

# 비국소 탄성 이론을 이용한 나노-스케일 판의 강제진동응답

김진규<sup>1</sup>, 한성천<sup>2</sup>, 박원태<sup>3\*</sup>

<sup>1</sup>영남이공대학교 토목과, <sup>2</sup>대원대학교 철도건설과, <sup>3</sup>공주대학교 건설환경공학부

## Dynamic response of nano-scale plates based on nonlocal elasticity theory

Jin-Kyu Kim<sup>1</sup>, Sung-Cheon Han<sup>2</sup> and Weon-Tae Park<sup>3\*</sup>

<sup>1</sup>Department of Civil Engineering, Yeungnam College of Science and Technology

<sup>2</sup>Department of Civil & Railroad Engineering, Daewon University College

<sup>3</sup>Division of Construction and Environmental Engineering, Kongju National University

**요약** 미세 규모 효과를 고려한 비국소 연속체 이론을 이용한 고차전단변형 나노-스케일 판의 동적응답에 대하여 연구하였다. Eringen의 비국소 연속체 이론은 미소 규모 효과를 고려할 수 있고 고차전단변형이론은 나노 판의 두께 방향으로의 전단변형률과 전단응력의 곡선변화 효과를 고려할 수 있다. 비국소 탄성 이론과 고차전단변형이론이 나노-스케일 판의 동적응답에 미치는 비국소 이론의 효과를 제시하였다. 국소 탄성이론과의 관계를 수치해석 결과를 통하여 고찰하였다. 또한 비국소 계수 변화, 형상비, 폭-두께비, 나노-스케일 판의 크기 그리고 하중재하 시간간격 등이 나노-스케일 판의 동적응답 미치는 효과에 대하여 관찰하고 분석하였다. 비국소 변수의 증가는 나노-스케일 판의 주기와 진폭을 증가시켰다. 본 연구의 결과를 검증하기 위해 참고문헌의 결과들과 비교 분석하였다. 본 연구에서 제시한 이론적 발전과 수치결과들은 나노-스케일 구조물의 동적해석에 적용하는 비국소 이론들을 위한 참고자료로 활용될 수 있을 것이다.

**Abstract** This article presents the dynamic response of nano-scale plates using the nonlocal continuum theory and higher-order shear deformation theory. The nonlocal elasticity of Eringen has ability to capture the small scale effects and the higher-order shear deformation theory has ability to capture the quadratic variation of shear strain and consequently shear stress through the plate thickness. The solutions of transient dynamic analysis of nano-scale plate are presented using these theories to illustrate the effect of nonlocal theory on dynamic response of the nano-scale plates. The relations between nonlocal and local theories are discussed by numerical results. Also, the effects of nonlocal parameters, aspect ratio, side-to-thickness ratio, size of nano-scale plate and time step on dynamic response are investigated and discussed. The amplitude and cycle increase when nonlocal parameter increase. In order to validate the present solutions, the reference solutions are used and discussed. The theoretical development as well as numerical solutions presented herein should serve as reference for nonlocal theories as applied to the transient dynamic analysis of nano-scale structures.

**Key Words** : Dynamic response; Nonlocal elasticity theory; Higher-order shear deformation theory; Side-to-thickness ratio; Nano-scale plates.

## 1. 서론

나노 보, 나노 링, 나노 판, 나노 시트, 나노 셸 등을

나노구조물이라고 한다. 미소 스케일 구조들은 전통적인 구조 재료들에 비해 획기적인 역학적, 전기학적, 전자학적 그리고 열 특성들을 가지고 있다. 따라서 나노구조물

“이 논문은 2012학년도 영남이공대학교 연구조성비 지원에 의한 것임”

\*Corresponding Author : Weon-Tae Park (Kongju National University)

Tel: +82-10-9437-5914 email: pwtac@kongju.ac.kr

Received August 27, 2012

Revised October 11, 2012

Accepted January 10, 2013

의 새로운 응용을 짐작할 수 있다. 이러한 응용분야에는 항공공학, 생명공학, 미세전자공학 등의 분야가 있다. 응용분야에서 나노구조물들의 정확한 역학적, 물리학적 특성에 대한 이해와 성능과 신뢰도에 미치는 영향에 대한 이해가 반드시 필요하다. 특히 소재기술 분야의 복합재료의 물성향상, 소재기술 분야의 나노기능소자 구조개선, 환경/생명분야의 생체기능소자 개발 등의 분야는 역학적으로 매우 중요한 분야라고 할 수 있다.

나노구조물의 해석분야에서 미소 규모 효과 및 원자간 힘들의 고려가 반드시 필요하다. 미소 규모 효과를 고려하기 위해 연속체 역학의 개념이 방대한 시스템의 해석에 적용되었다. 이러한 연속체 역학 이론 중에 미소 규모 효과를 포함하며 잘 알려진 방법 중의 하나가 Eringen[1-2]의 미국소 탄성 이론이다. 기존의 고전적 연속체 역학 이론들과 비교하여 Eringen[1-2]의 미국소 탄성 이론은 수많은 방정식을 풀지 않고 나노 구조물의 거동을 정확하게 예측할 수 있다. Eringen[3]의 미국소 탄성 이론은 한 점의 응력이 연속체에서 모든 이웃점들의 변형률장의 함수로 고려된다. 원자간 힘들과 원자의 길이가 직접적으로 적합조건식에 재료적 특성으로 대입된다. 그러므로 앞으로 미국소 연속체 역학 개념이 나노구조물의 해석에 유용한 역할을 할 것으로 판단된다.

