

점증하중에 의한 압밀의 유한차분해석

이승현^{1*}

¹선문대학교 토목공학과

Finite Difference Method on Consolidation under Time Dependent Loading

Seung-Hyun Lee^{1*}

¹Dept. of Civil Engineering, Sunmoon University

요 약 유한차분법을 적용한 압밀해석을 수행하였는데 순간하중이 재하되는 경우 유한차분법에 의해 예측되는 시간별 침하량과 Terzaghi 방법에 의한 침하량 사이의 차이는 시간적자간격을 충분히 작게 하여 해결할 수 있음을 알 수 있었다. 점증하중에 대한 압밀해석을 위한 유한차분식을 유도하였는데 해석결과에 따른 과잉간극수압의 분포가 Olson의 이론해와 일치하였다. 점증하중이 작용하는 경우에 대해 예측한 시간-침하거동에 있어 유도된 유한차분식에 의한 결과와 Terzaghi 및 Olson 에 의한 결과 또한 거의 일치하였다. 다만 점증하중에 대한 해석결과 또한 신뢰성이 높은 것으로 보인다.

Abstract Formulation of finite difference method for analyzing consolidation were carried out. It can be seen that the differences in settlement with time obtained by FDM and Terzaghi method are diminished by fine discretization of time increment. Excess pore pressures predicted by the derived finite difference equation were same as those calculated by Olson's method. Predicted time-settlement behavior from the derived finite difference method were almost same as those calculated by Terzaghi's method and Olson's method. Analysis results obtained from the assumed multi-step time dependent loading are thought to be reasonable.

Key Words : Finite difference method, Instantaneous loading, Time dependent loading, Terzaghi's method, Olson's method

1. 서론

유한차분법(FDM)에 의한 일차원 압밀이론 해석의 장점은 임의의 분포를 갖는 초기 과잉간극수압에 대한 해를 구할 수 있다는 점과 시간에 의존하는 하중분포에 대해 해를 구할 수 있다는 점이다. 시간에 의존하는 하중 즉 점증하중에 대한 일차원 압밀이론에 있어서의 해는 Terzaghi[4]와 Olson[3] 등이 제안한 바 있다. 그러나 Terzaghi 방법에 의하면 점증하중이 작용할 때 평균압밀도는 경험적 방법을 통해 구할 수 있으나 압밀층내에 발생하는 과잉간극수압의 분포는 구하기 어려우며 이를 해결한 Olson 방법을 쓸 경우에도 하중증가 단계에 있어 일

정하중이 방치되는 경우에 대한 해는 없다고 볼 수 있다. 본 연구에서는 점증하중에 대한 압밀해석시 유한차분법을 적용하기 위한 정식화를 실시하고 그 결과를 기존의 방법들과 비교하여 다양한 하중조건에 대한 적용 가능성을 확인하고자 하였다.

2. 유한차분 정식화

압밀층에 작용하는 전응력이 시간에 무관할 때 일차원 압밀이론식은 식 (1)과 같이 유도된다.

*Corresponding Author : Seung-Hyun Lee

Tel : +82-10-7278-1080 e-mail : shlee02@sunmoon.ac.kr

접수일 12년 01월 09일

수정일 12년 02월 07일

게재확정일 12년 04월 12일

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1)$$

식 (1)에서 c_v 는 압밀계수를 의미하고 z 는 압밀층 상단으로부터의 깊이, t 는 압밀소요시간 그리고 u 는 압밀층에서의 과잉간극수압을 나타내는데 식 (1)로부터 u 는 깊이 z 와 시간 t 의 함수임을 알 수 있다. 일차원 압밀이론에 있어 유한차분법은 깊이-시간 격자에 근거하는데 압밀층의 두께는 m 개의 동일한 요소 두께 Δz 로 구성되고 고려하고자 하는 시간은 n 개의 동일한 시간간격 Δt 로 구성된다. 격자내의 임의의 점은 아래첨자 i, j 로 규정되는데 임의의 깊이에 대하여 임의의 시간이 경과된 후의 과잉간극수압은 $u_{i,j}$ 로 표시된다. 식 (1)의 좌변을 전진차분(Forward difference)형태[2]로 나타내고 우변을 중앙차분형태(Central difference)로 나타낸 다음 정리하면 유한차분식 (2)를 얻을 수 있다.

