

비국소 탄성이론을 이용한 S형상 점진기능재료 나노-스케일 판의 이축 좌굴해석

이원홍¹, 한성천^{2*}

¹경남과학기술대학교 토목공학과, ²대원대학교 철도건설과

Biaxial buckling analysis of sigmoid functionally graded material nano-scale plates using the nonlocal elasticity theory

Won-Hong Lee¹ and Sung-Cheon Han^{2*}

¹Department of Civil Engineering, Gyeongsang National University of Science and Technology

²Department of Civil & Railroad Engineering, Daewon University College

요 약 Erigen의 비국소 탄성이론을 이용한 S형상 점진기능재료 나노-스케일 판의 전단변형이론을 정식화하여 평형 방정식을 유도하였다. 비국소 탄성이론은 미소 규모 효과를 고려할 수 있고 S형상함수는 점진기능재료의 정확한 특성 변화를 고려할 수 있다. 4변이 단순지지된 나노-스케일 판의 지배방정식을 풀기 위해 Navier 방법을 사용하였다. 거듭제곱 지수와 비국소 변수의 효과를 나타내기 위한 나노-스케일 판의 해석적 좌굴하중을 제시하였고, 국소 탄성이론과의 관계를 수치해석 결과를 통하여 고찰하였다. 또한 (i) 거듭제곱 지수, (ii) 나노-스케일 판의 크기, (iii) 비국소 계수, (iv) 형상비 그리고 (v) 모드 수 등이 나노-스케일 판의 이축 무차원 좌굴하중에 미치는 효과에 대하여 관찰하였다. 본 연구의 결과를 검증하기 위해 참고문헌의 결과들과 비교 분석하였다.

Abstract The sigmoid functionally graded material(S-FGM) theory is reformulated using the nonlocal elasticity of Erigen. The equation of equilibrium of the nonlocal elasticity are derived. This theory has ability to capture the both small scale effects and sigmoid function in terms of the volume fraction of the constituents for material properties through the plate thickness. Navier's method has been used to solve the governing equations for all edges simply supported boundary conditions. Numerical solutions of biaxial buckling of nano-scale plates are presented using this theory to illustrate the effects of nonlocal theory and power law index of sigmoid function on buckling load. The relations between nonlocal and local theories are discussed by numerical results. Further, effects of (i) power law index, (ii) length, (iii) nonlocal parameter, (iv) aspect ratio and (v) mode number on nondimensional biaxial buckling load are studied. To validate the present solutions, the reference solutions are discussed.

Key Words : Nonlocal elasticity theory, Biaxial buckling analysis, Sigmoid functionally graded material(S-FGM), Power law index, Aspect ratio, Nano-scale plates

1. 서 론

한 성분에서 다른 성분으로 합성 구매에 의해 특정 지어지는 점진기능재료(Functionally Graded Material,

FGM)는 2개의 성분이 복합적으로 구성된 재료이다. 점진기능재료의 미세 구조적이고 연속적인 변화는 2개의 상이한 재료가 함께 결합되어 있기 때문에 접촉면의 직각방향으로 역학적 성질의 불일치를 갖는 섬유 보강 적

이 논문은 2013년도 경남과학기술대학교 기성회 연구비 지원에 의해 연구되었음.

*Corresponding Author : Sung-Cheon Han(Daewon Univ.)

Tel: +82-16-318-1122 email: hasc1203@daum.net

Received August 8, 2013

Revised (1st October 11, 2013, 2nd October 30, 2013)

Accepted November 7, 2013

층복합재료와 구별된다. 이러한 이유로 섬유-수지 복합재료의 구성성분은 극히 높은 열 하중 하에서 쉽게 분리된다. 게다가, 균열은 접촉면에서 시작해서 취약한 재료 단면으로 성장하기 쉽다. 점진기능재료에서 이런 문제들을 구성성분의 체적요소를 점차적으로 변화시킴으로써 제거하거나 줄일 수 있다[1].

지수함수법[2]과 거듭제곱법[3]을 사용한 점진기능재료는 재료는 비록 연속이지만 급속히 변화하는 구간이 존재하여 접촉면의 한 곳에서 응력집중이 발생할 수 있다. Chung과 Chi[4]는 새로운 체적요소를 정의하는 2개의 거듭제곱 함수로 된 S형상 점진기능재료를 제한하였다. Chi와 Chung[5]은 S형상 점진기능재료의 사용으로 균열체의 응력 밀도 계수를 줄일 수 있음을 제시하였다. 점진기능재료 후판의 자유진동해석을 위하여 Zenkour[6]는 개선된 삼각급수 판 이론을 이용하여 연구하였다. 국내에서는 이원홍 등[7]이 S형상 점진기능재료 판의 휨, 진동 및 좌굴해석을 수행하였다.

20세기가 마이크로로 대별되는 시대였다면 21세기는 나노시대라 할 수 있다. 1 나노미터(1 nm)는 머리카락 굵기의 10만분의 1에 해당하며 생물체의 DNA정도 크기이다. 나노기술을 응용분야별로 분류하면 크게 소재기술, 소자, 환경/생명공학 등으로 크게 분류할 수 있다. 소재기술분야의 복합재료의 물성향상, 소자기술 분야의 나노기능소자 구조개선, 환경/생명분야의 생체기능소자 개발 등의 분야는 역학적으로 매우 중요한 분야라고 할 수 있다.

