다중반응표면 최적화를 위한 가중평균제곱오차

정인준^{1*}, 조현우² ¹대구대학교 경영학과, ²대구대학교 산업경영공학과

A Weighted Mean Squared Error Approach to Multiple Response Surface Optimization

In-Jun Jeong^{1*} and Hyun-Woo Cho² ¹Department of Management, Daegu University ²Department of Industrial and Management Engineering, Daegu University

요 약 본 다중반응표면 최적화는 다수의 반응변수(품질특성치)를 동시에 고려하여, 입력변수의 최적 조건을 찾는 것을 목적으로 한다. 지금까지 다중반응표면 최적화를 위하여 다양한 방법이 제안되어 왔는데, 그 중 평균제곱오차 최소화법은 다수의 반응변수의 평균과 표준편차를 동시에 고려하여 최적화하는 방법이다. 이 방법은 기본적으로 평균 과 표준편차가 동일한 가중치를 가지고 있다는 것을 전제로 하고 있다. 그러나 문제의 상황에 따라 평균과 표준편차 에 서로 다른 가중치를 부여해야 하는 경우도 있다. 이에 본 논문에서는 기존의 평균제곱오차를 확대하여 평균과 표 준편차에 서로 다른 가중치도 부여할 수 있도록 가중평균제곱오차 최소화법을 제안하고자 한다.

Abstract Multiple response surface optimization (MRSO) aims at finding a setting of input variables which simultaneously optimizes multiple responses. The minimization of mean squared error (MSE), which consists of the squared bias and variance terms, is an effective way to consider the location and dispersion effects of the responses in MRSO. This approach basically assumes that both the terms have an equal weight. However, they need to be weighted differently depending on a problem situation, for example, in case that they are not of the same importance. This paper proposes to use the weighted MSE (WMSE) criterion instead of the MSE criterion in MRSO to consider an unequal weight situation.

Key Words : Multiple response surface optimization, Squared bias, Variance, Weighted mean squared error

1. 서론

반응표면분석(response surface methodology)은 어떤 반응변수(품질특성치)와 여러 입력변수 간의 관계를 실 험적으로 연구하는 품질공학의 방법론이다. 본 방법론의 최종 목표는 반응변수를 최적화하는 입력변수의 조건을 찾는 것이다[1-3]. 일반적으로 제품 및 공정설계 과정에 서는 여러 개의 반응변수를 동시에 고려해야 하는 경우 가 흔히 발생한다. 이와 같은 문제를 다중반응표면 문제 라고 한다[4].

다중반응표면 문제는 크게 데이터 수집, 모형화, 그리

고 최적화의 세 단계를 거쳐 해결된다. 본 논문은 이 중 에서 최적화 단계에 초점을 맞추고 있다. 다중반응표면 최적화 문제는 식 (1)과 같이 표현된다.

$$\begin{array}{ll} Optimize \quad [\hat{y_1}(\boldsymbol{x}), \ \hat{y_2}(\boldsymbol{x}), \ \cdots, \ \hat{y_k}(\boldsymbol{x})] \\ s.t. \ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega}. \end{array} \tag{1}$$

식 (1)에서 $\hat{y_i}(\boldsymbol{x})$ 는 *i*번째 반응변수 모형의 추정식(*i* =1, …, *k*), *x*는 입력변수 벡터, **Ω**는 입력변수의 제약범 위를 각각 나타낸다.

지금까지 다중반응표면 최적화를 위하여 다양한 방법

Accepted February 6, 2013

^{*}Corresponding Author : In-Jun Jeong (Daegu University) Tel: +82-53-850-6275 email: ijjeong@daegu.ac.kr Received October 26, 2012 Revised January 2, 2013

이 제안되어 왔는데[5-8], 이들 방법은 우선순위기반법 (priority-based approach), 호감도함수법(desirability function approach), 손실함수법(loss function approach), 공정능력 법(process capability approach), 확률기반법(probabilitybased approach) 등으로 구분할 수 있다[9]. 이 중 손실함 수법은 널리 활용되는 다중반응표면 최적화 기법 중 하 나로, 다구찌(Taguchi)의 이차 손실함수(quadratic loss function)에서 파생된 기법이다[10-12]. 이후부터 언급되 는 손실함수는 이차 손실함수를 의미한다. 손실함수법의 최대 장점은 손실함수의 전개를 통하여 반응변수의 평균 뿐만 아니라 분산을 체계적으로 고려할 수 있다는 점이 다. 이를 통하여 강건한 입력변수의 조건을 찾을 수 있다 [13, 14].

손실함수법은 반응변수와 이들의 목표수준 사이의 거 리를 손실함수로 나타낸 다음, 손실함수의 기대치를 최소 화하는 입력변수의 조건을 찾는다. 손실함수법은 다수의 반응변수를 다루는 방식에 따라 이른바 단변량 (univariate) 방식과 다변량(multivariate) 방식으로 구분된 다. 단변량 방식은 개별 반응변수를 단변량 손실함수로 변환하여 이들을 종합(aggregation)하는 반면[12, 15-18]. 다변량 방식은 다수의 반응변수를 다변량 손실함수로 변 환하여 한 번에 다룬다[13, 14, 19]. 단변량 방식은 단순 하고 이해하기 쉬우나 수리적 완결성이 떨어진다. 다변량 방식은 반응변수의 상관관계 혹은 공분산 구조를 고려하 는 등 수리적 전개가 단단하나, 통계적 지식이 부족한 실 무자들이 쉽게 활용하기에는 한계가 있다. 본 논문에서는 단변량 방식에 초점을 맞춘다.