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \frac{c_v \Delta t}{(\Delta z)^2} (u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - 2u_{i,j}) \quad (2)$$

편의상 식 (2)에 대하여 연산자(operator)로서 β 를 도입하여 식 (3)과 같이 정의한다.

$$\beta = \frac{c_v \Delta t}{(\Delta z)^2} \quad (3)$$

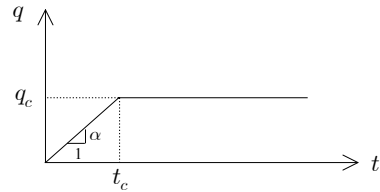
해의 수렴을 위해서는 연산자 β 값이 0.5를 초과하지 않아야함이 증명된 바 있다[1]. 불투수 경계면에 대해서는 경계조건 $\partial u / \partial z = 0$ 가 만족되어야 하는데 이를 위해 불투수층 내부에서의 $u_{i+1,j}$ 가 $u_{i-1,j}$ 의 거울 이미지(mirror image)가 되도록 고려하여 물의 흐름이 일어나지 않도록 하게 된다. 따라서 불투수 경계면의 모든 점에 대하여 식 (2)는 식 (4)와 같이 수정된다.

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \frac{c_v \Delta t}{(\Delta z)^2} (2u_{i-1,j} - 2u_{i,j}) \quad (4)$$

이상에서 고려한 유한차분법은 일시하중이 재하되는 경우에 대한 것으로 점증하중에 대해서는 유한차분식의 수정이 필요하다.

3. 점증하중에 대한 유한차분 정식화

그림 1은 점증하중에 따른 시간(t)-하중(q) 사이의 관계를 나타내고 있다.



【그림 1】 점증하중
[Fig. 1] Time dependent loading

점증하중이 작용하는 경우에는 압밀층에 작용하는 전응력이 시간에 따라 변하게 된다. Terzaghi 1차원 압밀이론의 유도과정에서 식 (5)를 얻을 수 있다.

$$c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = - \frac{\partial \sigma'}{\partial t} \quad (5)$$

식 (5)에 나타나 있는 유효응력, σ' 을 시간의 함수인 전응력, σ 로 나타내면 $\sigma' = \sigma - u$ 가 되고 그림 1로부터 점증하중에 대하여 $\sigma = \alpha t$ 이므로 식 (5)는 식 (6)과 같이 쓸 수 있다.

$$c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = - \frac{\partial (\alpha t - u)}{\partial t} = -\alpha + \frac{\partial u}{\partial t} \quad (6)$$

식 (6)을 앞서서와 같이 차분형태로 나타내면 식 (7)과 같다.

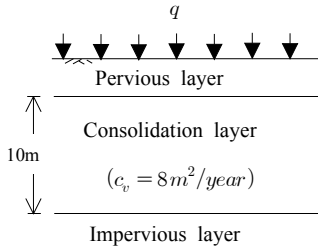
$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \frac{c_v \Delta t}{(\Delta z)^2} (u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - 2u_{i,j}) + \alpha \Delta t \quad (7)$$

불투수 경계면에 대하여 식 (7)은 식 (8)과 같다.

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \frac{c_v \Delta t}{(\Delta z)^2} (2u_{i-1,j} - 2u_{i,j}) + \alpha \Delta t \quad (8)$$

4. 점증하중에 대한 압밀거동

점증하중이 작용하는 경우에 대한 압밀거동을 살펴보고자 지반조건 및 하중조건을 가정하고 유한차분법에 의해 압밀거동을 분석하고 그 결과를 Terzaghi 방법, Olsen 방법에 의한 결과와 상호비교분석하였다. 해석에 고려한 지반조건은 그림 2와 같다.



[그림 2] 해석 지반조건

[Fig. 2] Soil condition for analysis

그림 2에 나타난 바와 같이 해석대상지반은 1면배수 상태에 있고 상재하중에 따른 초기 과잉간극수압의 분포는 깊이에 관계없이 일정하다고 가정한다. 점증하중조건은 그림 2를 참조하여 $q_c = 100kPa$ 로 하였으며 $t_c = 1year$ 로 하였다. 압밀층의 압밀계수값(c_v)은 그림 2에 나타나 있는 바와 같이 $8m^2/year$ 이다. 유한차분해석시 깊이간격(Δz)은 2m로 하였고 시간간격(Δt)은 0.1년으로 하였다.

