

라그랑지 보간과 근의 이동범위를 이용한 회전형 도립진자의 적응 최적 제어

박민호^{1*}, 한상완¹

¹충남도립청양대학 전기전자과

Adaptive Optimal Control of a Rotary Inverted Pendulum Using Lagrange Interpolation and a Pole's Moving-Range

Minho Park^{1*} and Sang-Wan Han¹

¹Electrical & Electronics Engineering, Chungnam Provincial Chengyang College

요 약 이 논문은 변수가 변화하는 시스템의 새로운 최적제어 설계 방법에 관한 것이다. 이 문제를 다루는데 사용된 방법은 라그랑지 보간법과 근의 이동범위이다. 변수가 변화하는 범위 내에서 선택된 시스템의 최적제어기의 설계 변수를 근의 이동범위를 이용하여 상태가중행렬을 계산하고 상태가중행렬을 라그랑지 보간법으로 보간하여 최적제어기를 설계하였다. 모의실험을 통해 기존의 방식과 제안한 방법을 비교하고, 기존의 최적제어 설계법보다 제안한 방식이 더 좋은 결과가 얻어지는 것을 확인하였다.

Abstract This paper presents a new design method of optimal control of system which are changed the system parameters. The method used for this purpose are the Lagrange interpolation method and Pole's Moving range method. We selects a system within the scope of the changing the system parameters. Using pole's moving range we calculated the state weighting matrix of optimal control. The optimal controller is designed by Lagrange interpolation method of the state weighting matrix. We are compared with a traditional optimal controller and proposed method by simulation. The simulation showed that the proposed method is better control performance than traditional method of optimal controller.

Key Words : Adaptive, Interpolation, Inverted pendulum, Optimal Control, Pole's Moving Range

1. 서론

비선형 시스템의 제어기는 비선형 시스템을 평형점 부근에서 선형화를 하고 선형화된 시스템을 기반으로 다양한 기법을 활용하여 시스템을 안정화하고 설계 조건을 충족시키는 출력을 갖도록 설계된다. 설계 기법으로는 최적제어, PID, 극배치 기법 등의 방법이 있다. 최적제어는 선형 시스템의 상태방정식을 제한조건으로 하고 가중된 상태변수의 제곱과 가중된 제어 입력의 제곱의 합의 식으로 표현되는 성능지수를 최소화 방법으로 제어기를 설계하며 (6,∞)[dB]의 이득여유와 60°의 위상여유의 강인성 보장한다[8]. 시스템의 변수가 변화하면 최적제어는 시스템의 안정성을 보장할 수 없을 뿐만 아니라 설계조

건을 만족하는 성능을 얻지 못하는 결점을 가지고 있다. 이운영[6]은 시스템 변수의 변화에 대해 제어기의 적응성을 부여하기 위해 라그랑지 보간법을 적용한 최적제어기 설계 방법을 제시하였다. 이 방법은 먼저 시스템 변수가 변화 할 수 있는 범위 안에서 몇 개의 시스템 방정식을 유도하고 유도된 각각의 시스템에 대한 최적제어기의 제어법칙을 설계하였다. 그리고 그 외의 시스템의 제어기는 라그랑지 보간법으로 제어법칙을 계산하였다. 선택된 시스템은 상태가중행렬과 제어가중행렬로부터 제어법칙을 계산하였기 때문에 최적제어기 성능을 가지고 있지만 보간법으로 계산된 다른 부분에 대한 시스템의 제어법칙은 가중행렬의 값을 알 수 없어서 설계된 제어기가 최적제어의 성능을 가지고 있다고 할 수 없다. 이러한 문제점

*Corresponding Author : Minho Park (Chungnam Provincial Chengyang College)

Tel : +82-41-635-6766 email: minhinf@gmail.com

Received January 16, 2014 Revised February 4, 2014 Accepted February 5, 2014

은 제어법칙으로 보간하여 발생한 것이다.

변수의 변화 범위 안에서 선택된 시스템들이 가지는 각각의 극점을 계산하고 각각 시스템의 극점이 이동할 수 있는 근의 이동범위(Pole's Moving Range)와 설계 조건을 만족하는 영역을 s-평면에 그리고 중첩이 되는 영역에서 원하는 근을 선택하여 상태가중행렬을 계산한다. 이것을 라그랑지 보간법으로 보간하여 상태가중행렬을 계산하여 제어를 얻는 새로운 적응 최적 제어 설계 방법을 제시하고 회전형 도립진자에 제시한 방법을 적용하여 문제점이 해결되는 것을 모의실험으로 확인하였다.