연속체 역학 이론 중에 미소 규모 효과를 포함하며 잘 알려진 방법 중의 하나가 Eringen [8,9]의 비국소 탄성이론이다. 기존의 고전적 연속체 역학 이론들과 비교하여 Eringen[8,9]의 비국소 탄성이론은 수많은 방정식을 풀지 않고 나노 구조물의 거동을 정확하게 예측할 수 있다. 최근 들어 몇몇 연구자들이 마이크로 및 나노 구조의 연구를 수행하였다[10,11]. 이러한 연구들은 고전적 판 이론 혹은 전단변형 이론을 적용한 등방성 및 거듭제곱법을 사용한 점진기능재료 미소 규모 판으로 제한되었다. 특히 S형상 점진기능재료로 구성된 미소 규모 판의 연구는 전무한 상황이다.

판 구조에 면내 압축력이 작용하면 판은 좌굴현상이 발생하게 된다. 나노-스케일 판 역시 면내 압축하중이 재하되며 이러한 면내 좌굴하중은 미소 규모 효과에 의해 영향을 받게 된다. 나노-스케일 판의 효과적인 사용을 위해서는 면내 압축력에 대한 구조적 안정 응답에 관한 연구가 반드시 필요하다. 특히 미소 규모 효과가 고려된 점진기능재료 나노-스케일 판에 대한 이축 좌굴해석이 매우 부족한 상황이므로 비국소 탄성이론을 이용한 나노-스케일 판의 정식을 제시하였다. 본 연구에서는 국소 탄

성이론과의 관계를 수치해석 결과를 통하여 고찰하였고, 여러 가지 변수들이 점진기능재료 나노-스케일 판의 무차원 좌굴하중에 미치는 효과에 대하여 관찰하였다.

2. 점진기능재료 판의 구성방정식

2.1 S형상 점진기능재료 판의 재료특성

재료의 구성성분을 연속적으로 변화시켜 점진기능재료를 제작하게 된다. 점진기능재료의 특징은 연속적으로 등급화된 성질을 가지는 비균질 미세구조라는 것이다. 점진기능재료는 체적요소의 변화에 의해 정의되고 거듭제곱 함수, 지수함수 혹은 체적요소를 나타내는 S형상 함수를 사용한다.

본 연구에서는 접촉면의 응력집중을 피하기 위해 S형상 함수를 사용하였다. 응력의 완만한 분포를 확보하기 위해 2개의 거듭제곱 함수를 이용한 체적요소를 식(1)로 정의할 수 있다.

$$V_f^1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{for } 0 \leq z \leq h/2 \quad (1a)$$

$$V_f^2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{for } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (1b)$$

여기서 h 는 S-FGM 나노-스케일 판의 두께이고 p 는 거듭제곱 지수이다.

혼합법칙을 사용하여, S형상 점진기능재료의 재료성질은 식(2)와 같이 계산할 수 있다.

$$H(z) = V_f^1(z)H_1 + (1 - V_f^1(z))H_2 \quad \text{for } 0 \leq z \leq h/2 \quad (2a)$$

$$H(z) = V_f^2(z)H_1 + (1 - V_f^2(z))H_2 \quad \text{for } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (2b)$$

여기서 H_1 과 H_2 는 각각 판의 상면과 하면의 재료성질이다.

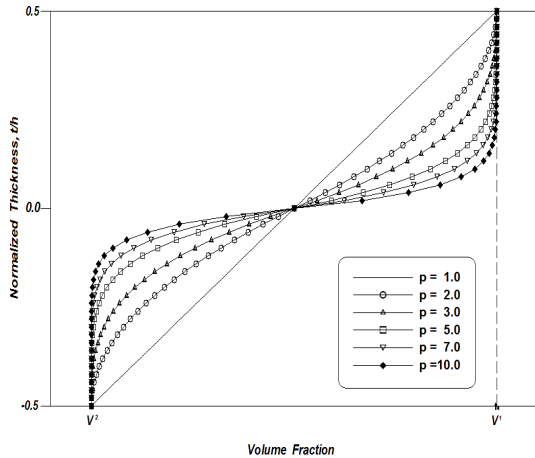
식(2a)와 (2b)에서 체적요소의 변화가 S형상 분포를 나타낸다. 이러한 점진기능재료 구조물을 S형상 점진기능재료 구조물이라고 한다. 탄성 직사각형 판을 고려하였을 때 위층과 아래층 면에서 재료의 성질, 탄성계수와 포와송 비는 다르지만 요구되는 성능에 따라 미리 규정된 값이다. 그러나 두께방향(z -축)으로 판의 탄성계수, 밀도와 포와송비는 연속적으로 변하는 것으로 가정할 수 있다. 즉, $E = E(z)$, $\rho = \rho(z)$ 이며 식(3)과 같이 표현할 수 있다(Fig. 1).

$$\{E_i(z), \rho_i(z)\} = V_f^1(z)\{E_1, \rho_1\} + (1 - V_f^1(z))\{E_2, \rho_2\} \quad \text{for } 0 \leq z \leq h/2 \quad (3a)$$

$$\{E_b(z), \rho_b(z)\} = V_f^2(z)\{E_1, \rho_1\} + (1 - V_f^2(z))\{E_2, \rho_2\}$$

$$\text{for } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (3b)$$

여기서 아래첨자 t 는 상면을 의미하고 b 는 하면을 의미한다.