Olsen은 그림 1에 나타난 점증하중에 대하여 이론적 해를 제안한 바 있는데 점증하중 재하단계($T_v \leq T_c$)에서의 깊이에 따른 과잉간극수압의 분포 및 평균압밀도(U)는 각각 식 (9) 및 식 (10)과 같이 표현된다. 시간계수 T_c 는 그림 1에서 t_c 에 대응하는 시간계수를 의미한다.

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2q_c}{M^3 T_c} \sin \frac{Mz}{H} (1 - \exp(-M^2 T_v)) \quad (9)$$

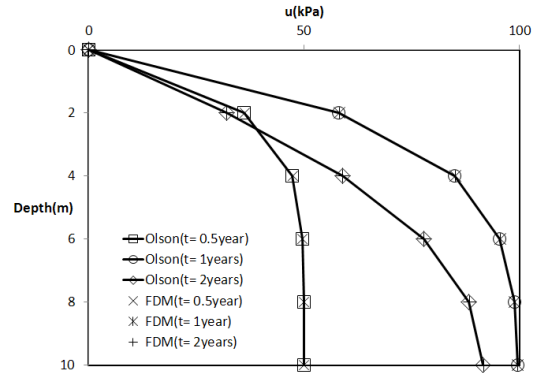
$$U = \frac{T_v}{T_c} \left[1 - \frac{2}{T_v} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{M^4} (1 - \exp(-M^2 T_v)) \right] \quad (10)$$

한편, 일정하중 재하단계($T_v \geq T_c$)에 대하여 깊이에 따른 과잉간극수압분포와 평균압밀도는 식 (11) 및 식 (12)와 같다.

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2q_c}{M^3 T_c} (\exp(M^2 T_c) - 1) \sin \frac{Mz}{H} \exp(-M^2 T_v) \quad (11)$$

$$U = 1 - \frac{2}{T_c} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{M^4} (\exp(M^2 T_c) - 1) \exp(-M^2 T_v) \quad (12)$$

그림 1에 나타난 점증하중에 대하여 시간이 0.5년, 1년 그리고 2년이 경과되었을 때의 깊이별 과잉간극수압을 유한차분법 및 Olsen 방법에 의해 계산해 보았는데 그 결과가 그림 3에 나타나 있다.

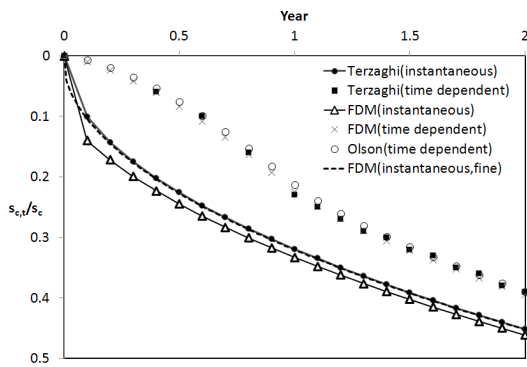


[그림 3] 과잉간극수압 비교(점증하중)

[Fig. 3] Comparison of excess pore water pressure (time dependent)

그림 3을 통해 알 수 있듯이 점증하중 재하기간 0.5년과 재하가 완료되는 시점인 1년 그리고 최대하중이 유지되는 2년에 대하여 유한차분법에 의한 해석결과와 Olsen 방법에 의한 결과가 일치함을 알 수 있다.

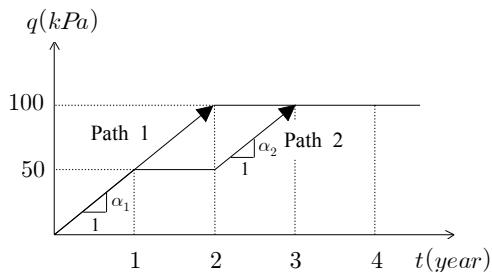
Terzaghi 압밀이론에 따라 평균압밀도는 1차원압밀침하량에 대한 특정 시간에서의 압밀침하량의 비(s_{ct}/s_c)로서 정의할 수 있다. 따라서 시간에 따른 평균압밀도는 압밀침하거동과 같다고 볼 수 있다. 점증하중이 작용하는 경우에 대해 유한차분법을 이용할 경우 점증하중이 작용하는 시간범위($0 \leq t \leq t_c$)에 있어 예측한 과잉간극수압은 최대하중(q_c)이 작용할 때의 과잉간극수압이 아니므로 깊이별 과잉간극수압분포로부터 평균압밀도를 바로 계산할 수는 없다. 이 경우 평균압밀도 계산을 위해 시간별 유효응력을 계산할 필요가 있다. 시간별 유효응력은 특정 시간에 대응하는 전응력, σ_t 에서 유한차분해석을 통해 구한 과잉간극수압을 빼서 구할 수 있다. 시간 별 평균압밀도는 유효응력 분포면적을 총단면적(=압밀층 두께 $\times q_c$)으로 나누어 구할 수 있다. 유한차분법, Terzaghi 방법 그리고 Olsen 방법을 통해 구한 시간-침하곡선은 그림 4와 같다.