2. 제어이론

2.1 최적제어

비선형 시스템을 선형화한 상태방정식은

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (1)$$

로 표현된다. 여기서 벡터 x 는 $n \times 1$ 인 시스템의 상태 변수이고, 벡터 u 는 $m \times 1$ 인 제어입력이다. 그리고 A 는 $n \times n$, B 는 $n \times m$ 그리고 C 는 $1 \times n$ 상수 행렬이다. 제어 가능한 시스템의 근은 서로 다르고 원점을 제외하고는 허수축에 존재하지 않는다고 가정하면 시스템의 n 개의 서로 다른 근을

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \quad (2)$$

로 표현한다. 원점에 극점을 가지는 경우에만 λ_2 을 0으로 설정한다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (3)$$

은 최적 제어의 성능지수 함수이다. 여기서 상태가중행렬 Q 는 $n \times n$ 인 양의 반한정대칭행렬이고 제어가중행렬 R 은 1×1 인 양의 한정대칭행렬이다. 시스템의 상태방정식을 만족하면서 성능지수 함수를 최소화 하는 제어법칙은 Lagrange 곱수(multiplier) λ 를 적용한 성능지수

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (H - \lambda^T \dot{x}) dt \quad (4)$$

를 최소화하는 것과 같다.

여기서 $H = \frac{1}{2}(x^T Q x + u^T R u) + \lambda^T (Ax + Bu)$ 이다.

성능지수를 최소화하는 제어법칙은 Euler 방정식에서 유도되는 조건으로부터

$$u = -R^{-1} B^T \lambda = -R^{-1} B^T P x = -K x \quad (5)$$

이 얻어지고 변수 λ 는 시스템이 선형 시불변이고 제어

가능하면

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -V \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (6)$$

의 Hamiltonian 시스템으로부터

$$\lambda = P x \quad (7)$$

로 표현된다. 여기서 $V = BR^{-1}B^T$ 이다. 변수 P 는

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (8)$$

의 Riccati 방정식의 유일한 해이며 가중행렬 Q 와 R 에 의해 결정된다.

2.2 근의 이동범위

제어 법칙의 설계 변수인 가중행렬 중에서 제어가중행렬을 상수로 설정하면 시스템의 근은 상태가중행렬에 의해 이동된다. 상태가중행렬에 의해 이동되는 근의 이동범위는 근의 종류에 따라 다르게 표현된다. 서로 다른 근을 가지는 시스템의 특성방정식은 1차 또는 2차의 연속적인 곱으로 표현되므로 근의 종류는 1차 방정식의 근인 실근, 2차 방정식의 근인 서로 다른 두 실근과 한 쌍의 복소근으로 3가지가 된다. Hamiltonian 시스템의 특성방정식의 근이 갖는 특성에서 상태가중행렬에 의해 이동되는 근의 범위가 식으로 표현된다.

행렬 A 는 근이 서로 다르기 때문에 변환행렬 T 에 의해 대각행렬 $\Lambda (= T^{-1}AT)$ 로 변환된다. 특히 시스템의 근이 모두 실근이면 Λ 는 (9)의 왼쪽처럼 표현되고, 시스템이 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ 와 같이 한 쌍의 복소근을 가지면 (9)의 오른쪽처럼 표현된다[9].

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 & \dots & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (9)$$

T 에 의해 시스템 상태방정식, Hamiltonian 시스템과 성능지수가 다음과 같이 변환된다.

$$\dot{z} = \Lambda z + \tilde{B} u \quad (10)$$

$$J = \int_0^{\infty} (z^T \tilde{Q} z + u^T R u) dt \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda & -\tilde{V} \\ -\tilde{Q} & -\Lambda^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} = \tilde{F} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (12)$$

여기서 $\tilde{B} = T^{-1}B$, $\tilde{Q} = T^T Q T$,

$$\tilde{V} = \tilde{B} R^{-1} \tilde{B}^T = \begin{bmatrix} \tilde{v}_{11} & \tilde{v}_{12} & \dots & \tilde{v}_{1n} \\ \tilde{v}_{12} & \tilde{v}_{22} & \dots & \tilde{v}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{v}_{1n} & \tilde{v}_{2n} & \dots & \tilde{v}_{nn} \end{bmatrix} \text{이다.}$$

2.2.1 1차 시스템 근의 이동범위

근 중에서 이동할 1차 시스템의 근은 변환행렬을 이용하면 λ_1 의 위치로 이동된다. 상태가중행렬을

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

으로 설정하고 λ_1 을 원하는 실근 p_s 으로 이동시키는 근과 가중행렬의 관계식을 Hamiltonian 시스템의 특성방정식으로부터 유도하면

$$\tilde{q}_{11} = \frac{p_s^2 - \lambda_1^2}{\tilde{v}_{11}} \quad (14)$$

가 된다. 상태가중행렬 \tilde{Q} 가 양의 반한정대칭행렬이 될 조건[7]으로부터 Solheim은 λ_1 이 이동되는 p_s 근의 이동범위를

$$p_s \leq -|\lambda_1| \quad (15)$$

로 제시하였다[1].

