 최적해인 $h_t^*$는 LINGO 및 EXCEL 등의 최적화 소프트웨어를 이용하여 쉽게 구할 수 있다. 이렇게 산출된 $h_t^*$는 4.2절에서 설명할 ANN의 학습 target 값으로 사용된다.

또한 ANN에 기반을 둔 동적 헤지 전략 하의 헤징 목표 값은 미래 ELW의 가격이 오르는 경향을 보이는 경우 상대적으로 낮은 가격에 가능한 많은 수량을 보유해 놓음으로써 헤지 성능을 높일 수 있다는 점을 기본 전제로 하고 있다. 또한 헤지는 투기 목적이 아닌 위험 최소화가 목적이므로 $h_t$값이 1을 넘지 않도록 한다.




[그림 3] ANN을 이용한 헤징 목표 값 도출 과정

[Fig. 3] Calculation process of target hedging value using ANN

### 4.2 ANN 학습 모형 및 ELW 헤지 전략

DHP 문제로부터 구한 $h_t^*$은 헤지 최종 비용을 최소화할 수 있는 값으로써 블랙-숄즈 모형에 의해 계산된 델타 값보다 적은 비용으로 헤지할 수 있을 것으로 기대된다. 본 논문은 2008년 1월부터 2011년 5월까지 KRX 거래소에서 거래된 50개의 ELW 콜 상품, ELW 상품과 동일한 기초자산(주식) 그리고 target 값($h_t^*$)을 바탕으로 ANN을 학습시켜 input data(상황변수)가 주어졌을 때, 헤지 비용을 최소화하는 헤징 목표 값을 추정할 수 있도록 한다. ANN에 기반을 둔 헤징 목표 값의 자세한 도출 과정은 그림 3과 같다.

본 연구에서 사용한 ANN은 피드포워드 역전파 뉴럴 네트워크(feed-forward back-propagation neural network)으로서, 입력층(input layer), 은닉층(hidden layer) 그리고 출력층(output layer)으로 구성된다. ANN 학습 및 사용을 위해서는 input data와 output data를 정의해야하는데, input data는 $S$, $X$, $T'$(잔존만기), $r$, $\sigma$ 그리고 $t$시점에서의 $H$(hint) 즉, $H_t$로 정의하며, out data는 학습 시에는 target값인 $h_t^*$, 실제 사용 시에는 헤징 목표 값으로 정의한다. 여기서 $H_t$는 학습률을 높이기 위한 정보로써 행사가격과 기초자산의 현재가격 간의 오차를 이용해 행사가능성 유무를 파악하여 상수 값으로 결정되도록 했으며 다음과 같이 정의된다.

$$H_t = \begin{cases} 1 & if\ S_t \ge X + \xi \\ 0 & if\ S_t \le X - \xi \\ 0.5 & otherwize \end{cases} \quad (9)$$

여기서 $\xi$는 ANN으로 하여금 학습을 수행할 때 기초자산의 가격동향을 반영할 수 있도록 하는 역할을 한다. 가장 적합한 $\xi$ 값(정수)은 시행착오 법으로 계산될 수 있는데, 본 논문의 실험에서는 0과 7사이의 값들 중에서 가장 좋은 성능(학습률)을 나타낸 값을 선정하여 사용하였고, 실험은 MATLAB 7.4 소프트웨어에서 제공하는 툴박스인 nntool을 이용하였다. 입력층과 은닉층에서의 변환함수는 각각 TANSIG와 LOGSIG 함수를 사용하였다.

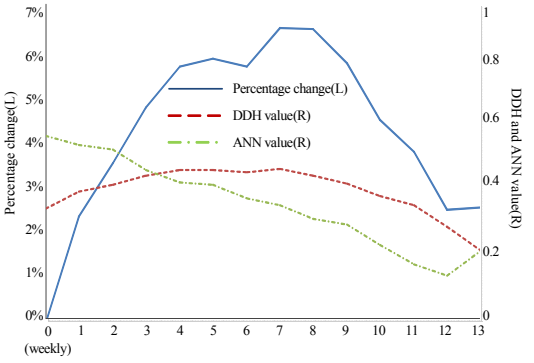
## 5. 실험결과 및 분석

본 논문은 제안한 ANN를 이용한 동적 헤징 전략의 성능을 평가하기 위해 기존의 DDH와 비교 실험을 수행하였다. 3.4절에서 예제로 제시한 DDH 시뮬레이션에 ANN을 이용한 동적 헤지 전략 방법을 적용한 결과, 그림 4와 같이 74%만큼의 개선율을 보이는 것을 알 수 있었다. 이