나노구조물의 역학적 연구가 Pradhan과 Murmu [4], Babaei와 Shahidi[5] 그리고 Narendar 등[6] 등에 의해 수행되었다. 이러한 연구들은 고전적 판 이론 혹은 1차 전단변형 이론을 적용하였다. 이원홍 등[7]은 점진기능재료(FGM)의 처짐에 관하여 1차원 전단변형을 고려한 해석적 결과를 제시하였다. 2차원 나노 판의 정확한 응력장을 해석하기 위하여 고차전단변형이론(Reddy와 Khdeir, [8])의 적용이 필요하다. 전단변형률과 전단응력은 판의 두께 방향을 따라 곡선 분포 하는 것으로 표현하고 판의 상면과 하면에서 0으로 적용한 고차전단변형이론은 전단보정 계수가 필요하지 않게 되었다. 고차전단변형이론에 의한 결과는 3차원 탄성해석에 수렴된 결과를 나타낸다. 따라서 미소 규모 효과를 포함하는 나노-스케일 판의 엄밀 해석을 위해 고차전단변형이론의 적용이 필요하다.

나노-스케일 판을 포함한 모든 구조물은 사용하중 상태에서 동적하중을 받게 된다. 그러므로 구조물의 동적응답을 평가하는 것은 반드시 필요하다고 할 수 있다. 그러나 동적하중을 고려한 나노-스케일 판의 동적응답에 대한 연구는 전무한 실정이다. 적층복합판의 강제진동해석은 Reddy[9]에 의해 수행되었고 Lee와 Han[10]은 적층복합판의 자유 및 강제진동해석을 수행하였다.

본 연구에서는 미국소 탄성 이론을 이용하여 고차전단 변형이 고려된 나노-스케일 판의 동적응답에 관한 연구

를 수행하고자 한다.

## 2. 미국소 탄성 이론

### 2.1 미국소 탄성 이론

탄성 연속체의 한 점  $x$ 에서의 응력장은 그 점에서의 변형률 장애만 관련 있는 것이 아니고 연속체의 다른 모든 점들에 관련 있는 것이다(Eringen, [3]). Eringen[3]은 식(1)과 같은 미국소 응력 텐서를 제안하였다.

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \int_V K(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|, \tau) t_{ij}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad (1)$$

여기서  $t_{ij}(\mathbf{x})$ 는 고전적 응력텐서의 성분이고 커널 함수  $K(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|, \tau)$ 는 미국소 탄성계수를 나타내며,  $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ 는 유클리디안 놈으로 거리가 되고  $\tau$ 는 재료 상수이다. 일반적인 후크의 법칙에서 응력  $\mathbf{t}$ 는 식(2)와 같다.

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \text{ or } t_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (2)$$

여기서  $\mathbf{C}$ 는 4차 탄성 텐서이다.

미국소 탄성 이론에서 운동방정식은 미국소 균형 법칙으로부터 식(3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (3)$$

여기서  $i, j$ 는  $x, y, z$ 으로 표현되고  $f_i, \rho$  그리고  $u_i$ 는 체적력, 밀도 그리고 변위 벡터를 의미한다. 식(1)을 식(3)에 대입하면 적분형태의 미국소 적합 조건식을 얻을 수 있다. 하지만 적분 형태의 방정식은 미분 방정식에 비해 해를 구하기 어렵다. Eringen[3]은 미국소 적합 조건식을 식(4)와 같이 미분 형태로 제안하였다.

$$t_{ij,j} + \mathcal{L}(f_i - \rho \ddot{u}_i) = 0, \quad (4)$$

여기서 선형 미분 연산자  $\mathcal{L}$ 은 식(5)로 정의된다.

$$\mathcal{L} = 1 - \mu \nabla^2, \quad \mu = e_0^2 \bar{a}^2, \quad (5)$$

여기서  $\mu$ 는 미국소 변수,  $e_0$ 는 실험으로 정해지는 무차원 재료 상수이고  $\bar{a}$ 는 내적 특성 길이이다.

식(5)의 연산자를 식(1)에 적용하면 적합 조건식이 식(6)과 같이 간단해진다.

$$\mathcal{L}(\sigma_{ij}) = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (6)$$

식(6)은 적분 관계식인 식(1)에 비해 선형 탄성 문제들의 적용에서 더 간단하고 편리하다.

### 2.2 비국소 탄성 판

식(2)와 식(6)을 이용하여 응력 관계식은 비국소 이론을 위한 변형률 항들로 재정리할 수 있다. 평면응력 가정에 기초한 판 이론에서  $\sigma_{zz} = 0$ 이 되고 2차원 문제로 해석된다.  $(x, y, z)$  좌표계에서  $xy$ -면은 판의 중립면이다. 따라서 평면응력 상태에서의 응력-변형률 관계식은 식(7)과 같다.

$$t_{\alpha\beta} = \bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta}, \quad (7)$$

여기서  $\bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta} - C_{\alpha\beta zz} C_{zz\gamma\delta} / C_{zzzz}$  이다.