[Fig. 1] The variation of volume fraction of S-FGM plate

2.2 S형상 점진기능재료 판의 구성방정식

S형상 점진기능재료 나노-스케일 판의 구성방정식은 식(4)와 같다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

S형상 점진기능재료 나노-스케일 판의 합응력은 식(5)와 같다.

$$\begin{Bmatrix} M_{xx}^{(i)} \\ M_{yy}^{(i)} \\ M_{xy}^{(i)} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} (z)^i dz \quad (5)$$

$$= \sum_{k=i}^{1+i} \begin{bmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} & 0 \\ A_{12}^{(k)} & A_{11}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & B_{11}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(k-i)} \\ \varepsilon_{yy}^{(k-i)} \\ \gamma_{xy}^{(k-i)} \end{Bmatrix} \quad i=0,1$$

$$\begin{Bmatrix} M_{yz}^{(0)} \\ M_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} dz \quad (6)$$

$$= k_s \begin{bmatrix} B_{11}^{(0)} & 0 \\ 0 & B_{11}^{(0)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix}$$

여기서 k_s 는 전단보정계수(5/6)이고

$$A_{11}^{(k)} = \frac{1}{(1-\nu^2)} \left[\int_{-h/2}^0 z^{(k)} E_b(z) dz + \int_0^{h/2} z^{(k)} E_t(z) dz \right]$$

$$A_{12}^{(k)} = \frac{\nu}{(1-\nu^2)} \left[\int_{-h/2}^0 z^{(k)} E_b(z) dz + \int_0^{h/2} z^{(k)} E_t(z) dz \right]$$

$$B_{11}^{(0)} = \frac{1}{2(1+\nu)} \left[\int_{-h/2}^0 E_b(z) dz + \int_0^{h/2} E_t(z) dz \right] \quad (7)$$

3. 평형방정식

3.1 전단변형 이론

전단변형이 고려된 변위장은 식(8)과 같이 표현할 수 있다.

$$u_x(x,y) = u_x^0(x,y) + z\phi_x(x,y)$$

$$u_y(x,y) = u_y^0(x,y) + z\phi_y(x,y)$$

$$u_z = w^0(x,y) \quad (8)$$

여기서 u_x, u_y 는 중립면($z=0$)의 한 점에서의 면내 변위들이고, u_z 는 판의 중립면에서 수직방향 변위이다. 그리고 ϕ_x, ϕ_y 는 중립면에서 전단변형각이다.

최소 포텐셜 에너지 원리를 식(9)와 같이 나타낼 수 있다 [12].

$$0 = \delta\Pi = (\delta U + \delta V) \quad (9)$$

가상 변형 에너지는 식(10)과 같다.

$$\delta U = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}) dAdz \quad (10)$$

여기서, σ_{ij} 는 응력 텐서 성분, ε_{ij} 는 변형률 텐서 성분이고 $i, j = x, y, z$ 이다.

외력에 의한 가상 일은 식(11)과 같다.

$$\delta V = \int_{\Omega} (f_i \delta u_i) dx dy \quad (11)$$

여기서, f_i 는 외력 벡터 성분이고 u_i 는 변위 벡터 성분이다.

3.2 비국소 탄성 이론

Eringen[8]에 따르면 탄성 연속체의 한 점 x 에서의 응력장은 그 점에서의 변형률장에만 관련 있는 것이 아니고 연속체의 다른 모든 점들에 관련 있는 것이다. Eringen[8]은 식(12)와 같은 비국소 응력 텐서를 제안하였다.

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \int_V K(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|, \tau) t_{ij}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (12)$$

여기서 $t_{ij}(\mathbf{x})$ 는 고전적 응력텐서의 성분이고 커널 함수 $K(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|, \tau)$ 는 비국소 탄성계수를 나타내며, $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ 는 유클리디안 놈으로 거리가 되고 τ 는 재료 상수이다. 일반적인 후크의 법칙에서 응력 t 는 식(13)과 같다.

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \quad \text{or} \quad t_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (13)$$

여기서 \mathbf{C} 는 4차 탄성 텐서이다.

비국소 탄성 이론에서 운동방정식은 비국소 균형 법칙으로부터 식(14)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_{i,j,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (14)$$

여기서 i, j 는 x, y, z 으로 표현되고 f_i, ρ 그리고 u_i 는 체적력, 밀도 그리고 변위 벡터를 의미한다. 식(12)를 식(14)에 대입하면 적분형태의 비국소 적합 조건식을 얻을 수 있다. 하지만 적분 형태의 방정식은 미분 방정식에 비해 해를 구하기 어렵다. Eringen[8]은 비국소 적합 조건식을 식(15)와 같이 미분 형태로 제안하였다.

$$t_{i,j,j} + \mathcal{L}(f_i - \rho \ddot{u}_i) = 0, \quad (15)$$

여기서 선형 미분 연산자 \mathcal{L} 은 식(16)으로 정의된다.

$$\mathcal{L} = 1 - \mu \nabla^2, \quad \mu = e_0^2 \bar{a}^2 \quad (16)$$

여기서 μ 는 비국소 변수, e_0 는 실험으로 정해지는 재료 상수이고 \bar{a} 는 내적 특성 길이이다.

식(16)의 연산자를 식(12)에 적용하면 적합 조건식이 식(17)과 같이 간단해진다.

$$\mathcal{L}(\sigma_{ij}) = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (17)$$

식(17)은 적분 관계식인 식(12)에 비해 선형 탄성 문제들의 적용에서 더 간단하고 편리하다(Eringen[8]).

3.3 비국소 탄성 판

식(13)과 식(17)을 이용하여 응력 관계식은 비국소 이론을 위한 변형률 항들로 재정리할 수 있다. 평면응력 가

정에 기초한 판 이론에서 $\sigma_{zz} = 0$ 이 되고 2차원 문제로 해석된다. (x, y, z) 좌표계에서 xy -면은 판의 중립면이다. 따라서 평면응력 상태에서의 응력-변형률 관계식은 식(18)과 같다.

$$t_{\alpha\beta} = \bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta} \quad (18)$$

여기서 $\bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta} - C_{\alpha\beta z z} C_{z z \gamma \delta} / C_{z z z z}$ 이다.