단변량 방식은 주로 손실함수의 기대치인 평균오차제 곱(mean squared error, MSE)을 목적함수로 다룬다. 식 (2)-(4)는 망목특성(nominal-the-best)을 띄는 어떤 반응변 수에 대한 단변량 손실함수와 그 기대치를 보여준다.

$$L(y_i(\boldsymbol{x})) = c_i [(y_i(\boldsymbol{x}) - T_i)]^2.$$
⁽²⁾

$$E[L(y_i(\boldsymbol{x}))] = c_i[(\mu_i(\boldsymbol{x}) - T_i)^2 + (\sigma_i(\boldsymbol{x}))^2].$$
(3)

$$MSE_{i} = (\mu_{i}(\boldsymbol{x}) - T_{i})^{2} + (\sigma_{i}(\boldsymbol{x}))^{2}.$$
(4)

식 (2)에서 $y_i(\mathbf{x}) \models i$ 번째 반응변수의 모형(i=1, ..., k), $c_i \models$ 손실비용(또는 가중치), $T_i \vdash$ 반응변수의 목표 수준을 각각 나타낸다. 식 (3)에서 $E[L(y_i(\mathbf{x}))] \models$ 손실 함수의 기대치를, $\hat{\mu_i}(\mathbf{x})$ 와 $\hat{\sigma_i}(\mathbf{x}) \models$ 반응변수의 평균, 표준편차 모형의 추정식을 각각 나타낸다. 식 (3)과 (4)에 나와 있듯이, 손실함수의 기대치는 제곱편차 $((\hat{\mu_i}(\mathbf{x}) - T_i)^2)$ 와 분산 $((\hat{\sigma_i}(\mathbf{x}))^2)$ 으로 구성되는 MSE_i 가 된다. 편차는 반응변수가 목표수준으로부터 떨어진 평 균 거리를 의미하고, 분산은 비통제변수 혹은 잡음인자에 대한 반응변수의 강건성(robustness)을 의미한다[14]. 참 고로, 망소특성(smaller-the-better)과 망대특성(larger-thebetter)을 띄는 반응변수의 MSE는 각각 식 (5), (6)과 같 이 표현된다[20]. 망소특성과 망대특성에서 분산은 망목 특성과 동일하나, 제곱편차는 각각 $(\hat{\mu}_i(\boldsymbol{x}))^2$ 와 $-(\hat{\mu}_i(\boldsymbol{x}))^2$ 이 된다.

$$MSE_i = (\widehat{\mu_i}(\boldsymbol{x}))^2 + (\widehat{\sigma_i}(\boldsymbol{x}))^2.$$
(5)

$$MSE_i = -(\hat{\mu}_i(\boldsymbol{x}))^2 + (\hat{\sigma}_i(\boldsymbol{x}))^2.$$
(6)

단변량 방식은 식 (4)에서와 같이 개별 반응변수에 대 하여 *MSE*_i를 구한 후, 이들을 최소화하는 입력변수 조 건을 찾게 된다. MSE를 최소화하는 단변량 방식의 최적 화 문제는 식 (7)과 같이 일반화된다.

지금까지 MSE를 최소화하는 단변량 방식과 관련하여 여러 연구가 진행되어 왔다[12, 16-18]. 이들 연구는 MSE 의 두 구성요소인 제곱편차와 분산에 동일한 가중치를 부여하는 것을 전제로 하고 있다. 그러나 제품이나 생산 공정이 추구해야 할 목표에 따라, 또는 평균과 표준편차 의 스케일 차이를 보정하기 위하여 이 두 요소에 서로 다 른 가중치를 부여하여야 하는 경우가 흔히 존재한다. 본 논문에서는 제곱편차와 분산에 서로 다른 가중치를 부여 할 수 있는 가중평균제곱오차(weighted MSE, WMSE)를 MSE 대신 활용하는 것을 제안하고자 한다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2장에서는 다 중반응표면 최적화에 MSE 최소화 접근법을 활용한 기존 문헌을 고찰한다. 3장과 4장에서는 각각 WMSE를 활용 하는 방안과 WMSE에서 가중치를 결정하는 방법을 제안 한다. 5장에서는 제안된 WMSE 접근법을 활용하여 대표 적인 다중반응표면 문제를 풀어보고 기존 MSE 접근법과 비교한다. 마지막으로, 결론 및 추후 연구방향을 6장에서 제시한다.

2. 기존문헌 고찰

본 장에서는 MSE 최소화 접근법에 속하는 기법을 제 안한 기존 연구를 살펴보고자 한다. [20]은 다중반응표면 최적화를 위하여 개별 반응변수의 *MSE*_i를 구하고, 이들 의 가중합(weighted sum)을 최소화하는 최적화 모형을 제안하고 있다(식 (8)).

$$\begin{array}{ll}
\text{Minimize} & \sum_{i=1}^{k} w_i MSE_i \\
\text{s.t.} & \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega}.
\end{array}$$
(8)

식 (8)에서 $w_i \in MSE_i$ 에 대한 가중치를 나타낸다(*i* =1, …, *k*). [20]은 비선형(nonlinear)의 복잡한 (multimodal) 형태를 띄는 식 (8)의 최적화 문제를 효과적 으로 풀기 위하여 유전자 알고리즘(genetic algorithm)을 사용할 것을 제안하고 있다.

[16]도 [20]과 마찬가지로 가중합을 최소화하는 모형 을 제안하고 있다. 다만, 이들은 *MSE*_i의 가중합 대신에 이른바 상대오차제곱(relative MSE, RMSE) 가중합의 사 용을 제안하고 있다. MSE는 반응변수들 간의 상대적인 스케일 차이를 고려하지 못하는데, RMSE는 이러한 단점 을 보완한다.

[21]은 다수의 *MSE*_i들 중 하나를 목적함수로 선택하 여 이를 최소화하고, 나머지 *MSE*_i들은 등제약식(equality constraint)으로 두는 우선순위 기반의(priority-based) 최 적화 모형을 제안하고 있다.

[17]은 다수의 *MSE_i*에 대하여 사전식 가중 (lexicographic weighted) Tchebycheff 수식 형태의 최적화 모형을 제안하고 있다. 이 모형은 우선 개별 *MSE_i*와 그 이상치와의 거리 중 가장 큰 값을 최소화하는 최적화 문 제를 풀고 난 다음, 그 결과값을 제약식으로 두고 개별 *MSE_i*와 그 이상치와의 거리의 합을 최소화하는 최적화 문제를 푼다. [18]은 두 개의 반응변수에 국한하여 사전 식 가중 Tchebycheff 최적화 모형을 제안하고 있다.

[12]는 특정한 최적화 모형을 해결하여 하나의 최적해 를 찾는 방법이 아니라, 식 (7)을 충족하는 수많은 비지배 적 해(non-dominated solutions) 혹은 파레토 해(Pareto solutions)를 찾고 그 중에서 의사결정자가 가장 만족하는 하나의 해를 고르는 일종의 선호도사후제시법(posterior preference articulation method)[22-24]을 제안하고 있다.