그리고 수직 전단응력-변형률 관계는 식(8)과 같다.

$$t_{\alpha z} = 2\bar{C}_{\alpha z\gamma z} \varepsilon_{\gamma z}, \quad (8)$$

여기서  $\alpha, \beta, \gamma$  그리고  $\delta$  는  $x, y$  로 표현된다.

국소 이론과 비국소 이론에서 면내력들의 관계는 식(6)을 판의 두께방향으로 적분하여 식(9)와 같이 얻을 수 있다.

$$\mathcal{L}(N_{ij}) = N_{ij}^L, \quad \mathcal{L}(M_{ij}) = M_{ij}^L, \quad \mathcal{L}(P_{ij}) = P_{ij}^L, \quad (9)$$

여기서

$$\begin{Bmatrix} N_{\alpha\beta}, N_{\alpha\beta}^L \\ M_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}^L \\ P_{\alpha\beta}, P_{\alpha\beta}^L \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \{ \sigma_{\alpha\beta}, t_{\alpha\beta} \} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} dz, \quad (10)$$

$$\begin{Bmatrix} N_{\alpha z}, N_{\alpha z}^L \\ R_{\alpha z}, R_{\alpha z}^L \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \{ \sigma_{\alpha z}, t_{\alpha z} \} \begin{Bmatrix} 1 \\ z^2 \end{Bmatrix} dz. \quad (11)$$

윗첨자  $L$ 은 국소 3차 전단변형 이론을 나타내고  $h$  판의 두께이다. 비국소 이론에서 판의 평형방정식은 식(3)을 두께방향으로 적분하여 식(12)와 같이 나타낼 수 있다.

$$N_{i\alpha,\alpha} + F_i = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \ddot{u}_i dz, \quad (12)$$

여기서  $F_i = \int_{-h/2}^{h/2} q_i dz$  이다. 식(3)에  $z$ 를 곱하고 두께 방향으로 적분하고 부분적분법을 사용하면 식(13)을 얻을 수 있다.

$$M_{\alpha\beta,\beta} - N_{\alpha z} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \ddot{u}_\alpha z dz. \quad (13)$$

비슷한 방법으로 식(3)에  $z$ 의 고차항을 곱하고 적분하면 고차 면내력에 관한 식(14)를 얻을 수 있다.

$$P_{\alpha\beta,\beta} - 3R_{\alpha z} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \ddot{u}_\alpha z^3 dz. \quad (14)$$

일반적으로 식(5)의 미분 연산자  $\nabla$ 는 3차원 라플라스 연산자이다. 2차원 문제를 해석하기 위해 라플라스 연산자  $\nabla$ 는 2차원으로 감차할 수 있다. 2차원 선형 미분 연산자  $\bar{\mathcal{L}}$ 는 식(15)와 같다.

$$\bar{\mathcal{L}} = 1 - \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right). \quad (15)$$

미분 연산자  $\bar{\mathcal{L}}$ 는  $z$ 방향에 대해 독립적이다.

### 2.3 비국소 3차원 전단변형 이론

3차 전단변형 이론은 1차 전단변형 이론에서 판의 두께전체에서 상수로 가정된 전단변형률과 전단응력을 상수가 아닌 일반적인 곡선분포로 가정하여 확장한 것이다 (Reddy, [8]). 판의 3차 전단변형 이론에서 변위장은 식(16)와 같다.

$$u_\alpha = u_\alpha^0 + z\phi_\alpha - c_1 z^3 (\phi_\alpha + w_\alpha^0), \quad u_z = w^0, \quad (16)$$

여기서  $u_\alpha$ 는 중립면( $z=0$ )의 한 점에서의 면내 변위들이고,  $c_1 = 4/3h^2$ ,  $u_z$ 는 판의 중립면에서 수직방향 변위이다. 그리고  $\phi_\alpha$ 는 중립면에서 전단변형각이다.

3차원 전단변형 이론을 고려한 변위장을 식(12)-(14)에 대입하면 식(17)-(19)와 같다.

$$N_{i\alpha,\alpha} + F_i = I_0 \ddot{u}_i^0, \quad (17)$$

$$M_{\alpha\beta,\beta} - N_{\alpha z} = I_2 \ddot{\phi}_\alpha - c_1 I_4 (\ddot{\phi}_\alpha + \ddot{w}_\alpha^0), \quad (18)$$

$$P_{\alpha\beta,\beta} - 3R_{\alpha z} = I_4 \ddot{\phi}_\alpha - c_1 I_6 (\ddot{\phi}_\alpha + \ddot{w}_{,\alpha}^0). \quad (19)$$

이때  $i = z$ 일 때의 식(17)과 식(18)은 비국소 3차원 전단변형 이론의 급힘 응답을 위한 평형방정식을 유도하기 위해 식(19)와 조합할 수 있다.

$$\begin{aligned} & N_{\alpha z,\alpha} - c_2 R_{\alpha z,\alpha} + q_z + c_1 P_{\alpha\beta,\alpha\beta} \\ &= I_0 \ddot{w}^0 + c_1 [I_4 \ddot{\phi}_{\alpha,\alpha} - c_1 I_6 (\ddot{\phi}_{\alpha,\alpha} + \ddot{w}_{,\alpha\alpha}^0)], \quad (20) \\ & M_{\alpha\beta,\beta} - c_1 P_{\alpha\beta,\beta} - N_{\alpha z} + c_2 R_{\alpha z} \\ &= I_2 \ddot{\phi}_\alpha - c_1 I_4 (\ddot{\phi}_\alpha + \ddot{w}_{,\alpha}^0) - c_1 [I_4 \ddot{\phi}_\alpha - c_1 I_6 (\ddot{\phi}_\alpha + \ddot{w}_{,\alpha}^0)], \quad (21) \end{aligned}$$

여기서  $I_k = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z)^k dz$  ( $k = 0, 2, 4, 6$ ),  $c_2 = 3c_1$ 이다.