그리고 수직 전단응력-변형률 관계는 식(19)와 같다.

$$t_{\alpha z} = 2\bar{C}_{\alpha z \gamma z} \varepsilon_{\gamma z} \quad (19)$$

여기서 α, β, γ 그리고 δ 는 x, y 로 표현된다.

국소 이론과 비국소 이론에서 면내력들의 관계는 식(17)을 판의 두께방향으로 적분하여 식(20)과 같이 얻을 수 있다.

$$\mathcal{L}(N_{ij}) = N_{ij}^L, \quad \mathcal{L}(M_{ij}) = M_{ij}^L \quad (20)$$

여기서

$$\begin{Bmatrix} N_{\alpha\beta}^L, M_{\alpha\beta}^L \\ M_{\alpha\beta}^L, N_{\alpha\beta}^L \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{\alpha\beta}, t_{\alpha\beta} \\ \sigma_{\alpha z}, t_{\alpha z} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} dz \quad (21)$$

$$\begin{Bmatrix} N_{\alpha z}^L, N_{\alpha z}^L \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{\alpha z}, t_{\alpha z} \end{Bmatrix} dz \quad (22)$$

윗첨자 L 은 국소 3차 전단변형 이론을 나타내고 h 판의 두께이다. 비국소 이론에서 판의 평형방정식은 식(14)를 두께방향으로 적분하고 시간에 관한 미분항을 무시하면 식(23)과 같이 나타낼 수 있다.

$$N_{i\alpha,\alpha} + F_i = 0 \quad (23)$$

여기서 $F_i = \int_{-h/2}^{h/2} q_i dz$ 이다. 식(14)에 z 를 곱하고 두께방향으로 적분한 다음 시간에 관한 미분항을 무시하고 부분적분법을 사용하면 식(24)를 얻을 수 있다.

$$M_{\alpha\beta,\beta} - N_{\alpha z} = 0 \quad (24)$$

일반적으로 식(16)의 미분 연산자 ∇ 는 3차원 라플라스 연산자이다. 2차원 문제를 해석하기 위해 라플라스 연산자 ∇ 는 2차원으로 감차할 수 있다. 2차원 선형 미분 연산자 $\bar{\mathcal{L}}$ 는 식(25)와 같다.

$$\bar{\mathcal{L}} = 1 - \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (25)$$

미분 연산자 $\bar{\mathcal{L}}$ 는 z 방향에 대해 독립적이다.

전단변형 이론을 고려한 변위장을 식(23)-(24)에 대입하고 비국소 3차원 전단변형 이론의 굽힘 응답을 위한 평형 방정식을 유도하기 위해 식(23)-(24)를 식(9)와 조합하면 식(26)-(27)을 얻을 수 있다.

$$N_{z\alpha,\alpha} + q_z = 0 \quad (26)$$

$$M_{\alpha\beta,\beta} - N_{\alpha z} = 0 \quad (27)$$

3.4 평형방정식

식(9)에 식(10)-(11)과 식(17)을 대입하고 부분적분하여 정리하면 식(28)-(32)와 같은 평형방정식을 얻을 수 있다.

$$\delta u_x : M_{xx,x}^{(0)} + M_{xy,y}^{(0)} = 0 \quad (28)$$

$$\delta u_y : M_{xy,x}^{(0)} + M_{yy,y}^{(0)} = 0 \quad (29)$$

$$\delta w^0 : M_{xz,x}^{(0)} + M_{yz,y}^{(0)} - \bar{\mathcal{L}} [q_z + N_{xx}^0 w_{,xx}^0 + N_{yy}^0 w_{,yy}^0] = 0 \quad (30)$$

$$\delta \phi_x : M_{xx,x}^{(1)} + M_{xy,y}^{(1)} - M_{xz}^{(0)} = 0 \quad (31)$$

$$\delta \phi_y : M_{xy,x}^{(1)} + M_{yy,y}^{(1)} - M_{yz}^{(0)} = 0 \quad (32)$$

여기서, N_{xx}^0, N_{yy}^0 는 각각 x 방향 면내 압축력, y 방향 면내 압축력이다.

4. 해석적 방법

S형상 점진기능재료 나노-스케일 판의 진동해석 시 미소 규모 효과를 연구하기 위해 비국소 이론을 이용한 단순지지 판의 진동 해석 결과를 제시하였다. 4변이 단순지지된 경우에 Navier 방법으로 해석결과를 구할 수 있다. Navier 방법에서 판의 중립면에서의 변위는 이중 푸리에 급수로 식(33)과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \{u_x^0(x, y), \phi_x(x, y)\} &= \sum_{m=1n=1}^{\infty} \sum_{m=1n=1}^{\infty} \{U_{mn}, X_{mn}\} A_1 \\ \{u_y^0(x, y), \phi_y(x, y)\} &= \sum_{m=1n=1}^{\infty} \sum_{m=1n=1}^{\infty} \{V_{mn}, Y_{mn}\} A_2 \\ \{w^0(x, y), q_z(x, y)\} &= \sum_{m=1n=1}^{\infty} \sum_{m=1n=1}^{\infty} \{W_{mn}, Q_{mn}\} A_3 \end{aligned} \quad (33)$$

여기서 $A_1 = \cos \xi x \sin \eta y$, $A_2 = \sin \xi x \cos \eta y$,

$A_3 = \sin \xi x \sin \eta y$ 그리고 $\xi = \frac{m\pi}{a}$, $\eta = \frac{n\pi}{b}$ 이다.