3. 제안된 방법

앞서 언급한 바와 같이, MSE는 제곱편차와 분산의 합 으로 표현된다. 이는 제곱편차와 분산에 동일한 가중치를 부여하는 것을 전제로 한다. 그러나 제품이나 생산공정이 추구해야 할 목표에 따라, 또는 평균과 표준편차의 스케 일 차이를 보정하기 위하여 서로 다른 가중치를 부여하 여야 하는 경우가 흔히 존재한다. 이와 같은 경우를 고려 하기 위하여 [25]도 제곱편차와 분산에 가중치를 부여한 가중평균제곱오차(weighted MSE, WMSE)의 필요성을 언급하고 있다. 식 (9)-(11)은 각각 망목특성, 망소특성, 망대특성을 띄는 반응변수의 WMSE,를 보여주고 있다.

$$WMSE_i = \lambda_i (\hat{\mu}_i(\boldsymbol{x}) - T_i)^2 + (1 - \lambda_i) (\hat{\sigma}_i(\boldsymbol{x}))^2.$$
(9)

$$WMSE_i = \lambda_i (\hat{\mu_i}(\boldsymbol{x}))^2 + (1 - \lambda_i) (\hat{\sigma_i}(\boldsymbol{x}))^2.$$
(10)

 $WMSE_i = -\lambda_i (\hat{\mu}_i(\boldsymbol{x}))^2 + (1 - \lambda_i) (\hat{\sigma}_i(\boldsymbol{x}))^2.$ (11)

식 (9)-(11)에서 λ_i 는 가중치를 나타내는 인자 (weighting factor)를 의미한다($0 \le \lambda_i \le 1$). 만약 λ_i =0.5로 두고 스케일을 조정하면 식 (9)-(11)은 식 (4)-(6)의 MSE_i 가 된다.

본 논문에서는 다중반응표면 최적화를 위한 MSE 최 소화 접근법에서 MSE 대신 WMSE를 사용하는 것을 제 안한다(식 (12)).

WMSE 기반의 다중반응표면 최적화를 위해 다양한 최적화 모형을 고려할 수 있다. 본 논문에서는 식 (8)과 유사하게 WMSE_i의 가중합을 최소화하는 최적화 모형 을 채택한다(식 (13)).

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & \sum_{i=1}^{k} w_i \text{WMSE}_i \\ s.t. & \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega}. \end{array} \tag{13}$$

4. WMSE/에서 λi의 결정 방법

WMSE 최소화 접근법의 핵심은 바로 식 (9)-(11)에서 λ_i 를 결정하는 것이다. 지금까지 λ_i 를 결정하기 위하여 여러 가지 방법이 제안되었다. [26]은 평균과 표준편차의 이상치(ideal point)에 가장 가까운 실현가능한(feasible) 평균, 표준편차의 조합으로부터 λ_i 를 구하는 데이터기반 법(data-driven method)을 제안하고 있다. [27]은 의사결

정자(품질설계자)의 선호도 정보에 의해 λ_i를 구하는 선 호도기반법(preference-based method)을 제안하고 있다. [28]은 [27]의 선호도기반법의 효율성과 강건성을 개선한 대화식결정방법(interactive weighting method)을 제안하 고 있다.

 $WMSE_i$ 에서 λ_i 를 결정하는 방법으로 위에서 소개된 방법을 모두 활용할 수 있으나, 본 논문에서는 [26]이 제 시한 데이터기반법을 채택한다. 데이터기반법은 우선 제 곱편차와 분산을 각각 최소화하여 $\hat{\mu_i}(\boldsymbol{x})$ 와 $\hat{\sigma_i}(\boldsymbol{x})$ 의 한 계 최적값(marginally optimal values)을 구한 후, 이들의 조합을 이상치(ideal point), 즉 $(\mu_i^{ideal}, \sigma_i^{ideal})$ 로 둔다. 다 음으로 식 (9)-(11)을 다양한 i값에 대하여 최소화하고, 그 결과로 도출되는 $(\hat{\mu}_i^*, \hat{\sigma}_i^*)$ 들을 연결한 효율곡선 (efficient curve)을 만든다. 최종적으로 $(\mu_i^{ideal}, \sigma_i^{ideal})$ 로부 터의 직선거리가 가장 가까운 효율곡선 상의 점을 찾고 이 때의 λ_i 값을 최종 λ_i 로 정한다.

5. 하중변환기 탄성요소 설계 문제

본 장에서는 앞서 3-4장에서 제안된 방법을 활용하여 "하중변환기의 탄성요소 설계(design of the elastic element of a force transducer)" 문제[28]를 풀어보고자 한 다. 본 문제는 다중반응표면 문제로, 반응변수의 평균과 표준편차 모형이 주어져 있어 제안된 방법을 적용하기에 적합하다. 본 문제를 통하여 기존의 MSE 가중합 방법과 제안된 WMSE 가중합 방법 간의 차이를 비교한다.

5.1 문제 소개

본 문제의 목표는 하중변환기의 부정확성(inaccuracy) 을 최소화하도록 탄성요소의 수준을 결정하는 것이다. 반 응변수는 부정확성의 주요 원천인 비선형성(non-linearity, y_1)과 이력현상(hysteresis, y_2) 등 2개인데, y_1 은 목표수 준(T_1)이 1인 망목특성을, y_2 는 망소특성을 띈다. 입력변 수는 로렌즈 각도(lozenge angle, x_1), 내부 지름(bore diameter, x_2), 수직부분의 절반길이(half-length of the vertical segment, x_3) 등 3개가 된다. 본 문제에서는 이와 함께 두 개의 잡음인자도 고려되었다. 잡음인자는 로렌즈 각도의 편차 (deviation of the lozenge angle from its nominal value, z_1), 내부 지름의 편차(deviation of the bore diameter from its nominal value, z_5) 등 2개이다. 실험은 5인자 2수준에 대한 2⁵⁻¹형 일부실시법(one-half fractional factorial design)과, 중심점(3회 반복)과 꼭지점 (6개 꼭지점에 각 1회씩 총 6회)에 실험횟수를 추가한 중 심복합설계(central composite design)로 실시되었다. 결과 적으로 총 25회의 실험이 실시되었다. 실험으로부터 획 득된 데이터 등 본 문제에 대한 자세한 설명은 [28]에 나 와 있다. 본 문제에서 y_1 , y_2 모형에 대한 추정식은 식 (14), (15)와 같다.