## 2.4 비국소 탄성 평형방정식

Hamilton[9]의 가상변위의 원리에서 3차원 비국소 판 이론에 의한 동적 평형방정식을 식(22)와 같이 구할 수 있다.

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt. \quad (22)$$

식(22)에 비국소 면내력을 대입하고 부분적분하면 식(23)-(27)과 같은 동적 평형방정식을 얻을 수 있다.

$$\delta u_x : N_{xx,x} + N_{xy,y} - \overline{\mathcal{L}} (I_0 \ddot{u}_x^0) = 0, \quad (23)$$

$$\delta u_y : N_{xy,x} + N_{yy,y} - \overline{\mathcal{L}} (I_0 \ddot{u}_y^0) = 0, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \delta w^0 : & N_{zx,x} + N_{zy,y} - c_2 (R_{zx,x} + R_{zy,y}) \\ & + c_1 (P_{xx,xx} + P_{yy,yy} + 2P_{xy,xy}) - \overline{\mathcal{L}} [q_z - I_0 \ddot{w}^0 \\ & - c_1 I_4 (\ddot{\phi}_{x,x} + \ddot{\phi}_{y,y}) - c_1^2 I_6 (\ddot{\phi}_{x,x} + \ddot{\phi}_{y,y} + \ddot{w}_{,xx}^0 + \ddot{w}_{,yy}^0)] \\ & = 0, \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \phi_x : & M_{xx,x} + M_{xy,y} - c_1 (P_{xx,x} + P_{xy,y}) N_{zx} + c_2 R_{zx} \\ & - \overline{\mathcal{L}} [I_2 \ddot{\phi}_x - c_1 I_4 (\ddot{\phi}_x + \ddot{w}_{,x}^0) \\ & - c_1 (I_4 \ddot{\phi}_x - c_1 I_6 (\ddot{\phi}_x + \ddot{w}_{,x}^0))] = 0, \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \phi_y : & M_{xy,x} + M_{yy,y} - c_1 (P_{xy,x} + P_{yy,y}) N_{zy} + c_2 R_{zy} \\ & - \overline{\mathcal{L}} [I_2 \ddot{\phi}_y - c_1 I_4 (\ddot{\phi}_y + \ddot{w}_{,y}^0) \\ & - c_1 (I_4 \ddot{\phi}_y - c_1 I_6 (\ddot{\phi}_y + \ddot{w}_{,y}^0))] = 0. \quad (27) \end{aligned}$$

## 2.5 Navier 해법

나노 판의 처짐에서 미소 규모 효과를 연구하기 위해 비국소 3차원 전단변형이론을 이용한 단순지지 판의 휨 해석 결과를 제시하였다. 4변이 단순지지된 경우에 Navier방법으로 해석결과를 구할 수 있다. Navier해법에서 판의 중립면에서의 변위는 이중 푸리에 급수로 식(28)과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} u_x^0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} A_1, & u_y^0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} A_2, \\ w^0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} A_3, & \phi_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} A_1, \\ \phi_y &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} A_2, & q_z &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} A_3, \quad (28) \end{aligned}$$

여기서  $A_1 = \cos \xi x \sin \eta y \cdot e^{i\omega_{mn}t}$ ,

$A_2 = \sin \xi x \cos y \cdot e^{i\omega_{mn}t}$ ,  $A_3 = \sin \xi x \sin \eta y \cdot e^{i\omega_{mn}t}$

그리고  $\xi = m\pi/a$ ,  $\eta = n\pi/b$ ,  $\omega_{mn}$ 은 고유진동수이다.

사인하중의 적용을 위해  $m = n = 1$ 을 적용하였다.

## 2.5 강제진동 해석

나노-스케일 판의 강제진동해석을 위하여 식(23)-(27)에 식(28)을 대입하고 행렬형태로 정리하면 동적 평형방정식 식(29)를 구할 수 있다.

$$[\mathbf{K}]\{\Delta\} + [\mathbf{M}]\{\ddot{\Delta}\} = \{\mathbf{F}\}. \quad (29)$$

여기서  $\{\Delta\} = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, Y_{mn}\}$ ,  $\{\mathbf{F}\}$ 는 하중벡터,  $[\mathbf{K}]$ 는 강성행렬 그리고  $[\mathbf{M}]$ 은 질량행렬이다. 식(29)의 해석을 위하여 Newmark- $\beta$  방법을 사용하였고 감쇄효과는 무시하였다.