2.2.2 2차 시스템 근의 이동범위

n개의 근 중에서 이동할 2차 시스템의 근을 변환행렬을 이용하여 λ_1, λ_2 로 표현하고 이를 원하는 페루프 근으로 이동시키는 상태가중행렬을

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \rho \cos^2 \theta & \rho \cos \theta \sin \theta & 0 & \cdots & 0 \\ \rho \cos \theta \sin \theta & \rho \sin^2 \theta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

으로 설정하고[2] Hamiltonian 시스템의 특성방정식을 이용하여 근과 가중행렬의 관계식이 유도되고, \tilde{Q} 가 양의 반한정대칭행렬이 되기 위한 조건[7]

$$\rho > 0, -\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2} \quad (17)$$

로부터 근의 이동범위가 식으로 표현된다. 근과 가중행렬의 관계식과 근의 이동범위는 다음과 같다.

- ① 복소근 $\lambda_1, \lambda_2 (\alpha \pm j\beta)$ 이 페루프 복소근 $\gamma \pm j\delta$ ($\gamma \neq 0, \delta \neq 0$)로 이동하는 경우[3] 근과 가중행렬의 관계식은 다음 같다.

$$\rho = \frac{e_{c14}}{\cos^2 \theta e_{c11} + \cos \theta \sin \theta e_{c12} + \sin^2 \theta e_{c13}} \quad (18)$$

또는

$$= \frac{e_{c24}}{\cos^2 \theta e_{c21} + \cos \theta \sin \theta e_{c22} + \sin^2 \theta e_{c23}}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{-e_{c2} \pm \sqrt{e_{c2}^2 - 4e_{c1}e_{c3}}}{2e_{c3}} \right) \quad (19)$$

여기서 $e_{c1} = e_{c14} e_{c21} - e_{c24} e_{c11}$,

$$e_{c2} = e_{c14} e_{c22} - e_{c24} e_{c12}, e_{c3} = e_{c14} e_{c23} - e_{c24} e_{c13},$$

$$e_{c11} = \tilde{v}_{11}, e_{c12} = 2\tilde{v}_{12}, e_{c13} = \tilde{v}_{22},$$

$$e_{c14} = 2(\gamma^2 - \delta^2 - \alpha^2 + \beta^2),$$

$$e_{c21} = \alpha^2 \tilde{v}_{11} - 2\alpha\beta \tilde{v}_{12} + \beta^2 \tilde{v}_{22},$$

$$e_{c22} = 2(\alpha^2 \tilde{v}_{12} - \alpha\beta(\tilde{v}_{22} - \tilde{v}_{11}) - \beta^2 \tilde{v}_{12}),$$

$$e_{c23} = \alpha^2 \tilde{v}_{22} + 2\alpha\beta \tilde{v}_{12} + \beta^2 \tilde{v}_{11},$$

$$e_{c24} = (\gamma^2 + \delta^2)^2 - (\alpha^2 + \beta^2)^2 \text{ 이다.}$$

식(17)의 조건에 의해 근의 이동범위는 아래 조건을 만족하는 영역이다.

$$\begin{aligned} \gamma^2 - \delta^2 &> \alpha^2 - \beta^2, \\ \gamma^2 + \delta^2 &> \alpha^2 + \beta^2, \\ e_{c2}^2 - 4e_{c1}e_{c3} &\geq 0 \end{aligned} \quad (20)$$

- ② 복소근 $\lambda_1, \lambda_2 (\alpha \pm j\beta)$ 이 페루프의 서로 다른 두 실근 p_{r1}, p_{r2} 으로 이동하는 경우[4] 근과 가중행렬의 관계식은 다음 같다.

$$\rho = \frac{e_{c44}}{\cos^2 \theta e_{c41} + \cos \theta \sin \theta e_{c42} + \sin^2 \theta e_{c43}} \quad (21)$$

또는

$$= \frac{e_{c54}}{\cos^2 \theta e_{c51} + \cos \theta \sin \theta e_{c52} + \sin^2 \theta e_{c53}}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{-e_{c5} \pm \sqrt{e_{c5}^2 - 4e_{c4}e_{c6}}}{2e_{c6}} \right) \quad (22)$$