$$\hat{y}_{1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = 1.38 - 0.361x_{1} - 0.155x_{2}$$
(14)
+ 0.0771x_{3} - 0.148x_{1}x_{2} + 0.0218x_{1}x_{3}
+ 0.013x_{2}x_{3} + 0.0481x_{1}^{2} - 0.0588z_{1}
- 0.0116z_{2} + 0.01x_{1}z_{1},

$$\begin{split} y_2(\pmb{x}, \pmb{z}) &= 1.64 + 0.592 x_1 + 0.438 x_2 \\ &- 0.095 x_3 + 0.301 x_1 x_2 - 0.143 x_1 x_3 \\ &+ 0.201 x_1^2 - 0.0844 x_1 x_2 x_3 + 0.0794 x_1 z_1 \end{split} \tag{15}$$

[20]은 식 (14), (15)로부터 z_1 과 z_2 는 상관관계가 없 는 (uncorrelated) 것으로 가정하여, y_1 , y_2 의 평균, 표준 편차 모형을 식 (16)-(19)와 같이 도출하였다. [20]은 식 (18), (19)에서 잡음인자의 분산은 $\sigma_{z_1}^2 = \sigma_{z_2}^2 = 1$ 임을 가정하 였고, 반응변수 모형의 오차항의 분산은 중심점의 3회 반 복실험으로부터 계산한 $s_1^2 = 0.0003253$, $s_2^2 = 0.024$ 을 적용 하였다.

$$\hat{\mu}_{1}(\boldsymbol{x}) = 1.38 - 0.361x_{1} - 0.155x_{2}$$

$$+ 0.0771x_{3} - 0.148x_{1}x_{2} + 0.0218x_{1}x_{3}$$

$$+ 0.0130x_{2}x_{3} + 0.0481x_{1}^{2},$$
(16)

$$\hat{\mu_2}(\boldsymbol{x}) = 1.64 + 0.592x_1 + 0.438x_2 \tag{17} \\ -0.095x_3 + 0.301x_1x_2 - 0.143x_1x_3 \\ +0.201x_1^2 - 0.0844x_1x_2x_3, \end{aligned}$$

$$\widehat{\sigma_1^2}(\boldsymbol{x}) = (-0.0588 + 0.01x_1)^2 \sigma_{z_1}^2$$

$$+ (-0.0116)^2 \sigma_{z_2}^2 + s_1^2,$$
(18)

$$\widehat{\sigma_1^2}(\boldsymbol{x}) = (0.0794)^2 \sigma_{z_1}^2 + s_2^2.$$
⁽¹⁹⁾

5.2 제안된 방법을 활용한 문제 풀이

앞서 3장과 4장에서 언급된 바와 같이, 우선 [26]의 데 이터기반법을 활용하여 y_1 , y_2 각각에 대한 $WMSE_i$ 에 서의 λ_i 를 결정한다. 그 다음, 결정된 λ_i 로 $WMSE_i$ 를 구성한 후 이들의 가중합을 최소화하여 최적해를 구한다.

5.2.1 데이터기반법을 활용한 λ_i의 결정

우선 망목특성인 y_1 의 경우, $(\mu_1^{ideal}, \sigma_1^{ideal}) = (1.0000, 0.0533)로 구해졌다. 다음으로 <math>\lambda_1 \equiv 0$ 에서 1까지 0.01 단 위로 증가시키면서 식 (9)를 최소화하고, 그 결과로 도출 된 101개의 $(\mu_1^*, \sigma_1^*) \equiv 0$ 결한 효율곡선을 만들었다 효 율곡선 상의 점들 중 $(\mu_1^{ideal}, \sigma_1^{ideal})$ 로부터의 직선거리가 가장 가까운 점은 $\mathbf{x}^* = (0.7965, 0.3863, -0.1789), (\mu_1^*, \sigma_1^*) = (0.9998, 0.0552)$ 이며, 이 때의 λ_1 값인 0.69를 최종 λ_1 로 정하였다. Table 1(a)은 101개의 $\mathbf{x}^*, (\mu_1^*, \sigma_1^*) \equiv (\mu_1^{ideal}, \sigma_1^{ideal})$ 과의 직선거리가 가까운 순서로 보여주고 있다. Fig. 1(a)은 Table 1(a)의 결과를 시각적으로 보여준 다. 참고로 Fig. 1(a)에서 $(\mu_1^{ideal}, \sigma_1^{ideal})$ 과 $(\mu_1^*, \sigma_1^*) = (0.9998, 0.0552)$ 사이의 거리가 가장 가깝게 보이지 않는 이유는 x축과 y축 간의 스케일 차이 때문이다.

다음으로 망소특성인 y_2 의 경우, $(\mu_2^{ideal}, \sigma_2^{ideal})$ =(1.0398, 0.1560)로 구해졌다. 다음으로 y_1 의 경우와 마 찬가지의 방식으로 식 (10)을 최소화하여 101개의 (μ_2^*, σ_2^*) 를 도출하였다. 이들 중 $(\mu_2^{ideal}, \sigma_2^{ideal})$ 로부터의 직선 거리가 가장 가까운 점은 **x**^{*}=(-0.4817, -1.0000, 1.0000), (μ₂^{*}, σ₂^{*})=(1.0417, 0.1596)이며, 이 때의 λ₂값인 0.07을 최종 λ₂로 정하였다. Table 1(b)와 Fig. 1(b)는 이상의 결 과를 요약하여 보여주고 있다. 참고로, Fig. 1(b)에서도 Fig. 1(a)와 같이 *x*축과 *y*축 간의 스케일 차이로 결과가 다소 왜곡되게 보여진다.