## 3. 해석 결과

### 3.1 해석결과 검증

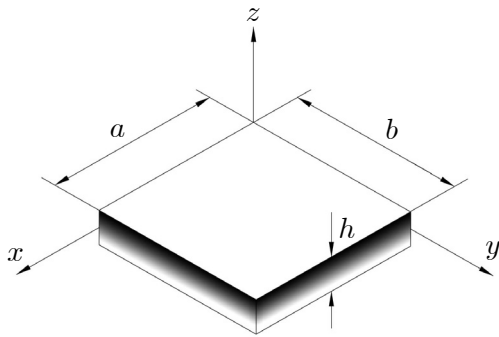
본 해석 기법의 성능을 검증하기 위하여 적층복합판의 해석결과를 참고문헌[9]의 결과와 비교하였다. 적층복합판의 재료 및 기하학적 성질은 식(30) 그리고 Fig. 1과 같다.

$$a = b = 25 \text{ cm}, \Delta t = 5 \mu\text{s}, \rho = 8 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{s}^2/\text{cm}^4,$$

$$\begin{aligned}
 E_1 &= 25 E_2, E_2 = 2.1 \times 10^6 \text{ N/cm}^2, G_{23} = 0.2 E_2, \\
 G_{12} &= G_{13} = 0.5 E_2, \nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{13} = 0.25, \\
 q_0 &= 10 \text{ N/cm}^2.
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

나노-스케일 판의 중앙점 처짐을 무차원화 하여 나타내었다. 처짐의 무차원 값은 식(31)을 사용하여 나타내었다.

$$\bar{w} = w \times \frac{E_2 h^3}{q_2 b^4} \times 10^2
 \tag{31}$$



[Fig. 1] Geometry of nano-scale plate

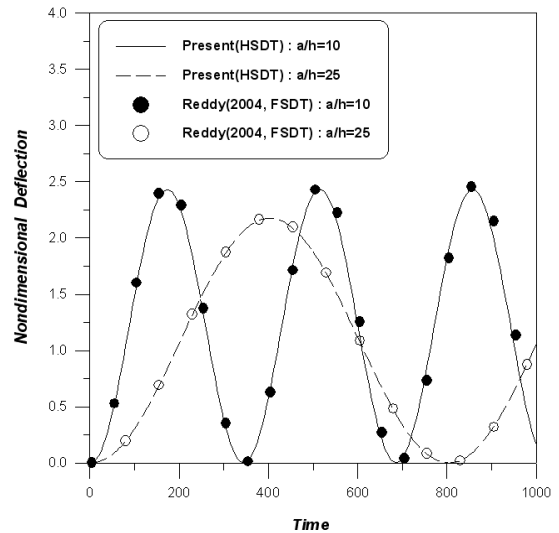
참고문헌[9]의 결과와 비교하기 위하여 1차 전단변형(FSDT)을 고려한 결과도 제시하였다. Table 1에서 알 수 있듯이 본 연구에서 유도된 정식은 이중 푸리에 급수를 이용한 해석적인 방법이므로 Reddy[9]의 CFS(Closed Form Solutions) 결과와 정확하게 일치하였다. Reddy[9]는 고차전단변형을 고려한 결과를 제시하지 않았기 때문에 본 연구에서 제시한 결과와 직접 비교는 불가능하였다. 따라서 본 연구의 결과가 향후 연구자들의 결과분석을 위한 기초자료가 될 수 있을 것으로 판단된다.

일반적으로 고차전단변형을 고려한 경우의 처짐이 1차 전단변형을 고려한 경우의 처짐보다 크게 나타난다. 하지만 Table 1에서 고차전단변형을 고려한 경우의 처짐이 더 작게 나타난 것은 2층으로 적층된 역대칭 구조에서 원인을 찾을 수 있다. 역대칭 구조의 경우 적층판의 수가 6개 이상으로 증가하게 되면 휨-신장 복합거동에 의한 효과가 거의 없어지게 된다. 그러나 위 예제의 경우처럼 2층(0/90)으로 적층된 적층복합판의 경우에는 휨-신장 복합효과가 존재하여 고차전단변형을 고려한 경우에 더 작은 처짐이 발생한다.

[Table 1] Dynamic response of laminated composite plate(0/90) under suddenly applied sinusoidal load ( $a/h = 5$ )

Time ( $\mu\text{s}$ )	Reddy FSDT[9]	본 연구 FSDT	본 연구 HSDT
10	0.0514	0.0514	0.0513
20	0.2486	0.2486	0.2482
40	1.0152	1.0152	1.0082
60	2.0523	2.0523	2.0208
80	2.9782	2.9782	2.8950
100	3.4784	3.4784	3.3169
120	3.3620	3.3620	3.1179
140	2.6836	2.6836	2.3823
160	1.6705	1.6705	1.3758
180	0.6952	0.6952	0.4813
200	0.0902	0.0902	0.0264

Fig. 2에서는 적층복합판의 두께변화와 시간의 흐름에 따른 동적응답을 비교하였다. 고차전단변형을 고려한 본 연구의 결과와 1차 전단변형을 고려한 Reddy[9]의 결과를 비교하였다.



[Fig. 2] Dynamic response of laminated composite plate(0/90) under suddenly applied sinusoidal load ( $a/h = 10, 25$ )

적층복합판의 폭-두께비가 증가할수록 고차전단변형에 의한 결과와 1차 전단변형에 의한 결과의 차이가 줄어들어 두 해석에 의한 동적응답은 매우 유사한 결과를 나타내었다. 이러한 현상은 폭-두께비가 증가하면 전단변형에 의한 효과가 작아지고 순수 휨을 받는 얇은 판의 형태에 가까워지기 때문으로 판단된다.