여기서 $e_{c4} = e_{c44} e_{c51} - e_{c54} e_{c41}$,

$$e_{c5} = e_{c44} e_{c52} - e_{c54} e_{c42},$$

$$e_{c6} = e_{c44} e_{c53} - e_{c54} e_{c43},$$

$$e_{c41} = \tilde{v}_{11}, e_{c42} = 2\tilde{v}_{12}, e_{c43} = \tilde{v}_{22},$$

$$e_{c44} = p_{r1}^2 + p_{r2}^2 - 2(\alpha^2 - \beta^2),$$

$$e_{c51} = \alpha^2 \tilde{v}_{11} - 2\alpha\beta \tilde{v}_{12} + \beta^2 \tilde{v}_{22},$$

$$e_{c52} = 2(\alpha^2 \tilde{v}_{12} - \alpha\beta(\tilde{v}_{22} - \tilde{v}_{11}) - \beta^2 \tilde{v}_{12}),$$

$$e_{c53} = \alpha^2 \tilde{v}_{22} + 2\alpha\beta \tilde{v}_{12} + \beta^2 \tilde{v}_{11},$$

$$e_{c54} = p_{r1}^2 p_{r2}^2 - (\alpha^2 + \beta^2)^2 \text{ 이다.}$$

식(17)의 조건에 의해 근의 이동범위는 아래 조건을 만족하는 영역이 된다.

$$\begin{aligned} p_{r1}^2 + p_{r2}^2 &> 2(\alpha^2 - \beta^2), \\ p_{r1} p_{r2} &> \alpha^2 + \beta^2, \\ e_{c5}^2 - 4e_{c4}e_{c6} &\geq 0 \end{aligned} \quad (23)$$

③ 서로 다른 실근 λ_1, λ_2 이 페루프 복소근 $\gamma \pm j\delta$ ($\gamma \neq 0, \delta \neq 0$) 로 이동하는 경우[5] 근과 가중행렬의 관계식은 다음과 같다.

$$\rho = \frac{e_{r14}}{\cos^2 \theta e_{r11} + \cos \theta \sin \theta e_{r12} + \sin^2 \theta e_{r13}} \quad (24)$$

또는

$$\rho = \frac{e_{r24}}{\cos^2 \theta e_{r21} + \cos \theta \sin \theta e_{r22} + \sin^2 \theta e_{r23}}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{-e_{r2} \pm \sqrt{e_{r2}^2 - 4e_{r1}e_{r3}}}{2e_{r3}} \right) \quad (25)$$

여기서 $e_{r1} = e_{r14} e_{r21} - e_{r24} e_{r11}$,
 $e_{r2} = e_{r14} e_{r22} - e_{r24} e_{r12}$,
 $e_{r3} = e_{r14} e_{r23} - e_{r24} e_{r13}$, $e_{r11} = \tilde{v}_{11}$, $e_{r12} = 2\tilde{v}_{12}$,
 $e_{r13} = \tilde{v}_{22}$, $e_{r14} = 2(\gamma^2 - \delta^2) - \lambda_{r1}^2 - \lambda_{r2}^2$,
 $e_{r21} = \lambda_{r2}^2 \tilde{v}_{11}$, $e_{r22} = 2\lambda_{r1} \lambda_{r2} \tilde{v}_{12}$,
 $e_{r23} = \lambda_{r1}^2 \tilde{v}_{22}$, $e_{r24} = (\gamma^2 + \delta^2)^2 - \lambda_{r1}^2 \lambda_{r2}^2$ 이다.
 식(17)의 조건에 의해 근의 이동범위는 아래 조건을 만족하는 영역이다.

$$\begin{aligned} \gamma^2 - \delta^2 &> \frac{1}{2}(\lambda_{r1}^2 + \lambda_{r2}^2), \\ \gamma^2 + \delta^2 &> |\lambda_{r1} \lambda_{r2}|, \\ e_{r2}^2 - 4e_{r1}e_{r3} &\geq 0 \end{aligned} \quad (26)$$

2.3 라그랑지 보간법

범위 안의 유한개의 분점 h_0, h_1, \dots, h_r 에 대한 함수 값 $g(h_0), g(h_1), \dots, g(h_r)$ 을 알면 분점 이외의 점에서 함수 값을 구하는 것이 보간법으로 라그랑지 보간법, 뉴턴 보간법, 스플라인 보간법 등이 있다.

미지함수 $g(h)$ 를 보간 다항식 $I(h)$ 로 근사하면

$$I(h) = \sum_{k=0}^r a_k h^k \quad (27)$$

이 되고, $r+1$ 개의 각 분점 $h_k (k=0,1,2,\dots,r)$ 에서

$$I(h_k) = g(h_k) \quad (28)$$

을 만족하기 위해 r 차 라그랑지 다항식

$$I(h) = \sum_{k=0}^r L_{r,k}(h) g(h_k) \quad (29)$$

가 된다. 여기서

$$L_{r,k}(h_i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & (i=k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases} \quad (30)$$

$$L_{r,k}(h) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^r \frac{(h-h_i)}{(h_k-h_i)} \quad (31)$$

이다.