5.2.2 WMSE 가중합의 최소화

앞서 도출된 λ₁과 λ₂로부터 WMSE를 구성한 후(식 (20)-(21)), 이들의 가중합을 최소화한다(식 (22)).

$$\begin{split} W\!M\!S\!E_{\!1} &= \lambda_1 (\hat{\mu_1}(\pmb{x}) - T_1)^2 + (1 - \lambda_1) (\hat{\sigma_1}(\pmb{x}))^2 \quad (20) \\ &= 0.69 (\hat{\mu_1}(\pmb{x}) - 1)^2 + 0.31 (\hat{\sigma_1}(\pmb{x}))^2. \end{split}$$

$$WMSE_{2} = \lambda_{2}(\hat{\mu_{2}}(\boldsymbol{x}))^{2} + (1 - \lambda_{2})(\hat{\sigma_{2}}(\boldsymbol{x}))^{2}$$

$$= 0.07(\hat{\mu_{2}}(\boldsymbol{x}))^{2} + 0.93(\hat{\sigma_{2}}(\boldsymbol{x}))^{2}.$$
(21)

식 (22)에서 w_1 과 w_2 는 두 반응변수의 값에 의해 결 정되는 품질 및 비용 수준을 고려하여 그 중요도에 따라 결정되어야 하나, 본 문제풀이에서는 간단히 $w_1=w_2=1$ 로 정하였다. 이러한 조건 하에서 식 (22)를 푼 결과,

[Table 1] Determining λ_1 and λ_2 based on the Data-Driven Method in the Problem

(a) Determination of λ_1									
λ_1	$\boldsymbol{x}^{*} = (x_{1}^{*}, x_{2}^{*}, x_{3}^{*})$	$(\hat{\mu_1^*}, \hat{\sigma_1^*})$	Distance from $(\mu_1^{\widehat{ideal}}, \sigma_1^{\widehat{ideal}})$						
<u>0.69</u>	(0.7965, 0.3863, -0.1789)	(0.9998, 0.0552)	0.0000035542						
0.68	(0.7969, 0.3860, -0.1789)	(0.9997, 0.0552)	0.0000035545						
0.66	(0.7976, 0.3853, -0.1788)	(0.9997, 0.0552)	0.0000035569						
0.67	(0.7972, 0.3856, -0.1788)	(0.9997, 0.0552)	0.0000035580						
0.7	(0.7962, 0.3867, -0.1790)	(0.9998, 0.0552)	0.0000035582						
÷	:	:	:						
0.02	(0.9863, 0.3514, -0.1742)	(0.9470, 0.0534)	0.0028058367						

(b) Determination of λ_2

λ_2	$\boldsymbol{x}^{*} = (x_{1}^{*}, x_{2}^{*}, x_{3}^{*})$	$(\hat{\mu}_2^*, \hat{\sigma}_2^*)$	Distance from $(\mu_2^{\widehat{ideal}}, \sigma_2^{\widehat{ideal}})$
0.07	(-0.4817, -1.0000, 1.0000)	(1.0417, 0.1596)	0.0000161
0.08	(-0.4928, -1.0000, 1.0000)	(1.0413, 0.1598)	0.0000163
0.09	(-0.5016, -1.0000, 1.0000)	(1.0410, 0.1600)	0.0000168
0.06	(-0.4678, -1.0000, 1.0000)	(1.0423, 0.1593)	0.0000169
0.10	(-0.5091, -1.0000, 1.0000)	(1.0408, 0.1601)	0.0000175
÷	:	:	:
0.01	(-0.2350, -1.0000, 1.0000)	(1.0635, 0.1560)	0.0005617



[Fig. 1] Determining λ_1 and λ_2 based on the Data-Driven Method in the Problem

				λ_1 =0.69, λ_2 =0.07			
(w ₁ ,w ₂)	$\mathbf{x}^* - (x^* x^* x^*)$	$(\hat{\mu_1^*}, \hat{\sigma_1^*})$	$(\hat{\mu_{2}^{*}}, \hat{\sigma_{2}^{*}})$		WMSE ₂	$w_1 W\!M\!S\!E_1$	
	$\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, x_3)$			$WMSE_1$		+	
						$w_2 W\!M\!S\!E_2$	
(1, 1)	(0.3812, -1.1709, -1.6820)	(1.3789, 0.0590)	(1.4358, 0.1578)	0.1001	0.1675	0.2676	
(2, 1)	(0.3314, -0.5098, -1.6820)	(1.2390, 0.0595)	(1.7997, 0.1571)	0.0405	0.2497	0.3307	
(3, 1)	(0.2993, -0.1656, -1.6820)	(1.1722, 0.0598)	(1.9725, 0.1567)	0.0216	0.2952	0.3599	
(4, 1)	(0.2814, 0.0328, -1.6820)	(1.1351, 0.0600)	(2.0684, 0.1565)	0.0137	0.3223	0.3771	
(5, 1)	(0.2731, 0.1596, -1.6820)	(1.1106, 0.0600)	(2.1313, 0.1564)	0.0096	0.3407	0.3886	
(6, 1)	(0.2607, 0.2577, -1.6820)	(1.0944, 0.0601)	(2.1732, 0.1563)	0.0073	0.3533	0.3969	
(7, 1)	(0.2564, 0.3234, -1.6820)	(1.0821, 0.0602)	(2.2048, 0.1562)	0.0058	0.3630	0.4034	
(8, 1)	(0.2660, 0.3521, -1.6820)	(1.0718, 0.0601)	(2.2311, 0.1564)	0.0047	0.3712	0.4086	
(9, 1)	(0.2487, 0.4184, -1.6820)	(1.0650, 0.0603)	(2.2486, 0.1562)	0.0040	0.3766	0.4130	
(10, 1)	(0.2782, 0.3970, -1.6820)	(1.0568, 0.0600)	(2.2698, 0.1565)	0.0033	0.3834	0.4169	

[Table	2]	Minimizing	the	Weighted	Sum	of	WMSEs	and	MSEs	in	the	Problem
		0		8								

(a)	Results	of	Minimizing	the	Weighted	Sum	of	WMSEs	(Proposed	Method)
· · · · ·			0							

(b) Results of Minimizing the Weighted Sum of MSEs (Köksoy and Yalcinoz's Method[20])