[그림 4] 시간-침하곡선
[Fig. 4] Time-settlement curve

그림 4에는 순간하중 재하조건에 대하여 유한차분법을 이용한 시간-침하곡선 두 개와 Terzaghi 방법을 통하여 예측한 시간-침하곡선도 나타나 있다. 순간하중 재하조건에 대해 유한차분법을 통해 구한 두 개의 시간-침하곡선 중 하나는 앞서와 마찬가지로 깊이간격과 시간간격을 각각 2m 및 0.1년으로 하여 구한 것이고 점선으로 표시된 나머지 하나는 깊이간격과 시간간격을 각각 0.5m 및 0.01년으로 하여 구한 것이다. 그림 4를 통해 알 수 있듯이 유한차분법에 있어서 시간격자간격이 0.1년인 경우 유한차분법에 의해 예측된 시간별 침하량이 Terzaghi 방법에 의한 값보다 큼을 알 수 있는데 이는 초기 압밀해석 시 각각의 배수면 절점에서의 급격한 간극수압변화로 인해 침하가 많이 발생하는 것처럼 표현되는 유한차분 해석상의 오류로 판단되며 이러한 차이는 시간격자간격을 작게 함으로써 해결될 수 있음을 알 수 있다. 점증하중 작용 구간에 대해서는 세 가지 방법에 의해 예측된 시간-침하관계가 거의 일치함을 알 수 있다.

다단 점증하중이 작용하는 경우에 대한 압밀해석을 위해 그림 5와 같은 다단 점증하중을 고려하였다.



[그림 5] 다단 점증하중
[Fig. 5] Multi-step time dependent loading

그림 5에 나타난 바와 같이 해석은 두 개의 점증하중 경로에 대해서 수행하였다. 해석을 위한 기본자료는 다음과 같다.

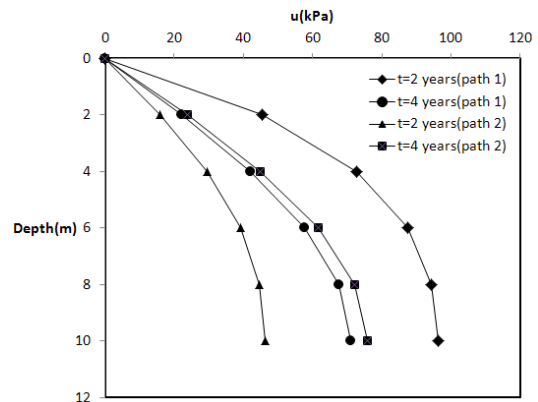
$$c_v = 8m^2/year, t = 4years, T_v = 0.32$$