나노-스케일 판의 좌굴 해석을 위하여 식(33)을 식(28)-(32)에 대입하고 행렬형태로 정리하면 평형방정식(34)를 얻을 수 있다.

$$[\mathbf{r}]_{5 \times 5} \{\Delta\}_{5 \times 1} = \{\mathbf{0}\}_{5 \times 1} \quad (34)$$

여기서 $\{\Delta\}_{5 \times 1}^T = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, Y_{mn}\}$ 그리고 $[\mathbf{r}]_{5 \times 5}$ 는 식(35)와 같다.

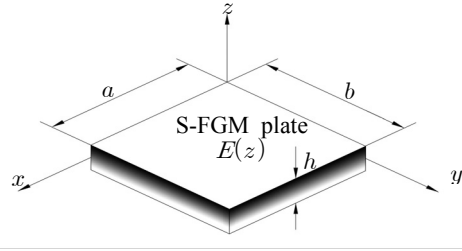
$$[\mathbf{r}]_{5 \times 5} = [\mathbf{K}]_{5 \times 5} - \lambda_{mn} [\mathbf{G}]_{5 \times 5} \quad (35)$$

여기서 $[\mathbf{K}]_{5 \times 5}$ 는 강성행렬, λ_{mn} 은 좌굴하중 그리고 $[\mathbf{G}]_{5 \times 5}$ 는 기하강성행렬이다.

5. 해석 결과

본 해석 기법의 성능을 검증하기 위하여 나노-스케일 등방성 판의 해석결과를 참고문헌[14, 15]의 해석 결과와 비교하였다. 나노-스케일 판의 재료 및 기하학적 성질은 식(36) 그리고 Fig. 2와 같다.

$$E = 30 \times 10^6, \nu = 0.3, h = 0.1 \quad (36)$$



[Fig. 2] Geometry of S-FGM nano-scale plate

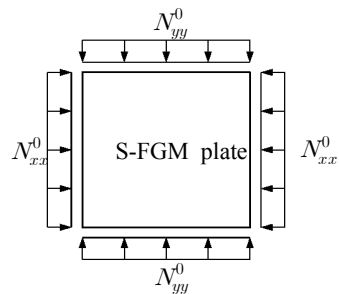
5.1 해석 결과 검증

비국소 탄성 이론을 적용한 나노-스케일 판의 좌굴하중을 무차원화 하여 나타내었다. 좌굴하중의 무차원 값은 식(37)을 사용하여 나타내었다.

$$\bar{\lambda}_{cr} = \lambda_{cr} \times \frac{b^2}{Eh^3 / (12(1-\nu^2))} \quad (37)$$

나노-스케일 판에서 비국소 변수의 범위는 Wang과 Wang[16]에 제시된 범위를 사용하였다. Wang과 Wang[16]은 탄소나노 튜브에서 식(16)의 $e_0 \bar{a}$ 가 2nm보다 작은 범위에 있어야 한다고 제시 하였다. 따라서 본 연구에서 사용하는 비국소 변수의 범위는 0에서 4로 가정하였다.

검증 예제로 비국소 탄성이론의 나노-스케일 판에 대한 적용성을 검토하기 위하여 2방향 압축을 받는 나노-스케일 판(Fig. 3)의 무차원 좌굴하중을 참고문헌의 결과와 비교하여 Table 1에 나타내었다. 2방향 압축을 받는 경우에 본 연구의 결과가 참고문헌과 잘 일치됨을 알 수 있었다.



[Fig. 3] S-FGM nano-scale plate under biaxial compression

Table 1에서 참고문헌[14]의 결과와 본 연구의 결과에 약간의 차이가 발생하는 것은 참고문헌[14]의 연구방법이 전단변형의 효과를 고려하지 않은 Galerkin방법을 사용하였기 때문으로 판단된다.

[Table 1] Non-dimensional critical buckling loads of nano-scale plate ($b/a = 1, b/h = 50$)

μ	Babaei & Shahidi [14]	this study
0	19.7395	19.6948
0.25	16.4854	16.4481
1.0	11.0306	11.0053
2.25	7.1095	7.0993
4.0	4.7470	4.7363

두 번째 검증예제는 점진기능재료의 이축 좌굴하중에 대하여 비교하였다. 점진기능재료 나노-스케일판의 재료 및 기하학적 성질은 식(38) 그리고 Fig. 2와 같다.

$$E_1 = 14.4 \text{ GPa}, E_2 = 1.44 \text{ GPa},$$

$$\nu = 0.38, h = 17.6 \times 10^{-6} \text{ m}. \quad (38)$$

점진기능재료 나노-스케일 판의 좌굴하중 무차원 값은 식(39)를 사용하여 나타내었다.

$$\bar{\lambda}_{cr} = \lambda_{cr} \times \frac{a^2}{E_2 h^3} \quad (39)$$

Table 2에서는 점진기능재료 나노-스케일 판의 폭-두께 비 변화에 따른 이축 좌굴하중 Thai 등[15]의 결과와 비교하였다. Thai 등[15]은 P-FGM판의 해석을 수행하여 직접적인 비교가 어려우나 $p = 1$ 인 경우에는 S-FGM 판의 경우와 동일하다. 본 연구의 결과와 참고문헌의 결과가 잘 일치함을 알 수 있었다.