				λ_1 =0.69, λ_2 =0.07				
(w, w_{2})	$\mathbf{r}^{*} = (r^{*} r^{*} r^{*} r^{*})$	$(\hat{u}, \hat{\tau})$				$w_1 W\!M\!S\!E_1$		
(~1,~2)	$\boldsymbol{\omega}$ $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$	$(\mu_1, \ o_1)$	$(\mu_2, 0_2)$	$WMSE_1$	$WMSE_2$	+		
						$w_2 W\!M\!S\!E_2$		
(1, 1)	(-0.0166, -1.6820, 1.6820)	(1.7349, 0.0627)	(0.7422, 0.1549)	0.3739	0.0609	0.4347		
(2, 1)	(0.1195, -1.6820, 0.9234)	(1.6814, 0.0615)	(0.8286, 0.1552)	0.3216	0.0705	0.7136		
(3, 1)	(0.2335, -1.6820, -1.1387)	(1.5485, 0.0604)	(1.0427, 0.1560)	0.2087	0.0987	0.7248		
(4, 1)	(0.3178, -1.6820, -1.6820)	(1.5054, 0.0596)	(1.1112, 0.1570)	0.1774	0.1093	0.8187		
(5, 1)	(0.3916, -1.6820, -1.6820)	(1.4969, 0.0589)	(1.1281, 0.1580)	0.1715	0.1123	0.9697		
(6, 1)	(0.4546, -1.6820, -1.6820)	(1.4901, 0.0583)	(1.1444, 0.1591)	0.1668	0.1152	1.1161		
(7, 1)	(0.4518, -1.5520, -1.6820)	(1.4587, 0.0584)	(1.2266, 0.1590)	0.1463	0.1288	1.1527		
(8, 1)	(0.4407, -1.4180, -1.6820)	(1.4277, 0.0585)	(1.3078, 0.1588)	0.1273	0.1432	1.1614		
(9, 1)	(0.4305, -1.2984, -1.6820)	(1.4004, 0.0586)	(1.3791, 0.1586)	0.1117	0.1565	1.1618		
(10, 1)	(0.4212, -1.1917, -1.6820)	(1.3764, 0.0586)	(1.4418, 0.1585)	0.0988	0.1689	1.1572		

Table 2(a)와 같이 \boldsymbol{x}^{*} =(0.3812, -1.1709, -1.6820)로 도출 되었고, 그에 따라 $(\hat{\mu}_{1}^{*}, \hat{\sigma}_{1}^{*})$ =(1.3789, 0.0590), $(\hat{\mu}_{2}^{*}, \hat{\sigma}_{2}^{*})$ =(1.4358, 0.1578), $WMSE_{1}$ =0.1001, $WMSE_{2}$ =0.1675로 나타났다. 식 (22)의 목적함수의 값은 0.2676 으로 나타났다.

5.2.3 문제풀이 결과 토의

본 논문에서 제안된 WMSE 접근법과 기존의 MSE 접 근법을 비교하기 위하여, 본 문제를 MSE 접근법으로도 풀어 보았다. 구체적으로, 식 (20), (21)에서 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$ 로 두고 식 (22)를 다시 풀었다. 여기서 w_1 와 w_2 는 동일하 게 1로 두었다. 그 결과, Table 2와 같이 $\boldsymbol{x}^* = (-0.0166,$ -1.6820, 1.6820)로 도출되었고, 그에 따라 $(\hat{\mu}_1^*, \hat{\sigma}_1^*) =$ (1.7349, 0.0627), $(\hat{\mu}_2^*, \hat{\sigma}_2^*) = (0.7422, 0.1549)$ 로 나타났다.

여기서 λ₁과 λ₂의 실제 값이 0.5가 아니라 λ₁=0.69, λ₂=0.07이라면, 도출된 **x**^{*}에 따른 WMSE의 값은 Table 2와 같이 *WMSE*₁=0.3739, *WMSE*₂=0.0609가 되며, 식 (22)의 목적함수의 값은 0.4347이 된다. 이를 WMSE 접 근법으로 푼 결과와 비교하면, *WMSE*₂는 조금 감소한 반면(0.1675→0.0609), *WMSE*₁는 급격히 늘어났다 (0.1001→0.3739). 그 결과, 식 (22)의 목적함수의 값도 크 게 증가했다(0.2676→0.4347). 참고로 WMSE 또는 MSE 는 작으면 작을수록 바람직하다.

두 반응변수의 WMSE에 대한 가중치인 w_1 과 w_2 를 다양하게 설정하여 본 문제를 풀어 보았다. 그 결과, w_1 = w_2 =1로 설정한 경우와 마찬가지로 MSE 접근법이 WMSE 접근법에 비해 식 (22)의 목적함수의 값이 더 크 게 생성되는 것을 확인할 수 있었다(Table 2 참조). 이상 의 MSE와 WMSE 간 비교결과는 다음과 같은 명제로 일 반화된다.

(명제) 어떤 다중반응표면 문제에 대하여, 식 (13)의 WMSE 가중합($\sum w_i WMSE_i$)을 최소화하는 입력변수의 해를 x^* 로 두고 식 (8)의 MSE 가중합($\sum w_i MSE_i$)을 최 소화하는 입력변수의 해를 x^0 로 둔다면, $\sum w_i WMSE_i^*$ 는 $\sum w_i WMSE_i^0$ 보다 항상 작거나 같다. 여기서 $\sum w_i WMSE_i^*$ 는 $x = x^*$ 일 때 식 (13)의 목적함수값을, $\sum w_i WMSE_i^0$ 는 $x = x^0$ 일 때 식 (13)의 목적함수값을 의미한다. 단, x^* 와 x^0 는 전체 최적해(global optimal solution)임을 전제로 한다. (증명) x^* 는 WMSE 가중합(식 (13))을 최소화하는 최 적해이므로, $x = x^*$ 인 경우 식 (13)의 목적함수값 ($\sum w_i WMSE_i^*$)은 가능한 범위($x \in \Omega$)에서 최소가 된다. $x \neq x^*$ 인 경우 목적함수값은 $\sum w_i WMSE_i^*$ 보다 크거 나 같다. 같은 경우는 식 (13)의 최적해가 복수인 경우에 발생한다. x^0 는 MSE 가중합(식 (8))을 최소화하는 최적 해로, $x^0 \neq x^*$ 이면, $x = x^0$ 에서의 식 (13)의 목적함수값 ($\sum w_i WMSE_i^0$)은 $\sum w_i WMSE_i^*$ 보다 크거나 같다. 그 렇지 않고 $x^0 = x^*$ 이면, $x = x^0$ 에서의 식 (13)의 목적함 수값($\sum w_i WMSE_i^0$)은 $\sum w_i WMSE_i^*$ 와 같다. 따라서 $\sum w_i WMSE_i^* = \sum w_i WMSE_i^0$ 보다 항상 작거나 같다. 증명 끝.