2.4 적응 최적 제어

최적 제어는 시스템의 변수가 변화하면 안정성을 보장하지 못한다. 최적 제어의 특성을 유지하기 위해서는 일정 범위 내에서 변화하는 변수에 해당하는 시스템의 최적 제어를 모두 설계해야하는데 이는 현실적으로 적용하기가 어렵다. 변수가 변화하는 범위 내에서 몇 개의 시스템을 선택하고 이들 시스템의 근의 이동범위를 도시하여 공통 영역에 있으면서 설계조건을 만족하는 페루프 근을 선택하여 설계된 시스템의 모든 근이 동일하게 되도록 하는 상태가중행렬을 설계한다. 범위 내에 있는 다른 시스템의 상태가중행렬은 가장 보편적으로 사용하는 라그랑지 보간법으로 계산한다. 이러한 방법으로 상태가중행렬을 계산하여 제어 법칙을 계산하기 때문에 시스템의 변수가 변화하더라도 시스템의 제어기는 최적 제어 성능을 유지할 수 있다.

제한된 범위에서 $(r+1)$ 개의 시스템을 선택하고 선택된 i 번째 시스템의 극점을 원하는 페루프 극점으로 이동시키는 상태가중행렬을

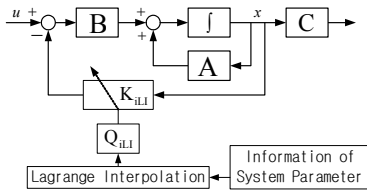
$$Q_i = \begin{bmatrix} q_{i-11} & q_{i-12} & q_{i-13} & \cdots & q_{i-1n} \\ q_{i-12} & q_{i-22} & q_{i-23} & \cdots & q_{i-2n} \\ q_{i-13} & q_{i-23} & q_{i-33} & \cdots & q_{i-3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{i-1n} & q_{i-2n} & q_{i-3n} & \cdots & q_{i-nn} \end{bmatrix} \quad (32)$$

로 정의한다. 여기서 $i=1,2,\dots,r,r+1$ 이다. 라그랑지 보간법으로 최종적으로 얻어지는 상태가중행렬은

$$Q_{iLI} = \begin{bmatrix} q_{LL11} & q_{LL12} & q_{LL13} & \cdots & q_{LL1n} \\ q_{LL12} & q_{LL22} & q_{LL23} & \cdots & q_{LL2n} \\ q_{LL13} & q_{LL23} & q_{LL33} & \cdots & q_{LL3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{LL1n} & q_{LL2n} & q_{LL3n} & \cdots & q_{LLnn} \end{bmatrix} \quad (33)$$

이다. 여기서 $q_{LL,jk}(h) = \sum_{i=0}^r L_{jk,r,i}(h) q_{jk}(h_i)$ 이다.

보간법으로 계산된 가중행렬로부터 제어 법칙을 계산하면 변화하는 시스템의 최적제어 기능을 가지는 제어기를 설계할 수 있다. Fig. 1은 적응 최적 제어를 나타낸다.



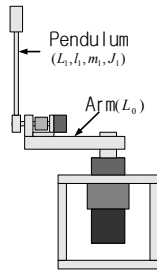
[Fig. 1] Block diagram for Adaptive optimal control with Lagrange interpolation method

3. 모의실험

제한한 제어기 설계 방법의 유효성과 강인성을 확인하기 위해 진자의 길이가 변화하는 회전형 도립진자를 대상으로 모의실험을 실시하였다.

3.1 시스템 모델링

Fig. 2은 회전형 도립진자의 모습이고 시스템의 변수 값은 Table 1과 같다.



[Fig. 2] Rotary type Inverted Pendulum

[Table 1] Parameter of system

parameter	value
L_0	0.2305 [m]
L_1	0.1667 [m]
l_1	0.3~1.1 [m]
m_1	0.3970~1.4557 [kg]
J_1	0.0049 [kgm ²]
g	9.800 [m/s ²]
τ	63.1 [msec]
K_m	1.0466 [rad/s V]

시스템의 변수 중에서 진자의 길이와 진자의 무게만 변화한다고 가정하고 길이의 변화 범위는 0.3~1.1[m]이고, 무게의 변화 범위는 0.3970~1.4557[kg]으로 설정하였다. Arm의 위치와 속도 그리고 진자의 각도와 각속도를 상태변수 $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = \theta$, $x_4 = \dot{\theta}$ 로 설정하고

도립진자를 선형화하면 시스템의 행렬 A와 B는 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/\tau & 0 \\ 0 & \frac{m_1 l_1 g}{J_1 + m_1 l_1^2} & \frac{m_1 l_1 L_0/\tau}{J_1 + m_1 l_1^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_m/\tau \\ -\frac{m_1 l_1 L_0 K_m/\tau}{J_1 + m_1 l_1^2} \end{bmatrix} \quad (35)$$

3.2 적응 최적제어기 설계

3.2.1 시스템 상태방정식

진자의 길이 범위에서 선택된 길이 0.3[m], 0.7[m], 1.1[m]에 해당하는 시스템의 상태방정식의 행렬 A 및 B와 시스템 근은 다음과 같다.