[Table 2] Non-dimensional biaxial buckling load of FGM nano-scale plate ($b/a = 1, \mu = 0$)

a/h	Thai etc.[15] P-FGM($p = 1$)	this study S-FGM($p = 1$)
5	6.8576	6.8576
10	7.8273	7.8273
20	8.1142	8.1142
50	-	8.1983
100	-	8.2105

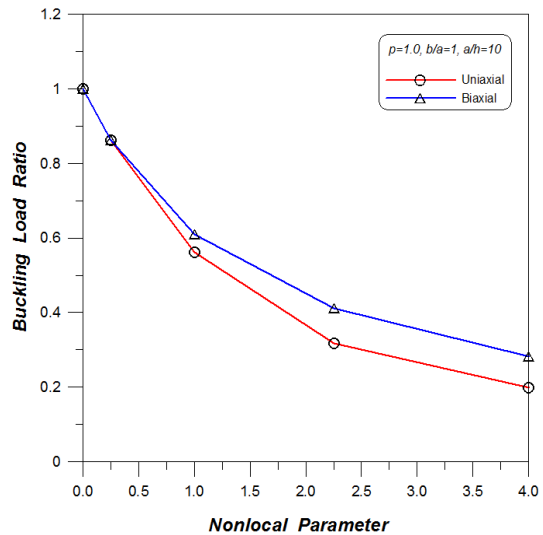
5.2 S형상 점진기능재료 나노-스케일 판의 이축 좌굴해석

일축 좌굴하중과 이축 좌굴하중의 변화를 비교하기 위하

여 각각 비국소 변수가 0인 경우를 기준으로 상대적인 좌굴하중을 구하였다. 상대적인 좌굴하중 비는 식(28)을 이용하여 구하였다.

$$\text{좌굴하중 비} = \bar{\lambda}_{cr}(\mu \neq 0) / \bar{\lambda}_{cr}(\mu = 0) \quad (28)$$

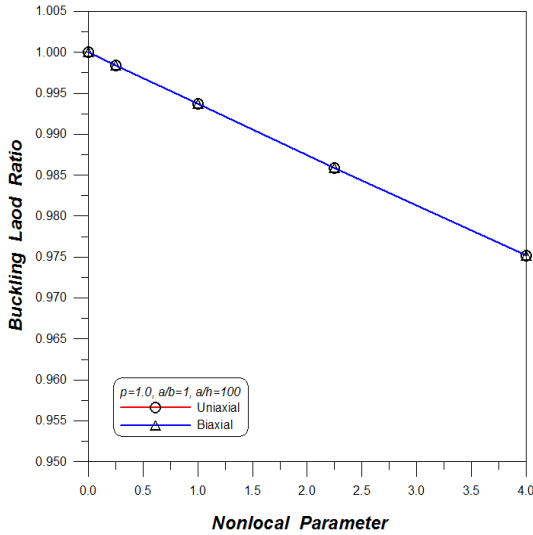
Fig. 4와 5에 각각 폭-두께 비가 10과 100인 경우의 S형상 점진기능재료 나노-스케일 판의 일축 및 이축 좌굴하중 비를 나타내었다. Fig. 3에서는 비국소 변수가 0.25보다 커졌을 때 일축 좌굴하중 비와 이축 좌굴하중 비에서 차이가 나타났다. 그러나 Fig. 5에서 알 수 있듯이 폭-두께 비가 100인 경우에 비국소 변수의 크기에 상관없이 일축 및 이축 좌굴하중 비의 차이는 발생하지 않았다. Fig. 3과 4로부터 비국소 변수에 의한 효과는 폭-두께 비가 100이상이 되면 거의 영향이 없음을 알 수 있었다. 또한 비국소 변수의 크기에 따라 일축 좌굴하중 비의 변화가 발생하는 원인은 좌굴모드의 변화로 추정된다. 이축 좌굴의 경우 비국소 변수가 변화하더라도 첫 번째 모드만 좌굴이 발생하는 것으로 판단된다. Fig. 5에서 일축 및 이축 좌굴하중의 비에 변화가 없는 것은 두 경우에 모두 첫 번째 좌굴모드만 발생한다고 분석할 수 있다.



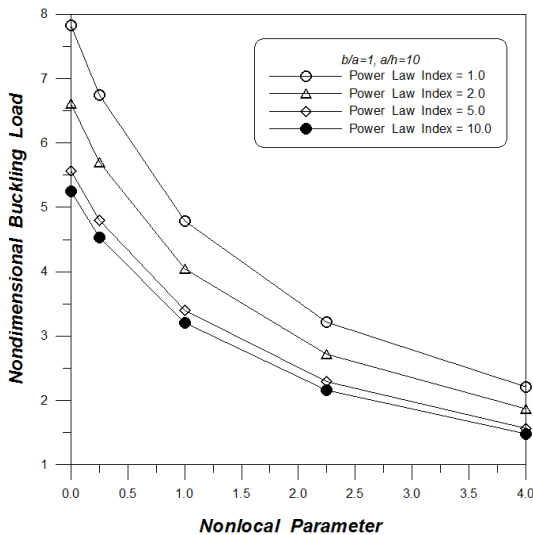
[Fig. 4] Effect of nonlocal parameters on the uniaxial and biaxial buckling loads of S-FGM nano-scale plate ($a/b = 1, a/h = 10$)

비국소 변수의 변화에 따른 여러 가지 거듭제곱 지수를 가지는 S형상 나노-스케일 판의 무차원 좌굴하중을 Fig. 6에 나타내었다. 모든 거듭제곱 지수에서 비국소 변수가 증가할 때 좌굴하중이 감소하였다. 거듭제곱 지수가 5이상이면 거듭제곱 지수에 의한 영향이 상대적으로 줄어들음을 알 수 있었다. 비국소 변수가 0일 때, 즉 국소 탄성이론에 의한 좌굴하중의 거듭제곱 지수에 의한 차이가 비국소 탄성이론