결론적으로, 반응변수의 제곱편차와 분산에 대한 서로 다른 가중치를 부여해야 하는 상황에서 WMSE 접근법을 적용하여야 제곱편차와 분산에 동일한 가중치를 부여하 는 MSE 접근법 보다 우수한 해를 도출할 수 있다.

6. 결론 및 추후 연구방향

본 논문에서는 다중반응표면 최적화를 위하여 WMSE 최소화 접근법을 사용할 것을 제안하였다. 기존 MSE 접 근법은 제곱편차와 분산에 동일한 가중치를 부여하는 것 을 전제로 하고 있다. 그러나 이 두 요소에 대하여 서로 다른 가중치를 부여해야 하는 경우가 흔히 존재하기 때 문에, 제곱편차와 분산에 서로 다른 가중치를 부여하는 WMSE 접근법을 채택하는 것이 바람직하다. 본 논문에 서는 구체적으로 개별 WMSE_i에서 λ_i를 결정하는 방법 으로 평균과 표준편차의 이상치에 가장 가까운 실현가능 한(feasible) 평균, 표준편차의 조합으로부터 λ_i를 구하는 데이터기반법을 채택하였다. 그리고 개별 WMSE_i를 종 합하는 방법으로 가중합을 선택하였다.

본 논문에서 제안한 WMSE 최소화 접근법은 다중반 응표면 최적화를 위하여 MSE만을 고려하여 온 학계의 연구경향 속에서 새로운 대안을 제시하였다는 학문적 기 여가 있다. 하나의 반응변수를 최적화할 때 MSE 대신 WMSE를 적용하는 연구는 진행되어 왔으나, 다중반응표 면 최적화 연구에 있어서는 아직까지 적용되지 않았다. 본 논문은 다중반응표면 최적화를 위해 WMSE의 적용을 최초로 제안하였다.

제안된 방법은 실용적인 측면에서도 큰 기여를 할 것 으로 기대된다. 앞서 5장의 문제에서와 같이 실제 문제에 서 제곱편차와 분산에 서로 다른 가중치를 부여해야 하 는 상황에서는 제안된 방법이 현실적인 상황에 더 적합 한 해를 도출하기 때문에 현장적용성 측면에서 더 우수 할 것으로 기대된다.

본 논문의 추후 연구주제로, λ_i의 결정에 의사결정자 의 선호도를 고려한 방법을 적용하는 것을 들 수 있다. 본 논문에서 채택한 데이터기반법은 데이터를 활용하여 기계적으로 λ_i를 도출한다. 그러나 현실에서는 품질 및 비용과 관련된 다양한 요소 간 트레이드오프를 고려하여 λ_i 를 구해야 한다. 이는 곧 기업의 품질정책을 잘 이해하 고 있는 의사결정자의 선호도 정보를 고려하여 λ,를 도 출하여야 한다는 것이다. 추후 연구에서는 데이터기반법 대신 선호도기반법이나 대화식결정방법과 같이 의사결정 자의 선호도를 고려하는 방법을 적용할 필요가 있다.

또 다른 연구주제로, 개별 WMSE;의 종합 시 Tchebycheff 방법을 적용하는 것을 들 수 있다. 본 논문 에서 채택한 가중합 방법은 볼록하지 않은(nonconvex) 구간을 포함하고 있는 목적함수 공간에 최적해가 존재한 다면 이를 찾아내지 못하는 한계를 가지고 있다. 그러나 Tchebycheff 방법은 nonconvex 구간에서도 최적해를 찾 아낼 수 있다[23-24, 30]. 추후 연구에서는 가중합 방법 대신 Tchebycheff 방법을 적용할 필요가 있다. 식 (23)은 Tchebycheff 방법을 적용한 최적화 모형을 보여주고 있 다. 이 식에서 *WMSE*^{*},는 *WMSE*;의 이상치를, w_i는 WMSE;와 WMSE;* 간의 거리에 대한 가중치를 의미 한다.

$$LexMin \quad [\alpha, \sum_{i=1}^{k} (WMSE_{i} - WMSE_{i}^{*})]$$
(23)
s.t. $w_{i} (WMSE_{i} - WMSE_{i}^{*}) \leq \alpha,$
 $i = 1, \cdots, k,$
 $\sum_{i=1}^{k} w_{i} = 1,$
 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega}.$

마지막으로, 개별 WMSE; 를 종합할 때 각 WMSE; 에 대한 가중치를 결정하는 방법의 개발을 들 수 있다. 개별 WMSE; 의 종합을 위해 가중합 또는 바로 위에서 언급한 Tchebycheff 방법을 적용하는 경우 가중치 w_i 를 고려할 수 있다. 그러나 현재까지 WMSE 접근법은 물론 MSE 접근법에서도 w;의 체계적인 결정방법에 대한 연 구가 진행되지 않고 있다. 향후 w,의 결정방법에 관한 연 구가 필요할 것으로 판단된다.

References

- [1] Box, G. E. P. and Draper, N. R., Empirical Model Building and Response Surfaces, John Wiley & Sons, New York, NY, 1987.
- [2] Khuri, A. I. and Cornell, J., Response Surfaces: Designs and Analyses, Dekker, New York, NY, 1996.
- [3] Myers, R. H. and Montgomery, D. C., Response Surface Methodology, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York, NY, 2002.
- [4] Khuri, A. I., "Multiresponse Surface Methodology", In Handbook of Statistics: Design and Analysis of Experiment (Vol. 13) (eds. A. Ghosh and C. R. Rao), pp. 377-406, 1996.
- [5] Myers, R. H., Khuri, A., and Carter, W. H., Jr., "Response Surface Methodology : 1966-1988", Technometrics, Vol. 31, No. 2, pp. 137-157, 1989. DOI: http://dx.doi.org/10.2307/1268813
- [6] Myers, R. H., "Response Surface Methodology Current Status and Future Directions", Journal of Quality Technology, Vol. 31, No. 1, pp. 30-44, 1999.
- [7] Myers, R. H., Montgomery, D. C., Vining, G. G., Borror, C. M., and Kowalski, S. M., "Response Surface Methodology: A Retrospective and Literature Survey", Journal of Quality Technology, Vol. 36, No. 1, pp. 53-77, 2004.
- [8] Ardakani, M. K. and Wulff, S. S., "An Overview of Optimization Formulations for Multiresponse Surface Problems", Quality and Reliability Engineering International (Published online in Wiley Online Library (wileyonlinelibrary.com), 2012.