■ 진자의 길이가 0.3[m]인 경우

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -15.8479 & 0 \\ 0 & 28.7564 & 10.7189 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 16.5864 \\ -11.2184 \end{bmatrix}$$

시스템 근: 5.3625, -5.3625, 0, -15.8479

■ 진자의 길이가 0.7[m]인 경우

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -15.8479 & 0 \\ 0 & 13.8517 & 5.1632 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 16.5864 \\ -5.4038 \end{bmatrix}$$

시스템 근: 3.7218, -3.7218, 0, -15.8479

■ 진자의 길이가 1.1[m]인 경우

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -15.8479 & 0 \\ 0 & 8.8846 & 3.3117 & 0 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 16.5864 \\ -3.4660 \end{bmatrix}$$

시스템 근: 2.9807, -2.9807, 0, -15.8479

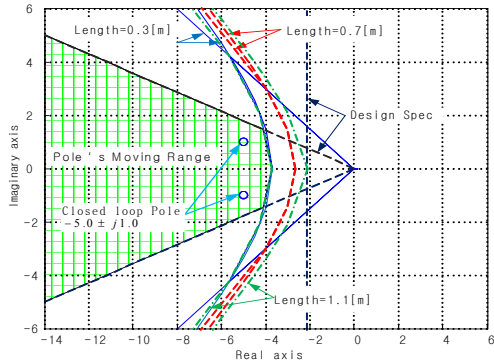
진자 길이의 변화에 따른 각각의 시스템 근을 분석하면 원점에 한개, 불안정한 실근 한개, 안전한 실근 두 개가 있다.

3.2.2 근의 이동범위

허수축에서 가장 먼 실근(-15.8479)은 움직이지 않고, 원점과 불안정한 근은 페루프 복소근으로 이동하고,

나머지 실근을 실근으로 이동시킨다.

■ 서로 다른 실근 두 실근의 이동 범위



[Fig. 3] Pole's Moving Range of two real poles

길이에 따른 원점과 불안정한 실근의 이동범위와 설계 조건($\zeta > 0.35$, $\zeta\omega_n > 0.67$)의 공통 영역이 그림 [Fig. 3]에 표현된 근의 이동범위이다. 이 범위에서 $5.0 \pm j1.0$ 을 원하는 페루프 복소근으로 선택하였다.

■ 한 개 실근의 이동 범위

각각 시스템의 실근(-5.3625, -3.7218, -2.9807)의 이동범위의 공통범위는 -5.3625의 왼쪽 영역이다. 이 범위에서 -6.0을 페루프 근으로 선택하였다.

3.2.3 라그랑지 보간법

제어가중행렬 R을 1로 설정하고 원하는 페루프 근($5.0 \pm j1.0, -6.0, -15.8479$)으로 이동시키는 상태가중행렬 Q와 제어법칙 K는 시스템별로 계산하면 다음과 같이 구해진다.

■ 진자의 길이가 0.3[m]인 경우

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 26.8669 & 103.2997 & 11.3975 & 19.2204 \\ 103.2997 & 397.7855 & 43.8696 & 74.0012 \\ 11.3975 & 43.8696 & 4.8388 & 8.1616 \\ 19.2204 & 74.0012 & 8.1616 & 13.7669 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = [-5.1833 - 40.4955 - 4.1400 - 7.5472]$$