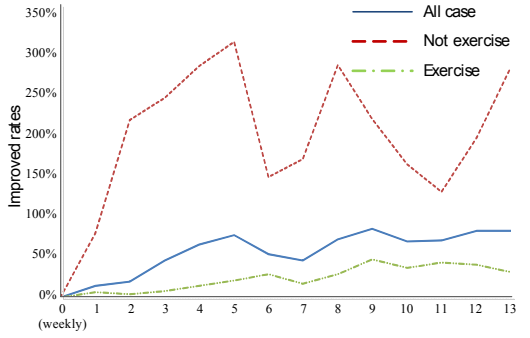
러한 실험을 2008년 1월부터 2011년 5월까지 KRX 거래소에서 거래된 50개의 ELW 상품을 이용하여 실험해본 결과를 나타내면 그림 5-6과 같다.

| 입력 변수 | | | | | | | 결과 비교 | | 개선율 : 74% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| S | X | r | T | σ | 수량 | q | 델타 | ANN | 이론가 |
| ₩ 975,000 | ₩ 980,000 | 0.04 | 0.25 | 0.300 | 100 | 0 | ₩ 5,417,568 | ₩ 1,388,244 | ₩ 6,043,788 |
| 헤징주기 | 지준만기 | date | 주기 | 델타(Δ) | 수량델타 | 포지션 | 매매금액 | 이지비용 | 누적비용 |
| 0 | 0.000 | 11-1-25 | 975,000 | 0.28339 | 28.3 | ₩ 27,630,525 | ₩ 27,630,525 | ₩ - | ₩ 27,630,525 |
| 1 | 0.019 | 11-2-1 | 983,000 | 0.25195 | 25.2 | ₩ 24,766,685 | -₩ 3,090,552 | ₩ 20,731 | ₩ 24,560,704 |
| 2 | 0.039 | 11-2-8 | 961,000 | 0.24268 | 24.3 | ₩ 23,321,548 | -₩ 890,847 | ₩ 18,427 | ₩ 23,688,284 |
| 3 | 0.058 | 11-2-15 | 958,000 | 0.18372 | 18.4 | ₩ 17,600,376 | -₩ 5,648,368 | ₩ 17,773 | ₩ 18,057,689 |
| 4 | 0.077 | 11-2-22 | 938,000 | 0.17873 | 17.9 | ₩ 16,764,874 | -₩ 468,062 | ₩ 13,548 | ₩ 17,603,175 |
| 5 | 0.096 | 11-3-8 | 899,000 | 0.16818 | 16.8 | ₩ 15,119,382 | -₩ 948,445 | ₩ 13,207 | ₩ 16,667,938 |
| 6 | 0.115 | 11-3-15 | 860,000 | 0.15518 | 15.5 | ₩ 13,345,480 | -₩ 1,118,000 | ₩ 12,506 | ₩ 15,562,443 |
| 7 | 0.135 | 11-3-22 | 875,000 | 0.15894 | 15.9 | ₩ 13,907,250 | ₩ 329,000 | ₩ 11,676 | ₩ 15,903,120 |
| 8 | 0.154 | 11-3-29 | 916,000 | 0.17352 | 17.4 | ₩ 15,894,432 | ₩ 1,335,528 | ₩ 11,932 | ₩ 17,250,579 |
| 9 | 0.173 | 11-4-5 | 945,000 | 0.17946 | 17.9 | ₩ 16,958,970 | ₩ 561,330 | ₩ 12,943 | ₩ 17,824,852 |
| 10 | 0.192 | 11-4-12 | 882,000 | 0.14189 | 14.2 | ₩ 12,514,698 | -₩ 3,313,674 | ₩ 13,374 | ₩ 14,524,552 |
| 11 | 0.212 | 11-4-19 | 875,000 | 0.12486 | 12.5 | ₩ 10,925,250 | -₩ 1,490,125 | ₩ 10,897 | ₩ 13,045,324 |
| 12 | 0.231 | 11-4-26 | 897,000 | 0.11613 | 11.6 | ₩ 10,416,861 | -₩ 783,081 | ₩ 9,788 | ₩ 12,272,031 |
| 13 | 0.250 | 11-5-3 | 938,000 | 0.000 | 0.0 | ₩ - | -₩ 10,892,994 | ₩ 9,207 | ₩ 1,388,244 |

[그림 4] ANN을 이용한 동적 헤징 시뮬레이션 예제
[Fig. 4] Examples of dynamic hedging simulation using ANN




[그림 5] 기초자산의 수익률 변화에 따른 DDH 및 ANN 값의 추이 (만기 시 행사 유·무 모두 포함)
[Fig. 5] Changes of DDH & ANN value according to percentage change of underlying asset (both exercised and non-exercised cases)