$$m = 5, n = 20, \beta = 0.4$$

$$\Delta t = 4/20 = 0.2years, \Delta z = 2m$$

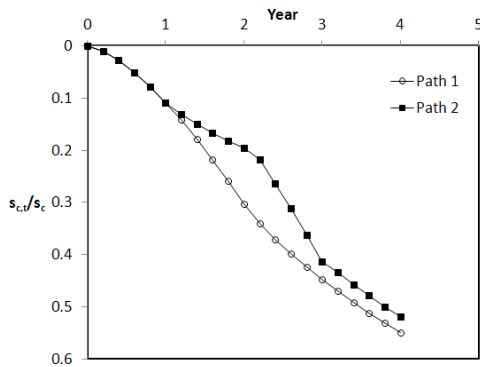
$$\alpha_1 = \alpha_2 = 50$$

해석을 통해 구한, 점증하중 작용 경로별 압밀소요시간에 따른 깊이별 과잉간극수압분포양상은 그림 6과 같다. 그림 6에는 압밀소요시간이 2년 및 4년 경과했을 때의 과잉간극수압분포를 보여주고 있는데 경로 1의 결과에 의하면 2년 후 전응력이 일정값에 도달하므로 압밀층 바닥에서 과잉간극수압의 크기가 100kPa가 된다. 이후 전응력 변화없이 압밀이 진행되므로 시간에 따라 과잉간극수압은 지속적으로 감소하게 된다. 한편, 경로 2에 대한 결과에서 알 수 있듯이 최초 2년에 있어 처음 1년 동안 과잉간극수압이 증가하고 이후 1년 동안 과잉간극수압이 소산하게 된다. 따라서 압밀층 바닥에서의 2년 후의 과잉간극수압은 50보다 작은 값을 갖게 된다. 이후 2년부터 4년까지는 처음 1년동안 전응력이 증가하고 이후 1년 동안 압밀이 진행하게 되어 역시 압밀층 바닥에서 4년이 경과된 후의 과잉간극수압은 100kPa보다 작게 된다.



[그림 6] 과잉간극수압 비교(다단 점증하중)
[Fig. 6] Comparison of excess pore water pressure (multi-step time dependent loading)

그림 7은 그림 5의 하중조건에 대하여 구한 하중-침하곡선을 보여주고 있다.



[그림 7] 다단 점증하중에 대한 시간-침하곡선
[Fig. 7] Time-settlement curve for multi-step time dependent loading

그림 7에는 두 개의 경로에 대한 시간-침하곡선이 나타나 있는데 그림 5의 하중조건을 통해 알 수 있듯이 시간에 따른 경로 2에 의한 침하량이 경로 1에 의한 침하량보다 작게 된다. 1년이 경과할 때까지는 두 개의 경로 모두 같으므로 하중-침하곡선이 일치하게 되고 이후부터 다른 양상을 보임을 알 수 있다. 또한 하중 증가양상이 변하는 시점에 따라 하중-침하곡선의 양상도 변함을 알 수 있는데 이상의 결과로부터 다단계 점증하중에 대해서도 신뢰성 있는 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

5. 결론

지반조건과 하중조건을 가정하고 유한차분법을 적용하여 압밀해석을 실시하고 그 결과를 기존의 이론해와 비교하여 보았다. 본 연구를 통해 얻은 결론은 다음과 같다.

- [1] 순간하중이 작용하는 경우의 압밀해석을 위해 유한차분법을 적용하여 보았는데 과잉간극수압의 분포가 Terzaghi에 의한 이론해와 일치하였다.
- [2] 순간재하하중조건에 대해 유한차분법을 적용하여 시간-침하거동을 예측하고자 할 경우 시간격자간격이 큰 경우 Terzaghi 방법에 의한 값보다 큰 침하가 예측되었으며 이러한 차이는 시간격자간격을 작게 함으로써 해결됨을 알 수 있었다.
- [3] 점증하중에 대한 압밀해석을 위한 유한차분식을 유도하고 압밀해석을 수행해 보았는데 과잉간극수압분포에 있어 해석결과와 Olson의 이론해가 일치하였다.
- [4] 점증하중조건에 대해 유한차분법을 적용하여 예측

한 시간-침하거동은 Terzaghi와 Olson에 의한 방법에 따른 그것과 거의 일치하였다.

- [5] 다단 점증하중에 대한 해석결과를 통해 볼 때 신뢰성 있는 결과를 확인할 수 있었다.
- [6] 점증하중에 따른 압밀해석을 위해 본 연구에서 유도된 유한차분법을 사용하여 다양한 하중조건에 따른 압밀해석이 가능할 것으로 판단된다.

References

- [1] Craig, R. F., Soil Mechanics, Van Nostrand Reinhold Co. Ltd., pp. 280-283, 1983.
- [2] Kreyszig, E., Advanced Engineering Mathematics, John Wiley & Son, Inc., pp. 769-773, 1984.
- [3] Olsen, R. E., Consolidation under Time Dependent Loading, J. Geotech. Eng. Div., ASCE, vol. 103, no. GT1, 1977.
- [4] Terzaghi, K., Theoretical soil mechanics, New York, Wiley, 1943.

이 승 현(Seung-Hyun Lee)

[정회원]



- 1988년 8월 : 서울대학교 토목공학 학과 (공학사)
- 1991년 2월 : 서울대학교 토목공학 학과 (공학석사)
- 1997년 2월 : 서울대학교 토목공학 학과 (공학박사)
- 2000년 3월 ~ 현재 : 선문대학교 토목공학과 부교수

<관심분야>
토질역학, 기초공학