■ 진자의 길이가 0.7[m]인 경우

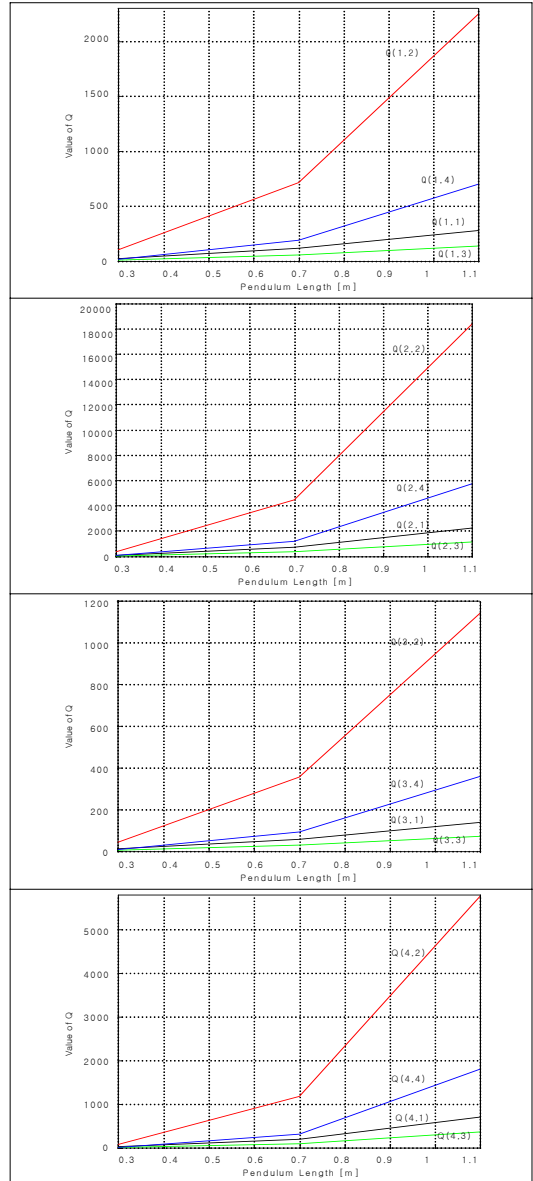
$$Q_2 = \begin{bmatrix} 115.792 & 718.782 & 56.691 & 188.574 \\ 718.782 & 4502.930 & 355.560 & 1183.759 \\ 56.691 & 355.560 & 28.080 & 93.496 \\ 188.574 & 1183.759 & 93.496 & 311.334 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = [-10.7607 - 98.4301 - 7.5666 - 26.1858]$$

■ 진자의 길이가 1.1[m]인 경우

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 281.46 & 2257.98 & 139.31 & 703.57 \\ 2257.98 & 18393.51 & 1140.73 & 5768.68 \\ 139.31 & 1140.73 & 70.87 & 358.54 \\ 703.57 & 5768.68 & 358.54 & 1814.15 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = [-16.7767 - 180.8160 - 11.2628 - 58.5131]$$



[Fig. 4] Q's Value according to change in Pendulum length

Fig. 4는 진자의 길이에 따라 상태가중행렬 Q가 어떻게 변화하는지를 그림으로 표현한 것이다.

$$\begin{aligned}
 q_{1L_jk} = & q_{1_jk} \frac{(l_p - 0.7)(l_p - 1.1)}{0.32} \\
 & + q_{2_jk} \frac{(l_p - 0.3)(l_p - 1.1)}{-0.32} \\
 & + q_{3_jk} \frac{(l_p - 0.3)(l_p - 0.7)}{0.32}
 \end{aligned} \quad (36)$$

은 진자의 길이(l_p)의 변화에 따른 최적 제어기의 상태가 중행렬을 계산하는 라그랑지 보간식이다.

3.2.4 모의실험 및 결과

모의실험은 진자가 0.7[m]인 시스템에 대해 기존의 설계 방법(TOC)으로 설계된 최적 제어기하고, 진자가 0.9[m]로 변화되었을 때 기존 제어기(TOC)와 제안한 방법(POC)로 설계된 제어기의 응답 특성을 비교해본다. 진자의 초기조건은 0.5[rad] 기울어진 상태이다. 진자의 길이(l_p)가 0.7[m]인 시스템의 상태가중행렬과 제어법칙은 Q_2 와 K_2 이다. Fig. 5는 진자가 2.25[sec] 경과 후에 정상 상태에 도달하는 응답특성을 보여준다.

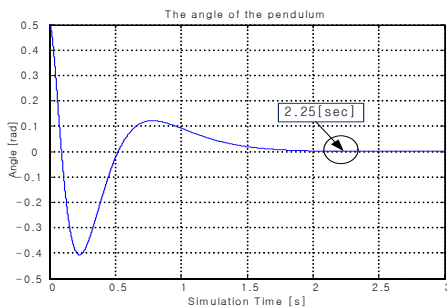
진자가 0.9[m]로 늘어난 시스템을 기존의 제어법칙 K_2 로 제어 했을 경우의 응답특성 결과가 Fig. 6이다. 응답특성을 보면 시스템이 발산하는데 이는 변화에 대해 기존 제어기가 강인성을 보장하지 못함을 보여준다. 제안한 방법(POC)을 적용하기 위해 늘어난 진자의 길이 0.9[m]를 라그랑지 보간식에 대입하여 상태가중행렬을 계산하면

$$Q_{iLI} = \begin{bmatrix} 145.61 & 1103.37 & 72.08 & 332.15 \\ 1103.37 & 8536.44 & 555.63 & 2597.92 \\ 72.08 & 555.63 & 36.50 & 168.49 \\ 332.15 & 2597.92 & 168.49 & 795.34 \end{bmatrix} \quad (37)$$