[그림 6] ANN의 헤징 비용 개선율
[Fig. 6] Hedging cost improvement ratio of ANN

본 연구에서는 상품 별 헤징 주기를 13주로 정의하였고, 그림 5은 ELW 콜 상품의 기초자산 주가 변동률에 따라 DDH에 의해 산출된 델타 값(– –)과 ANN을 통해 산출된 헤징 목표 값(— ··)의 추이를 나타낸 것이다. 이 그림들을 살펴보면 본 연구에서 제시한 ANN을 이용한 헤징 전략은 기본적으로 기초자산의 가격이 낮을 때 가능한 많은 수량을 매입해 나간다는 것을 파악할 수 있다. 또한 기초자산 주가 변동률이 상승하는 구간에서는 DDH와 ANN은 서로 음의 상관관계를, 하락하는 구간에서는 서로 양의 상관관계를 보인다는 것도 관찰할 수 있었다. 그림 5은 50개의 ELW 콜 상품에 대한 기초자산 가격의 주가 변동, 델타 값 그리고 헤징 목표 값의 평균을 나타낸 것이다. 그림 6은 앞서 설명한 그림 5에서 DDH와 AHH 방법론 간에 주기 별 헤징 비용의 평균 개선율을 나타내고 있다. 특히 행사가 안 된 상품의 경우 ANN의 방법론이 DDH에 비해 최종 비용이 약 250% 이상 개선되었으며 행사한 상품은 최종 비용에 있어서 약 25%의 개선율을 보이는 것을 알 수 있다.

## 6. 결론

본 논문에서는 기계학습의 일종인 인공신경망(ANN)을 이용하여 기초자산에 대한 DDH에 기반을 둔 ELW 콜 헤지 전략을 제시하였다. 제시한 전략은 실제 KRX에서 2008년 1월부터 2011년 5월까지 기간 동안 거래된 ELW 콜 데이터를 이용하여 실험한 결과, 기존의 블랙-숄즈 모델에 근거한 DDH 방법론과 비교하여 헤징 비용 측면에서 매우 높은 개선율을 보인다는 것을 입증하였다. 따라서 본 연구에서 제안한 ANN을 이용한 ELW 헤지 전략은 실제 금융기관에서 효과적인 헤지 전략 또는 대안으로 사용될 수 있을 것으로 기대한다. 그러나 본 연구에서는 헤징 전략에서 비용 최소화에 중점을 두었기 때문에 위험관리 측면에서의 헤징효율성을 극대화할 수 있는 방안을 함께 고려하는 방안이 추후연구로 계획되어 있다.

## Reference

[1] Andreou, P.C., Charalambous, C. and Martzoukos, S.H., “Robust Artificial Neural Networks for Pricing of European Options”, Computational Economics, vol. 27, no. 2-3, pp. 329-351, 2006.

[2] Andreou, P.C., Charalambous, C. and Martzoukos, S.H. “Pricing and Trading European Options by Combining Artificial Neural Networks and Parametric Models with Implied Parameters”, European Journal of Operational

Research, vol. 185, no. 3, pp. 1415-1433, 2008.

[3] Andreou, P.C., Charalambous, C. and Martzoukos, S.H. “Generalized Parameter Functions for Option Pricing”, Journal of Banking and Finance, vol. 34, no. 3, pp. 633-646, 2010.

[4] Andreou, P.C., Martzoukos, S.H. and Charalambous, C. “Option Pricing and Trading with Artificial Neural Networks and Advanced Parametric Models with Implied Parameters”. In Proceedings of the 2004 International Joint Conference on Neural Networks, vol. 4, IEEE, pp. 2741-2746, 2004.

[5] Choi, H.H., Lee, H.S., Han, G.S. and Lee, J. “Efficient Option Pricing Via a Globally Regularized Neural Network”, In Proceedings of an International Symposium on Neural Networks 2004, Part 2, pp. 988-993, 2004.

[6] Gençay, R and Gibson, R. “Model Risk for European Style Stock Index Options”, IEEE Transactions on Neural Networks 18, vol. 18, no. 1, pp. 193-202, 2007.

[7 Gradojevic, N., Gençay, R. and Kukolj, D. “Option Pricing with Modular Neural Networks”, IEEE Transactions on Neural Networks, vol. 20, no. 4, pp. 626-637, 2009.

[8] Gyeong Su Yi, Young Un Goun, Ji Ho Sin, “Derivatives Modeling I: Using MATLAB", pp. 94-103, A-JIN Publishing Co., 2008.