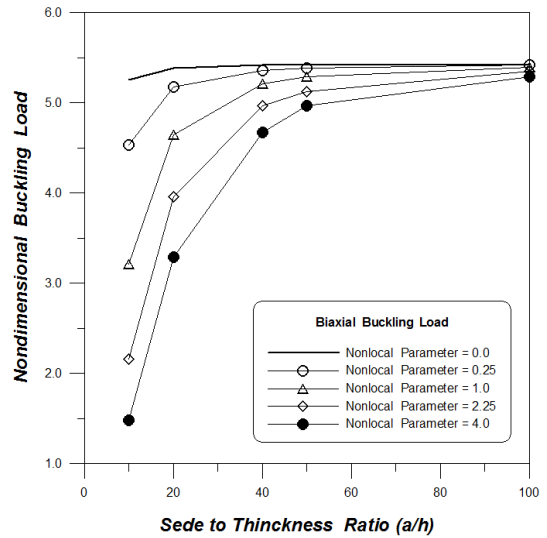
($\mu \neq 0$)을 적용했을 때의 차이에 비해 상대적으로 크게 발생하였다.



[Fig. 5] Effect of nonlocal parameters on the uniaxial and biaxial buckling loads of S-FGM nano-scale plate ($a/b=1, a/h=100$)



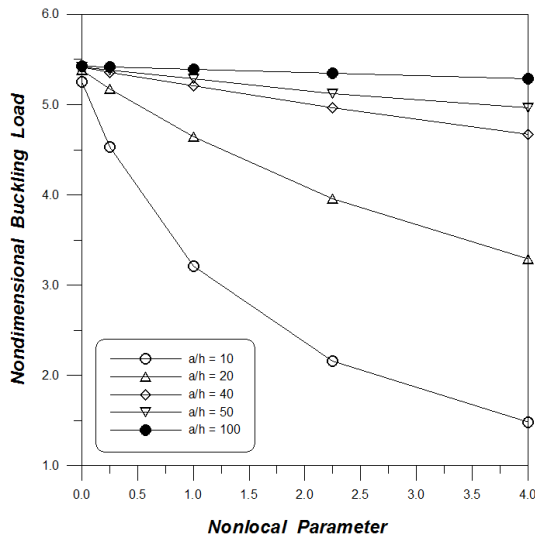
[Fig. 6] Effect of nonlocal parameters on the uniaxial and biaxial buckling loads of S-FGM nano-scale plate ($a/b=1, a/h=10$)



[Fig. 7] Effect of side-to-thickness ratio on the buckling loads of nano-scale plate with variable non-local parameter ($p=10$)

S형상 점진기능재료 나노-스케일 판의 폭-두께 비 변화에 따른 좌굴하중의 변화를 Fig. 7에 나타내었다. 폭-두께 비는 5에서 100까지 변화시켰다. 나노-스케일 판의 비국소 변수의 값은 0에서부터 4까지 변화시키면서 좌굴하중의 변화를 나타내었다. 폭-두께 비가 증가할수록, 즉 나노-스케일 판의 크기가 커질수록 좌굴하중의 크기도 커짐을 알 수 있었다. 폭-두께 비가 100 이상이 되면, 즉 두께가 매우 얇은 경우에, 좌굴하중은 국소 고전적 판 이론의 결과에 수렴되었다. 비국소 변수의 효과도 나노 판의 폭-두께 비가 50이상 이면 줄어드는 현상을 나타내었다. Fig. 7에서 비국소 전단변형 판 이론에 의한 판의 강성은 국소 고전적 판 이론에 비해 작아지고 이로 인해 작은 좌굴하중을 가짐을 알 수 있었다. 또한 여러 가지의 다른 비국소 변수상태에서 같은 좌굴하중을 추측할 수 있었다.

Fig. 8에서는 비국소 변수가 0에서부터 4까지 변화하는 동안 S형상 점진기능재료 나노-스케일 판의 무차원 좌굴하중을 나타내었다. 나노-스케일 판의 폭-두께 비는 10에서부터 100까지 증가시켰다. 무차원 좌굴하중은 나노-스케일 판의 폭-두께 비가 작을수록, 비국소 변수가 커질수록 작게 나타났다. 좌굴하중의 차이는 비국소 변수가 증가될수록 점점 크게 나타났다.



[Fig. 8] Variation of biaxial buckling load of nano-scale plate with variable non-local parameter ($p = 10$)

6. 결 론

본 연구에서 점진기능재료의 효과를 정확하게 나타내기 위해 S형상 함수를 사용하였다. 또한 비국소 탄성이론을 이용하여 미소 규모 나노-스케일 판의 좌굴해석을 위한 정식을 유도하였다.

본 연구의 결과로부터 비국소 변수 및 거듭제곱 지수가 S형상 점진기능재료 나노-스케일 판의 좌굴하중에 매우 중요한 영향을 준다는 것을 알 수 있었다. 비국소 탄성이론을 적용한 나노-스케일 판의 좌굴하중은 국소 탄성이론을 적용한 경우보다 항상 작은 값을 나타내었다. 또한 다음과 같은 세부적인 결론을 얻을 수 있었다.