### 3.2 나노-스케일 판의 동적응답

나노-스케일 판의 동적응답을 분석하기 위하여 재료특성은 Table 2로 가정하였다.

[Table 2] Material and Geometry properties of isotropic nano-scale plate

$E$	$\nu$	$a=b$	$\rho$	$q_z$
$30 \times 10^6$	0.3	10	$5.0 \times 10^{-6}$	10.0

나노 스케일 판에서 비국소 변수의 범위는 Wang과 Wang[11]에 제시된 범위를 사용하였다. Wang과 Wang[11]은 탄소 나노 튜브에서 식(5)의  $e_0 \bar{a}$ 가 2nm보다 작은 범위에 있어야 한다고 제시 하였다. 따라서 본 연구에서 사용하는 비국소 변수의 범위는 0에서 4로 가정하였다.

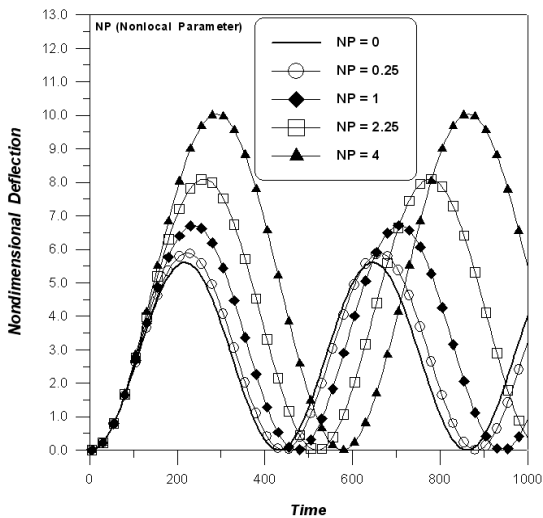
나노구조물에 가해지는 스텝 하중은 식(32)와 같이 표현된다.

$$q(x,y,t) = q_z F(t) \tag{32}$$

여기서,  $F(t)$ 는 식(33)과 같다.

$$F(t) = \{1, 0 \leq t\} \tag{33}$$

비국소 변수의 변화에 따른 스텝 하중을 받는 나노-스케일 판의 동적응답을 Fig. 3에 나타내었다. 하중재하 시간간격은  $\Delta t = 5 \mu s$ 로 가정하였고 나노-스케일 판의 크기는 양변 모두 10으로 가정하였다.

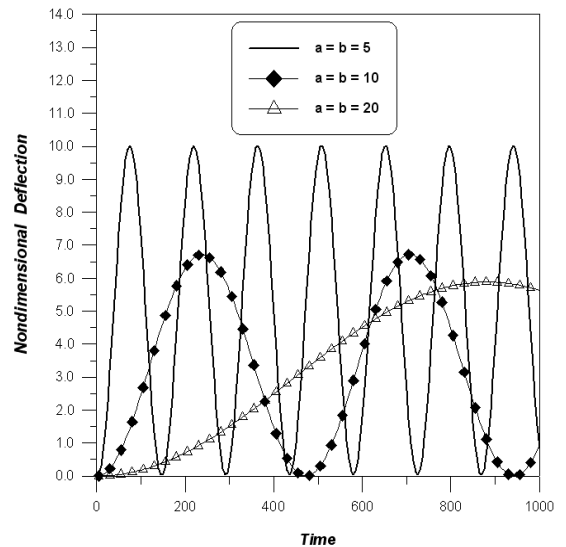


[Fig. 3] Dynamic response of nano-scale plate under suddenly applied step load ( $a/h = 100$ )

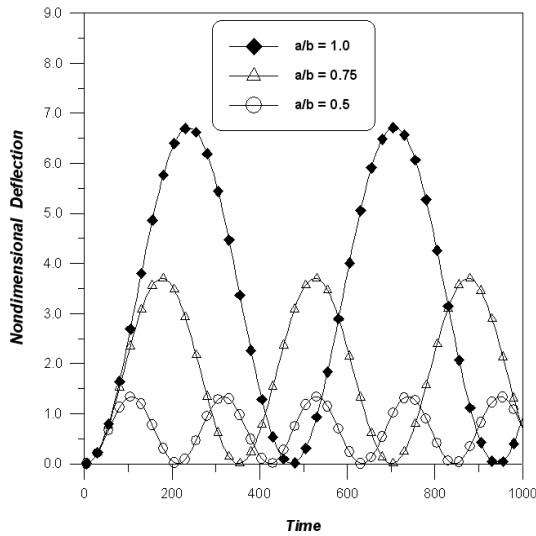
비국소 변수는 0에서부터 4까지 변화시키면서 나노-스케일 판의 동적응답을 나타내었고 하중재하 시간은  $1000 \mu s$ 까지 해석 하였다. 비국소 변수가 증가할수록 동적응답의 진폭과 주기가 커지는 것을 알 수 있었다. Fig. 3에서 비국소 탄성이론에 의한 나노-스케일 판의 강성은 국소 탄성이론에 비해 작아지고 이로 인해 큰 진폭과 주기를 가짐을 알 수 있었다.

Fig. 4에는 나노-스케일 판의 크기 변화에 따른 동적응답을 나타내었다. 비국소 변수는 1로 가정하였다. 판의 크기는 5에서부터 20까지 변화시켰다. 나노-스케일 판의 크기가 커질수록 동적응답의 진폭과 주기가 작아짐을 알 수 있었다.