[9] Figlewki, S., “Hedging Performance and Basis Risk in Stock Index Futures”, Journal of Finance, 39, pp. 657-669, 1984.

[10] Figlewki, S., “Hedging with Stock Index Futures : Theory and Applicatios in a New Market”, Journal of Futures Markets, 5, pp. 183-199, 1985.

[11] Ghosh, A., “Hedging with Stock Index futures: Estimation and Forecasting with Error Correction Model”, Journal of Futures Markets, 13, pp. 743-752, 1993.

[12] Grammatikos Theoharry, Anthony Saunders, “Stability and the Hedging Performance of Foreign Currency Futures”, The Journal of Futures Markets, 3(3), pp. 295-305, 1983.

[13] Gencay R. and Qi M., “Pricing and Hedging Derivative Securities with Neural Networks: Bayesian Regulation, Early Stopping, and Bagging”, IEEE Transactions on Neural Networks, 12, pp. 726 – 734, 2001.

[14] Haykin S., “Neural networks A comprehensive foundation”, Prentice-Hall of India, 1999.

[15] Hutchinson J. M., Lo A.W., and Poggio T., 1994, “A Nonparametric Approach to Pricing and Hedging Derivative Securities Via Learning Networks”, Journal of Finance, 49, pp. 851-889.

[16] Hyuk Choe, Min-Cheol Woo, “Difference in Capability of Liquidity Provision among Liquidity Providers in Korean ELW Market”, The Journal of Korean Securities Association, 39(2), pp. 161-190, 2010.

[17] Jae Ha Lee, Gwang Youl Jang, “Hedging Strategies with the KOSPI 200 Futures”, The Journal of Korean Securities Association, 28(1), pp. 379-420, 2001.

[18] Jae Pil Ru, Hyun Joon Shin, “An Option Hedge Strategy Using Machine Learning and Dynamic Delta Hedging”, The Korea Academia-industrial cooperation Society, 12(2), pp. 712-717, 2011.

[19] John C. Hull, “Options, Futures and Other Derivatives”, Person Prentice Hall, 2006.

[20] Marmer, H.S., “Portfolio Model Hedging with Canadian Dollar Futures: A Framework for Analysis”, The Journal of Futures Markets, 6(1), pp. 83-92, 1986.

[21] Moo-Sung Kim, Tae-Hun Kang, “On the Usefulness of Risk-Neutral Distribution Implied in the KOSPI 200 Index Option”, Asia-Pacific Journal of Financial Studies, 35(4), pp. 103-141, 2006.

[22] Morelli, M.J., Montagna, G., Nicrosini, O., Treccani, M., Farina, M., and Amato, P. “Pricing Financial Derivatives with Neural Networks, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications”, vol. 338, no. 1-2, pp. 160-165, 2004.

[23] Mostafa, F. and Dillon, T. “A Neural Network Approach to Option Pricing. In Computational Finance and its Applications III”, edited by M. Constantino, M. Larran and C.A. Brebbia, WIT Press, pp. 71-86, 2008.

[24] Myers, R.J., “Estimating Time-Varying Optimal Hedge Ratios on Futures Markets”, The Journal of Futures Markets, 11(1), pp. 39-53, 1991.

[25] Peters, E., “Hedged Equity Portfolios: Components of Risk and Return”, Advances in Futures and Options Research, 1, pp. 75-91, 1986.

[26] Samur, Z.I. and Temur, G.T. “The Use of Artificial Neural Network in Option Pricing: The Case of S&P 100 Index Options, World Academy of Science”, Engineering and Technology, vol. 54, pp. 326-331, 2009.

**유 재 필**(Jae Pil Ru) **[정회원]**

- 2009년 2월 : 상명대학교 산업정보시스템공학과(공학사)
- 2011년 2월 : 상명대학교 경영공학과(경영공학석사)
- 2011년 3월 ~ 현재 : 상명대학교 경영공학과 박사과정

<관심분야>
금융공학, 생산관리

**신 현 준**(Hyun Joon Shin) **[종신회원]**

- 1995년 2월 : 고려대학교 산업공학과(공학사)
- 1997년 2월 : 고려대학교 산업공학과(공학석사)
- 2002년 2월 : 고려대학교 산업공학과(공학박사)
- 2002년 5월 ~ 2004년 4월 : 미국Texas A&M대학교 연구원
- 2004년 6월 ~ 2005년 2월 : ㈜삼성전자 책임연구원
- 2005년 3월 ~ 현재 : 상명대학교 경영공학과 부교수

<관심분야>
금융공학, 경영과학, 생산관리, 공급사슬망관리