- (1) S형상 점진기능재료 나노-스케일 판의 폭-두께 비 변화에 따라 일축 및 이축 좌굴하중 비의 변화가 발생하였다. 일축 좌굴의 경우에 폭-두께 비가 10인 경우에 비국소 변수의 크기에 따라 좌굴하중 비의 변화가 발생하였다. S형상 점진기능재료 나노-스케일 판의 엄밀한 좌굴해석을 위해서는 일축 및 이축 좌굴해석이 동시에 수행되어야 함을 알 수 있다.
- (2) 비국소 변수와 거듭제곱 지수가 커질수록 S형상 점진기능재료 나노-스케일 판의 좌굴하중은 감소하였고 거듭제곱 지수가 5이상이면 점진기능재료 효과가 5미만인 경우에 비하여 상대적으로 감소하였다.
- (3) 거듭제곱 지수와 비국성 변수가 증가할수록 S형상

점진기능재료 나노-스케일 판의 강성이 증대되어 좌굴하중은 줄어드는 것을 알 수 있었다.

거듭제곱 지수를 적용한 점진기능재료 나노-스케일 판의 경우 최근에 연구가 진행되고 있는 상황이다. 그러나 S형상함수를 적용한 점진기능재료 나노-스케일 판에 관해서는 기존의 연구 자료가 전무한 실정이다. 본 연구의 결과는 향후 S형상 점진기능재료 나노-스케일 판의 좌굴 해석을 연구하는 연구자들을 위한 참고자료로 활용될 수 있을 것이다.

References

- [1] T. Hirano and T. Yamada, "Multi-paradigm expert system architecture based upon the inverse design concept", *International Workshop on Artificial Intelligence for Industrial Applications*, Hitachi, Japan, 1988.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/AIIA.1988.13301>
- [2] F. Delale, F. Erdogan, "The crack problem for a nonhomogeneous plane", *J. Appl. Mech.(ASME)*, Vol. 50, pp. 609 - 614, 1983.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1115/1.3167098>
- [3] G. Bao, L. Wang, "Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 32, pp. 2853 - 2871, 1995.
DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683\(94\)00267-Z](http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683(94)00267-Z)
- [4] Y. L. Chung, S. H. Chi, "The residual stress of functionally graded materials", *Journal of Chinese Institute of Civil and Hydraulic Engineering*, Vol. 13, pp. 1 - 9, 2001.
- [5] S. H. Chi, Y. L. Chung, Y.L. "Cracking in sigmoid functionally graded coating". *Journal of Mechanics*, Vol. 18, pp. 41 - 53, 2002.
- [6] A. M. Zenkour, "On vibration of functionally graded plates according to a refined trigonometric plate theory", *Int. J. Struct. Stab. Dyna.*, Vol. 5, pp. 279-297, 2005.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1142/S0219455405001581>
- [7] W. H. Lee, S. C. Han, W. T. Park, "Bending, Vibration and Buckling Analysis of Functionally Graded Material Plates", *J. Korea Academia- Industrial cooperation Society*, Vol. 9(4), pp. 1043-1049, 2008.
DOI: <http://dx.doi.org/10.5762/KAIS.2008.9.4.1043>
- [8] A. C. Eringen, "On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves", *J. Appl. Phys.*, Vol. 54, pp. 4703-4710, 1983.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1063/1.332803>

- [9] A. C. Eringen, Nonlocal Continuum Field Theories, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [10] S. Narendar, D. R. Mahapatra, S. Gopalakrishnan, "Prediction of nonlocal scaling parameter for armchair and zigzag single-walled carbon nanotubes based on molecular structural mechanics, nonlocal elasticity and wave propagation ", Int. J. Eng. Sci., Vol. 49, pp. 509-522, 2011.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jengsci.2011.01.002>
- [11] S. Narendar, "Buckling analysis of micro- /nano-scale plates based on two-variable refined plate theory incorporating nonlocal scale effects", Compos. Struct., Vol. 93, pp. 3093-3103, 2011.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.06.028>
- [12] J. N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, CRC Press, London, 2007.
- [13] W. H. Lee, S. C. Han, W. T. Park, "Nonlocal elasticity theory for bending and free vibration analysis of nano plates, J. Korea Academia- Industrial cooperation Society, Vol. 13(7), pp. 3027-3215, 2012.
DOI: <http://dx.doi.org/10.5762/KAIS.2012.13.7.3207>
- [14] B. Babaei, A. R. Shahidi, "Small-scale effects on the buckling of quadrilateral nanoplates based on nonlocal elasticity theory using the Galerkin method", Arch. Appl. Mech., Vol. 81, pp. 1051-1062, 2011.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00419-010-0469-9>
- [15] H. T. Thai, D. H. Choi, "Size-dependent functionally graded Kirchhoff and Mindlin plate models based on a modified couple stress theory", Comps. Struct., Vol. 95, pp. 142-153, 2013.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.08.023>
- [16] Q. Wang, C. M. Wang. "The constitutive relation and small scale parameter of nonlocal continuum mechanics for modelling carbon nanotubes". Nanotechnology, Vol. 18, pp. 075702- 075709, 2007.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/0957-4484/18/7/075702>

이 원 흥(Won-Hong Lee)

[정회원]



- 1987년 2월 : 건국대학교 대학원 농공학과 (농학석사)
- 1994년 2월 : 건국대학교 학원 농공학과 (농학박사)
- 1997년 3월 ~ 현재 : 경남과학기술대학교 토목공학과 정교수

<관심분야>

좌굴해석, 비선형 구조해석, 복합구조 설계, 진동해석, 나노구조의 해석

한 성 천(Sung-Cheon Han)

[정회원]



- 1991년 2월 : 서울시립대학교 대학원 토목공학과 (공학석사)
- 1996년 8월 : 서울시립대학교 대학원 토목공학과 (공학박사)
- 1996년 3월 ~ 현재 : 대원대학교 철도건설과 부교수

<관심분야>

선형 및 비선형 구조해석, 유한요소법, 고유치 해석, 복합구조 설계, 나노구조의 해석