나노-스케일 판의 형상비 변화에 따른 동적응답을 Fig. 5에 나타내었다. 비국소 변수는 1로 가정하였다. 형상비는 0.5, 0.75, 1.0인 경우에 대하여 나타내었다. 형상비가 작아질수록 동적응답의 진폭과 주기가 작아졌다. 형상비가 1에서 0.75로 변할 때 최대 처짐은 45% 감소하였고 형상비가 0.75에서 0.5로 변할 때 64%가 감소하였다.

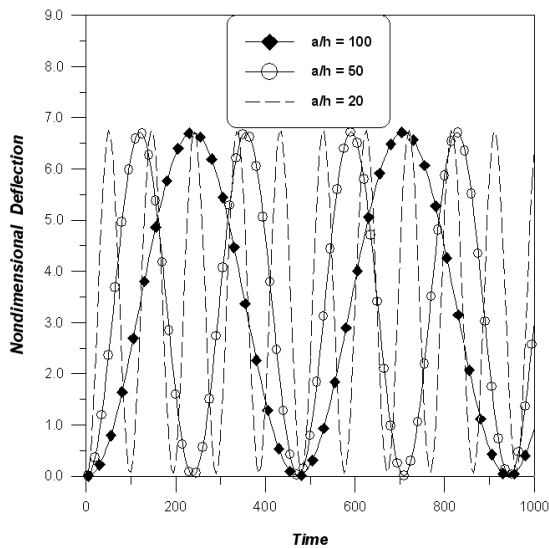


[Fig. 4] Dynamic response of nano-scale plate under suddenly applied step load with variable size ( $\mu = 1.0$ )



[Fig. 5] Dynamic response of nano-scale plate under suddenly applied step load with variable aspect ratio ( $\mu = 1.0$ )

Fig. 6에는 비국소 변수가 1일 때 나노-스케일 판의 폭-두께비 변화에 따른 동적응답을 나타내었다.

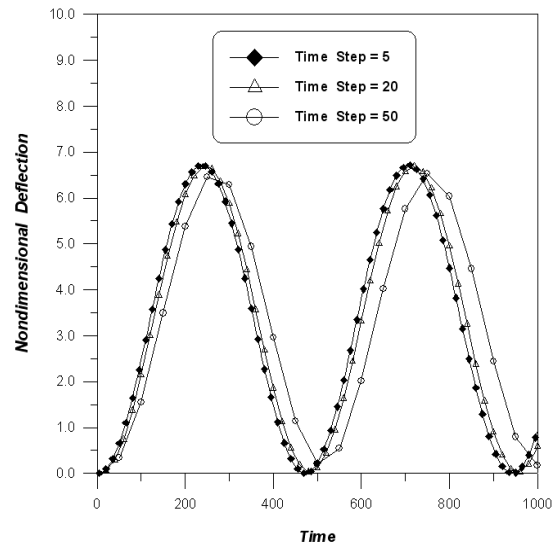


[Fig. 5] Dynamic response of nano-scale plate under suddenly applied step load with variable side-to-thickness ratio ( $\mu = 1.0$ )

일반적으로 등방성 판이나 적층복합판의 경우에 폭-두께비가 20이상이면 전단변형에 의한 효과는 매우 작아지게 된다. 마찬가지로 나노-스케일 판의 경우에도 폭-두께비가 20이상인 경우에 최대 처짐의 차이가 거의 없음을

Fig. 6에서 알 수 있다. 동적응답의 진폭 차이는 거의 없었지만 주기는 폭-두께비가 감소할수록 증가하였다. 특히 폭-두께비가 50인 경우의 주기는 폭-두께비가 100인 경우의 2배가 되는 것을 알 수 있다. 이러한 현상은 나노-스케일 판의 두께가 2배로 증가하였기 때문으로 판단된다.

하중재하 시간간격의 변화에 따른 나노-스케일 판의 동적응답을 Fig. 7에 나타내었다. 비국소 변수가 1이고 폭-두께비( $a/h = 100$ )일 때의 동적응답을 나타내었다. 하중재하 시간간격은 3가지 경우( $\Delta t = 5\mu s, 20\mu s, 50\mu s$ )를 고려하였다.



[Fig. 7] Dynamic response of nano-scale plate under suddenly applied step load with three different time steps ( $\mu = 1.0, a/h = 100$ )

하중재하 시간간격의 증가는 진폭을 감소시켰고 주기는 증가시켰다. 하중재하 시간간격이  $\Delta t = 10\mu s$  이하인 경우에는 진폭과 주기의 차이가 발생하지 않았다.  $\Delta t = 50\mu s$  인 경우와  $\Delta t = 5\mu s$  인 경우의 최대처짐이 약 3% 정도의 차이를 보였다. 정확한 동적응답을 얻기 위해서는 하중재하 시간간격의 적절한 선택이 필요할 것으로 판단된다.

#### 4. 결 론

Eringen의 비국소 탄성 이론을 이용하여 나노-스케일 판의 동적응답을 연구하였다. 고차전단변형이론을 적용하여 나노-스케일 판의 두께방향으로의 곡선 분포된 전

단변형을 및 전단응력을 고려하였다. 미국소 탄성이론을 적용한 나노-스케일 판의 동적 최대응답은 국소 탄성이론을 적용한 경우보다 항상 큰 값을 나타내었으며 몇 가지 결론을 도출할 수 있었다.