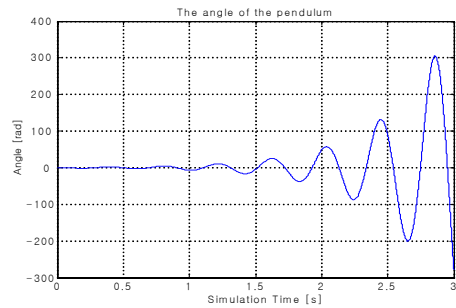
이 되고 제어 법칙은

$$K_{iLI} = [-12.067 \quad -127.303 \quad -8.46 \quad -38.772] \quad (38)$$

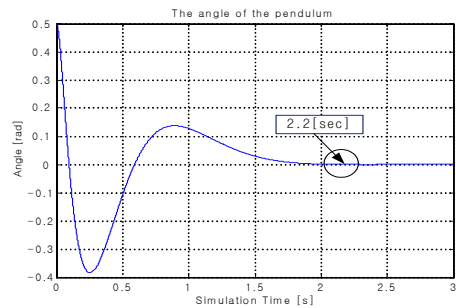
이 된다. Fig. 7은 제어법칙 K_{iLI} 에 대한 진자의 응답특성이다. 진자가 정상상태에 도달하는 시간이 2.2[sec]로 Fig. 5와 비슷한 결과를 보여준다.



[Fig. 5] Simulation: TOC(length=0.7[m])



[Fig. 6] Simulation: TOC(length=0.9[m])



[Fig. 7] Simulation: POC(length=0.9[m])

4. 결론

라그랑지 보간법과 근의 이동범위를 이용하여 변수가 변화하는 시스템의 적용 최적제어 설계 방법을 제안하였다. 제안한 방법은 진자의 길이가 변화하는 회전형 독립진자에 적용한 모의실험을 통해 기존의 최적제어보다 시스템의 변화에 대한 적응성과 강인성이 보장됨을 확인할 수 있었다.

라그랑지 보간법은 데이터가 추가되면 이미 구한 보간함수를 사용할 수 없는 단점을 가지는데 이런 단점을 극복할 수 있는 다른 보간법과의 접목에 대한 연구가 필요하다.

References

- [1] O. A. Solheim, "Design of optimal control systems with prescribed eigenvalues," *Int. J. Control*, vol. 15, no. 1, pp. 143-160, 1972.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1080/00207177208932136>
- [2] T. Fujinaka and S. Omatu, "Pole placement using optimal regulators," *T.IEE japan*, vol. 121-C, no. 1, pp.

240-245, 2001.

- [3] M. Park, S.K. Hong, S.H. Lee, "Design of an LQR Controller Considering Pole's Moving-Range", Journal of Control, Automation and System Engineering Vol 11, No. 10, pp. 854-869, 2005.
DOI: <http://dx.doi.org/10.5302/J.ICROS.2005.11.10.864>
- [4] M. Park, M.S. Park, D. Park, S.K. Hong, S.H. Lee, "LQR Controller Design with Pole-Placement," Journal of Control, Automation and System Engineering Vol 13, No 6, pp. 574-580, 2007.
DOI: <http://dx.doi.org/10.5302/J.ICROS.2007.13.6.574>
- [5] Minh Park, "Pole Placement by an LQ Controller," Journal of Control, Automation and System Engineering Vol 15, No 3, pp. 249-254, 2009
DOI: <http://dx.doi.org/10.5302/J.ICROS.2009.15.3.249>
- [6] Y.H. Lee, J.K. Ahn, G.G. Jin, M.O. So, "Interpolation-Based Adaptive LQ Control for Nonlinear System." Vol. 32. No. 4, pp. 618-623, 2008
- [7] G. Strang, *Linear Algebra and its applications*, 3rd Ed., Harcourt Brace & Company, 1988.
- [8] B. D. O. Anderson, J. B. Moore, *Optimal Control*, Prentice-Hall, 1989.
- [9] J. B. Burl, *Linear Optimal Control: H_2 and H_∞ Methods*, Addison Wesley Longman, 1999.s

한 상 완(Sang-Wan Hank)

[정회원]



- 1991년 8월 : 아주대학교 대학원 제어공학과 (공학석사)
- 1999년 2월 : 아주대학교 대학원 전자공학과 (공학박사)
- 1999년 3월 ~ 현재 : 충남도립 청양대학 전기전자과 부교수

<관심분야>

제어계측, 로봇틱스, 공장자동화

박 민 호(Minho Park)

[정회원]



- 1993년 2월 : 아주대학교 대학원 제어계측공학과 (공학석사)
- 1993년 3월 ~ 1998년 6월 : (주) 한미반도체 연구원
- 2007년 8월 : 아주대학교 대학원 전자공학과 (공학박사)
- 2008년 3월 ~ 현재 : 충남도립 청양대학 전기전자과 조교수

<관심분야>

최적제어, Robust Control, 공장자동화