DOI: http://dx.doi.org/10.1002/gre.1288

- [9] Jeong, I. "Multiresponse Optimization: A Literature Review and Research Opportunities", Journal of the Korean Society for Quality Management, Vol. 39, No. 3, pp. 377-390, 2011.
- [10] Taguchi, G. and Wu, Y., "Off-line Quality Control", Central Japan Quality Control Association (available from American Supplier Institute, Dearborn, MI), 1979.
- [11] Ross, P. J., Taguchi Techniques for Quality Engineering, McGraw-Hill Book Company, San Francisco, CA, 1988.
- [12] Köksoy, O., "Multiresponse Robust Design: Mean Square Error (MSE) Criterion", Applied Mathematics and Computation, Vol. 175, No. 2, pp. 1716-1729, 2006. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2005.09.016
- [13] Pignatiello, J.. "Strategies for Robust Multiresponse Quality Engineering". IIE Transactions, Vol. 25, No. 3, pp. 5-15, 1993.

DOI: http://dx.doi.org/10.1080/07408179308964286

- [14] Ko, Y., Kim, K., and Jun, C., "A New Loss Function-Based Method for Multiresponse Optimization", Journal of Quality Technology, Vol. 37, No. 1, pp. 50-59, 2005.
- [15] Ames, A. E., Mattucci, N., MacDonald, S., Szonyi, G., and Hawkins, D. M., "Quality Loss Functions for Optimization Across Multiple Response Surfaces", Journal of Quality Technology, Vol. 29, No. 3, pp. 339-346, 1997.
- [16] Rheem, S. and Lee, W. "Multiresponse Optimization in Response Surface Analysis: A Method by Minimization of Weighted Sum of Estimates of Expected Squared Relative Errors", Journal of the Korean Society for Quality Management, Vol. 33, No. 1, pp. 73-82, 2004.
- [17] Lijuan, S., Yu, Z., and Jun, Y., "Mean Square Error Criteria to Multiple Quality Characteristics Robust Design by the Weighted Tchebycheff Method", Advanced Materials Research, Vols. 118-120, pp. 881-885, 2010. DOI: http://dx.doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.118-120.881
- [18] Shin, S., Samanlioglu, F., Cho, B. B., and Wiecek, M. M., "Computing Trade-Offs in Robust Design: Perspectives of the Mean Squared Error", Computers and Industrial Engineering, Vol. 60, No. 2, pp. 248-255, 2011. DOI: <u>http://dx.doi.org/10.1016/j.cie.2010.11.006</u>
- [19] Vining, G., "A Compromise Approach to Multiresponse Optimization". Journal of Quality Technology, Vol. 30, No. 4, pp. 309-313, 1998.
- [20] Köksoy, O. and Yalcinoz, T., "Mean Square Error Criteria to Multiresponse Process Optimization by a New Genetic Algorithm", Applied Mathematics and Computation, Vol. 175, No. 2, pp. 1657-1674, 2006. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2005.09.011
- [21] Köksoy, O., "A Nonlinear Programming Solution to Robust Multi-Response Quality Problem", Applied Mathematics and Computation, Vol. 196, No. 2, pp. 603-612, 2008.
 - DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2007.06.023
- [22] Keeney, R. and Raiffa, H., Decisions with Multiple Objectives, Wiley, New York, NY, 1976.
- [23] Hwang, C. L., Masud, A. S. M., Paidy, S. R., and Yoon, K., Multiple Objective Decision Making -Methods and Applications (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems), Springer-Verlag, Berlin, 1979. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-45511-7
- [24] Steuer, R. E., Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application, John Wiley & Sons, New York, NY, 1986.
- [25] Lin, D. and Tu, W., "Dual Response Surface Optimization", Journal of Quality Technology, Vol. 27, No. 1, pp. 34-39, 1995.

- [26] Ding, R., Lin, D. K. J., and Wei, D., "Dual Response Surface Optimization: A Weighted MSE Approach", Quality Engineering, Vol. 16, No. 3, pp. 377-385, 2004. DOI: http://dx.doi.org/10.1081/QEN-120027940
- [27] Jeong, I., Kim, K., and Chang, S. Y., "Optimal Weighting of Bias and Variance in Dual Response Surface Optimization", Journal of Quality Technology, Vol. 37, No. 3, pp. 236-247, 2005.
- [28] Lee, D. and Kim, K., "Interactive Weighting of Bias and Variance in Dual Response Surface Optimization", Expert Systems with Applications, Vol. 39, No. 5, pp. 5900-5906, 2012.

DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.eswa.2011.11.114

- [29] Romano, D., Varetto, M., and Vicario, G., "Multiresponse Robust Design: A General Framework Based on Combined Array", Journal of Quality Technology, Vol. 36, No. 1, pp. 27-37, 2004.

DOI: http://dx.doi.org/10.1007/3-540-44719-9_1

정 인 준(In-Jun Jeong)

[정회원]

- 2006년 2월 : 포항공과대학교 산 업경영공학과 (공학박사)
- 2006년 2월 ~ 2010년 4월 : 한 국전자통신연구원 선임연구원
- 2010년 5월 ~ 2012년 2월 : 정 보통신정책연구원 부연구위원
- 2012년 3월 ~ 현재 : 대구대학교 경영학과 조교수

<관심분야> 품질경영/공학, 생산운영관리, 통신전파정책

조 현 우(Hyun-Woo Cho)

[정회원]



<관심분야> 지능형 프로세스 모니터링, 데이터마이닝

- 2003년 8월 : 포항공과대학교 산 업경영공학과 (공학박사)
- 2003년 8월 ~ 2007년 8월 : 조 지아텍/테네시대 연구원
- 2007년 9월 ~ 2011년 2월 : 삼 성전자 책임연구원
- 2011년 3월 ~ 현재 : 대구대학교 산업경영공학과 조교수