- (1) 미국소 변수가 증가할수록 동적응답의 진폭과 주기가 커지며 미국소 탄성이론에 의한 나노-스케일 판의 강성은 국소 탄성이론에 비해 작아지고 이로 인해 큰 진폭과 주기를 가진다고 판단된다.
- (2) 나노-스케일 판의 크기는 동적응답의 진폭과 주기에 반비례하였으며 형상비가 1에서 0.75로 변할 때 최대 처짐은 45% 감소하였고 형상비가 0.75에서 0.5로 변할 때 64%가 감소하였다.
- (3) 나노-스케일 판의 경우에도 폭-두께비가 20이상인 경우에 전단변형 효과의 감소로 인해 최대 처짐의 차이가 거의 없음을 알 수 있었고 동적응답의 진폭 차이는 거의 없었지만 주기는 폭-두께비가 감소할수록 증가하였다.
- (4) 하중재하 시간간격이 증가되면 진폭이 감소되고 주기가 증가된다. 정확한 동적응답을 위해 하중재하 시간간격의 적절한 선택이 필요하다.

기존의 연구 자료가 매우 부족한 나노-스케일 판의 동적응답에서 미국소 연속체 개념이 정확한 해석 자료를 제공하는 유용한 수단이 될 수 있으며 이러한 자료들은 향후 나노-스케일 판의 동적응답을 연구하는 연구자들을 위한 참고자료가 될 수 있을 것으로 판단된다.

## References

- [1] A. C. Eringen, "Nonlocal polar elastic continua", Int. J. Eng. Sci., Vol. 10, pp. 1-6, 1972.  
DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0020-7225\(72\)90070-5](http://dx.doi.org/10.1016/0020-7225(72)90070-5)
- [2] A. C. Eringen, "On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves", J. Appl. Phys., Vol. 54, pp. 4703-4710, 1983.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.1063/1.332803>
- [3] A. C. Eringen, Nonlocal Continuum Field Theories, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [4] S. C. Pradhan, T. Murmu, "Small scale effect on the buckling analysis of single-layered graphene sheet embedded in an elastic medium based on nonlocal plate theory", Physica E, Vol. 42, pp.1293-1301, 2010.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physe.2009.10.053>
- [5] B. Babaei, A. R. Shahidi, "Small-scale effects on the

buckling of quadrilateral nanoplates based on nonlocal elasticity theory using the Galerkin method", Arch. Appl. Mech., Vol. 81, pp.1051-1062, 2011.

DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00419-010-0469-9>

- [6] S. Narendar, D. R. Mahapatra, S. Gopalakrishnan, "Prediction of nonlocal scaling parameter for armchair and zigzag single-walled carbon nanotubes based on molecular structural mechanics, nonlocal elasticity and wave propagation ", Int. J. Eng. Sci., Vol. 49, pp.509-522, 2011. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijengsci.2011.01.002>
- [7] W. H. Lee, S. C. Han, W. T. Park, "Bending, Vibration and Buckling Analysis of Functionally Graded Material Plates, J. Korea Academia- Industrial cooperation Society, Vol. 9(4), pp.1043- 1049, 2008.
- [8] J. N. Reddy, A. A. Khdeir, "Buckling and vibration of laminated composite plates using various plate theories", AIAA, Vol. 27, pp.1808-1817, 1989.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.2514/3.10338>
- [9] J. N. Reddy, Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells, second Ed, CRC Press, London, 2004.
- [10] W. H. Lee, S. C. Han, "Free and forced vibration analysis of laminated composite plates and shells using a 9-node assumed strain shell element", Computational Mechanics, Vol. 39, pp.41-58, 2006.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00466-005-0007-8>
- [11] Q. Wang, C. M. Wang, "The constitutive relation and small scale parameter of nonlocal continuum mechanics for modelling carbon nanotubes". Nanotechnology, Vol. 18, pp. 075702-075709, 2007.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/0957-4484/18/7/075702>

## 김진규(Jin-Kyu Kim)

[정회원]



- 1991년 2월 : 경북대학교 대학원 토목공학과(공학석사)
- 1995년 2월 : 경북대학교 대학원 토목공학과(공학박사)
- 1995년 9월 ~ 현재 : 영남이공대학교 토목과 정교수

<관심분야>

복합충구조체 해석, 유한요소해석, 교량 및 강구조물의 설계, 구조물의 보수 및 보강



**한 성 천**(Sung-Cheon Han)

[정회원]



- 1991년 2월 : 서울시립대학교 대학원 토목공학과(공학석사)
- 1996년 8월 : 서울시립대학교 대학원 토목공학과(공학박사)
- 1996년 3월 ~ 현재 : 대원대학교 철도건설과 부교수

<관심분야>

선형 및 비선형 구조해석, 유한요소법, 고유치 해석, 복합구조 설계, 나노구조의 해석

---

**박 원 태**(Weon-Tae Park)

[정회원]



- 1983년 2월 : 부산대학교 대학원 토목공학과 (공학석사)
- 1993년 2월 : 서울시립대학교 대학원 토목공학과(공학박사)
- 1995년 3월 ~ 현재 : 공주대학교 건설환경공학부 정교수

<관심분야>

구조공학, 복합재료, 좌굴해석, 비선형 구조해석, 동적 해석, 나노구조의 해석